

CHICAGO CIRCLE



LIBRARY

This book is the gift of

F. Wheeler Loomis

UNIVERSITY of ILLINOIS

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
ALS ERGÄNZUNG ZU IHREN „VERHANDLUNGEN“
UNTER DER REDAKTION VON

KARL SCHEEL

ZWÖLFTER BAND

Mit 106 Textfiguren und 7 Tafeln

(Ausgegeben November — Januar 1923)

FRIEDR. VIEWEG & SOHN
AKT.-GES. BRAUNSCHWEIG

UND

JULIUS SPRINGER
BERLIN

1923

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Inhalt.

	Seite
E. Fues, Die Berechnung wasserstoffunähnlicher Spektren aus Zentralbewegungen der Elektronen II. Mit zwei Abbildungen	1
Erwin Schrödinger, Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons	13
Harry Schmidt, Molekulare Dimensionen, Molekülbau und innere Reibung der Halogene und ihrer Hydride	24
Fritz Schanz, Eine neue Theorie des Sehens	28
Fr. Dessauer, Über einige Wirkungen von Strahlen. I. Mitteilung aus dem Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin in Frankfurt a. M.	38
Bruno Tornau, Bestimmung des Verhältnisses $k = c_p/c_v$ der beiden spezifischen Wärmen von Kohlendioxyd nach der Quinckeschen Resonanzmethode sowie Untersuchungen über den Einfluß der dabei verwandten Tönhöhen	48
H. Mark, M. Polanyi und E. Schmid, Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen. I. Mitteilung: Allgemeine Beschreibung der Erscheinungen und Untersuchungsmethoden. Mit 9 Abbildungen und 5 Tafeln (Tafel I—V)	58
Dieselben, Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen. II. Mitteilung: Quantitative Festlegung des Dehnungsmechanismus. Mit 22 Abbildungen und 6 Tafeln (Tafel I—VI)	78
Dieselben, Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen. III. Mitteilung: Beziehungen zur Faserstruktur und Verfestigung. Mit einer Tafel (Tafel VI)	111
W. Bothe, Untersuchungen an β -Strahlenbahnen. Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Mit einer Abbildung und einer Tafel (Tafel VII)	117
Joseph Würschmidt, Magnetische Anfangspermeabilität, scheinbare Remanenz und Verhalten bei Erschütterungen. Mit 15 Abbildungen . . .	128
Clemens Schaefer und Georg Heisen, Experimentelle Beiträge zur Strömung von Flüssigkeiten in Röhren. Mit drei Abbildungen	165
Franz Skaupy, Der durchsichtige Selektivstrahler als Leuchtkörper . . .	177
Franz Skaupy, Zum Problem des Atoms und der Strahlung	184
Karl Bollert, Die Entstehung der Lorentzverkürzung und die strenge Behandlung des Uhrenparadoxons. (Mit einer Antwort an Herrn Stjepan Mohorovičić.) Mit drei Abbildungen	189
Debendra Bose, Studien über den Durchgang von α - und β -Teilchen durch Gase. Mit sechs Abbildungen	207

	Seite
Walter Grotrian, Die Absorptionsspektren von Thallium- und Indiumdampf. Mit vier Abbildungen	218
Hans Zickendraht, Über den Luftwiderstand senkrecht getroffener Kreislatten. Mit sieben Abbildungen	232
Rolf M. Sievert, Einige Bemerkungen zu der Abhandlung: W. Friedrich und O. Glasser, „Intensitätsverteilung der γ -Strahlen radioaktiver Substanzen im absorbierenden Medium“	243
F. A. Henglein, Die chemischen Konstanten der Halogene im ein- und zweiatomigen Zustand	245
E. Bratke und E. Waetzmann, Über eine weitere Interferenzanordnung zur Prüfung optischer Systeme. Mit vier Abbildungen	253
Fritz Emde, Polare und axiale Vektoren in der Physik	258
Franz Riedinger: Die Stellung der Uhr in der Relativitätslehre	265
L. Vegard: Die Lage der Atome in den optisch aktiven Kristallen NaClO_3 und NaBrO_3 . Mit zehn Abbildungen	289
H. Opitz: Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion. II. Mit einer Abbildung	304
Marietta Blau und Kamillo Altenburger, Über einige Wirkungen von Strahlen. II. Mit sechs Abbildungen	315
Clemens Schaefer und Max Thomas, Oberschwingungen in ultraroten Absorptionsspektren. Mit sieben Abbildungen	330
N. Bohr und D. Coster, Röntgenspektren und periodisches System der Elemente. Mit vier Abbildungen	342
Konstantin Palaiologos, Über kurze Schallwellen. Mit zwei Abbildungen	375
Autorenregister	379

Die Berechnung wasserstoffunähnlicher Spektren aus Zentralbewegungen der Elektronen II.

Von **E. Fues** in Stuttgart.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 2. Oktober 1922.)

§ 8. Im ersten Teil¹⁾ dieser Arbeit hat der Verf. gezeigt, daß, wenn man sich die Emissionselektronen der Atome in einem zentralen Kraftfeld bewegt denkt, man zu einer brauchbaren Berechnung der Serienkonstanten kommen kann, sofern man nur über den Potentialverlauf der Zentralkraft plausible Annahmen macht. Die Berechnung der Terme eines idealisierten Atoms liefert ziemlich gut liegende Werte und läßt eine Reihe allgemeiner Seriengesetzmäßigkeiten hervortreten.

Im folgenden soll nun der befriedigendere Weg eingeschlagen, von vorgefaßten Modellvorstellungen ganz abgesehen werden, und rein aus den beobachteten Spektraltermen des Natriums der Potentialverlauf der im Natriumatom herrschenden Zentralkraft erschlossen werden. Damit wird gleichzeitig sein Spektrum durch bestimmte Zentralbewegungen seiner Elektronen „erklärt“, und es bedarf lediglich einer weiteren Integration, um auch die Bahnformen, in denen diese Bewegung stattfindet, kennen zu lernen.

In Teil I war der radiale Impuls dargestellt [vgl. (3''') auf S. 369 dieser ZS.] in der Form

$$p_r = f(r) = \frac{\sqrt{P - Q}}{r} \quad (9)$$

und die Bahnenergie ergab sich aus dem radialen Quantenintegral

$$\frac{1}{h} \oint p_r dr = n'.$$

Die Größe Q war bis auf einen Faktor [vgl. (6), S. 369] der Teil des Potentials, welcher die besondere Kraftwirkung der übrigen Elektronen auf das Leuchtelektron enthält. Man kann daher das Ziel dieser Untersuchung auch dahin zusammenfassen, es soll aus dem beobachteten Na-Spektrum die Kurve Q des Na-Atoms aufgefunden werden.

Wie wir gesehen haben, kann man sich die Ausdehnung der Bahn an einer Figur veranschaulichen, welche die Kurven P und Q enthält.

¹⁾ ZS. f. Phys. **11**, 364—378, 1922.

Fig. 3 des ersten Teils ist hier als Fig. 1 noch einmal abgedruckt und es sei daran erinnert, daß die Kurven P Parabeln sind, deren jede einem Spektralterm entspricht, nach ihrer Serienzugehörigkeit in Büschel zusammengefaßt, wie die angeschriebenen Nummern es erläutern. Im allgemeinen schließen die Kurven P und Q ein (schraffiertes) Flächenstück ein, das ein Abbild des zu P gehörigen radialen Quantenintegrals n' ist. Die beiden Schnittpunkte AB von P mit Q bezeichnen dabei die Librationsgrenzen der Bahn. Die mit $1_1, 2_2, 3_3$ bezeichneten Parabeln berühren aber die Kurve Q nur, sie entsprechen den Kreisbahntermen. Ihr radiales Quantenintegral (sonst dargestellt durch die schraffierte Fläche) verschwindet, $P - Q$ ist im Berührungspunkt $= 0$, so daß der einzige reelle Wert, den der radiale Impuls p_r annehmen kann, eben auch der Wert 0 ist, wie es einer Kreis-

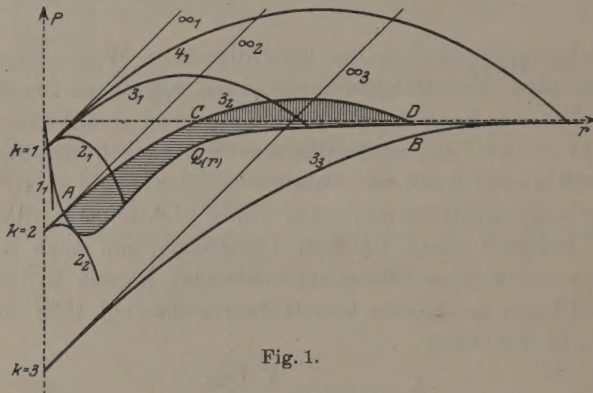


Fig. 1.

bahn entspricht. Die Abszisse des Berührungspunkts gibt den Radius des Bahnkreises.

Die Betrachtung der Figur führt von selbst zu einer Frage, deren Beantwortung den Schlüssel zu unserer ganzen Untersuchung geben wird. Die Parabeln $1_1, 2_1, 2_2$ der Figur verraten schon durch ihre starke Krümmung, daß ihnen sehr große Termwerte $|W|$ zugehören. Diese liegen in der Tat weit im Röntgengebiet. Es entspricht ihnen zunächst keine Bewegungsmöglichkeit des Leuchtelektrons, denn es gehört ja zum Grundbestand der Bohrschen Vorstellungen, daß innere Bahnen nicht in beliebiger Zahl ausgebildet werden können, sondern daß aus noch nicht aufgehellten Gründen nur so viel niedrigquantige Bahnen vorhanden sind, als auch schon von inneren Elektronen durchlaufen werden. Das von außen kommende Elektron kann zwar vorübergehend ins Innere des Atoms eindringen, jedoch kann

es nicht auf eine ganz im Innern verlaufende Bahn fallen, es findet sie alle schon besetzt. Wenn die Figur nur die Bewegungsmöglichkeiten des einen M -Elektrons abzulesen gestattet, so finden wir im Natriumspektrum keine Energiestufen, die den oben bezeichneten Parabeln entsprechen.

Allein mit einer gewissen Einschränkung kann der Potentialverlauf Q auch für die Bewegung der K - und L -Elektronen in Anspruch genommen werden. Wenn wir jeweils die Kraftwirkung aller übrigen Elektronen auf ein K -, ein L - oder auf das M -Elektron miteinander vergleichen, und uns dabei von den neuen Bohrschen Vorstellungen leiten lassen, so finden wir, daß sie einander im selben Kernabstand sehr nahe gleichen müssen. Denken wir z. B. an die beiden K -Elektronen auf ihrer 1_1 -Kreisbahn. Jedes derselben hat dauernd das andere sich gegenüber, dazu aber noch sehr häufig ein weiteres, das aus dem L - oder gar M -Bereich herkommt und vorübergehend bis in die 1_1 -Bahn eindringt. Fünf Elektronen wären nach Bohr an diesen Besuchen beteiligt, vier davon auf 2_1 -Bahnen, dazu das M -Elektron auf seiner 3_1 -Grundbahn. Ein K -Elektron steht also sehr häufig unter der abschirmenden Wirkung zweier dem Kern ebenso nahe benachbarter Elektronen. Allerdings nicht dauernd und nicht im Mittel der Zeit. Darin besteht eine Verschiedenheit gegenüber den eindringenden L - oder M -Elektronen. Diese finden notwendig immer die beiden K -Elektronen im K -Bereich vor. Ein gewisser Unterschied in den Kraftwirkungen besteht also, jedoch wird der Fehler nicht groß, wenn wir die Kräfte, welche ein von außen kommendes Elektron im K -Bereich erfährt, ersetzen durch diejenigen, welche im Mittel der Zeit auf ein K -Elektron selbst wirken.

Noch günstiger sind die Verhältnisse im L -Bereich. Ein L -Elektron erfährt in einem gewissen Kernabstand außer der abstoßenden Wirkung der K -Elektronen auch noch Kräfte von den sieben anderen L -Elektronen her, die insgesamt die Kernanziehung bis zu einem gewissen mittleren Betrag abschirmen. Darüber hinaus beteiligt sich aber im unerregten Zustand des Atoms auch das M -Elektron an der Abschirmung, wenigstens auf dem Teil seiner Bahn, der in den L -Bereich fällt. Die resultierende Schirmwirkung wird daher nicht viel verschieden sein von der, welche die beiden K - und alle acht L -Elektronen auf das M -Elektron im selben Kernabstand ausüben.

Vernachlässigen wir aber willentlich die besprochene Verschiedenheit, so sind sämtliche Elektronen als vom gleichen Zentralkraftfeld

beeinflusst anzusehen und Fig. 3 gibt uns nicht bloß ein Bild von der Bewegung des M -Elektrons, sondern auch aller anderen. Die durch die Parabeln 1_1 , 2_1 , 2_2 verbildlichten Bahnen sind dann nichts anderes als die Bahnen der K - oder der L -Elektronen mit ihren beiden Untergruppen. Diese Einsicht bedeutet einen großen Schritt vorwärts auf das Ziel unserer Untersuchung: die Auffindung der Kurve Q aus den Termen des Spektrums.

Das K - und L_1 -Niveau ist beobachtet, man kennt also in der Figur die Lage der mit 1_1 und der mit 2_2 bezeichneten Parabeln, welche als Abbilder von Kreisbahnen beide die Kurve Q berühren müssen. Durch die Einzeichnung dieser beiden Parabeln in die Figur ist der Anfangsverlauf der Kurve Q schon einigermaßen festgelegt. Ebenso leicht läßt sich andererseits ihre asymptotische Annäherung an die r -Achse gewinnen. Wieder sind es die Kreisbahnterme, die weiterhelfen. Aus dem $3\mathfrak{D}$ -Term gewinnen wir die mit 3_3 bezeichnete Parabel, der $4\mathfrak{B}$ -Term liefert dazu noch eine mit 4_4 zu numerierende, in der Figur nicht mehr abgedruckte Parabel. Beide müssen die gesuchte Kurve Q berühren, wodurch der von B nach rechts hin liegende Verlauf derselben wiederum bestimmt ist.

Es ist bloß noch notwendig, das Stück zwischen den Berührungspunkten der 2_2 - und der 3_3 -Parabel so zu interpolieren, daß man in Übereinstimmung mit den übrigen spektralen Erfahrungen bleibt. Ist das in einheitlicher Weise möglich, so ist der Beweis geliefert, daß man die bewegenden Kräfte für die Elektronen im Natriumatom durch ein einziges Zentralfeld darstellen kann, dessen Potentialverlauf aus der gefundenen Kurve Q zu entnehmen ist. Beim Ansatz der Interpolationsfunktion bleibt allerdings eine gewisse Willkür, in ihr findet der empirische Charakter des ganzen Verfahrens seinen Ausdruck. Dabei muß das erste Ziel einfach die Ermittlung der geeignetsten geometrischen Gestalt, und erst eine spätere sehr viel weiter führende Aufgabe die modellmäßige Analyse der Kurve Q sein. Wir werden deshalb ohne Bedenken eine geeignet erscheinende Funktionsform zur Interpolation wählen, durch Einfügung von unbestimmten Parametern die Gestalt der Kurve zunächst beweglich erhalten, dann festlegen und je nach Bedarf noch Korrekturen an ihr vornehmen. Dabei wird sich auch herausstellen, daß die Gleichsetzung der wirklichen Röntgenterme mit den aus dem optischen Spektrum extrapolierten Termen nicht streng aufrecht erhalten werden kann, sondern daß die Verschiedenheit der Potentiale, welche die einzelnen Elektronengruppen beherrschen, berücksichtigt werden

muß. Doch liegt die Abweichung in der vorhin vermuteten Richtung und ist gering genug, daß sie zunächst einmal vernachlässigt werden kann.

§ 9. Aus dem Natriumspektrum kennen wir die vier Kreisbahnsterme¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \text{den } K\text{-Term} &= \frac{W_1}{hc} = -8\,668\,800 \text{ für } n=k=1 \\ \text{den } L_1\text{-Term} &= \frac{W_2}{hc} = -254\,000 \text{ für } n=k=2 \\ \text{den } 3D\text{-Term} &= \frac{W_3}{hc} = -12\,270 \text{ für } n=k=3 \\ \text{den } 4B\text{-Term} &= \frac{W_4}{hc} = -6\,860 \text{ für } n=k=4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tragen wir als Abszissen in der Figur nicht den in Zentimetern gemessenen Kernabstand r , sondern das Verhältnis $R = \frac{r}{a_0}$ auf ($a_0 = 0,532 \cdot 10^{-8}$ cm ist der Radius der innersten Wasserstoffkreisbahn), und als Ordinaten die Verhältnisse

$$\bar{P} = \frac{P}{2m e^2 a_0} \quad \text{bzw.} \quad \bar{Q} = \frac{Q}{2m e^2 a_0},$$

so bilden sich [nach Teil I, Formeln (6), S. 369 und (5'), S. 370] die obenstehenden Terme (10) ab in die Parabeln:

$$\begin{aligned} P_1 &= -39,82 \quad R^2 + R - 1.0,496 \\ \bar{P}_2 &= -1,167 \quad R^2 + R - 4.0,496 \\ \bar{P}_3 &= -0,056\,35 \quad R^2 + R - 9.0,496 \\ \bar{P}_4 &= -0,031\,54 \quad R^2 + R - 16.0,496 \end{aligned}$$

Die Kurve Q ist jetzt so zu führen, daß sie diese vier Parabeln berührt.

Die nächstliegende Interpolation der Kurve \bar{Q} bestünde wohl darin, daß man versuchte, die Kreisbahn-Termwerte (10) als Funktion einer stetig veränderlichen Quantenzahl k darzustellen — z. B. durch Ansetzen einer Potenzreihe in $1/k$. Den stetig veränderlichen Termwerten entspricht dabei eine stetig fortschreitende Schar von Parabeln, welcher P_1 bis P_n selbstverständlich angehören, und Q ergibt sich einfach als Einhüllende dieser Parabelschar. Durch eingeführte bewegliche Zwischenpunkte kann die Gestalt von Q noch beeinflusst werden. Wider Erwarten hatte der Verf. aber mit diesem Verfahren

¹⁾ Mit den Zahlen von Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., ist der K -Term berechnet aus $K_\beta + 1,5 \text{ } \mathfrak{S}$, der L_1 -Term aus $K_\beta - K_\alpha + 1,5 \text{ } \mathfrak{S}$. Die Werte der optischen Terme findet man etwa bei Dunz, Bearbeitung unserer Kenntnisse von den Serien, Diss. Tübingen 1911.

keinen Erfolg. Bei einigen Versuchen stellten sich immer wieder Gestalten von \bar{Q} ein, die durch! ins Unendliche führende Kurvenäste unterbrochen waren, so daß er schließlich vorzog, direkt eine Funktion für \bar{Q} aufzustellen.

Für die Form dieses Ansatzes gibt aber das eben beschriebene Verfahren einen Fingerzeig. Es liefert Q als gebrochene irrationale Funktion von R , wie es nach der Bedeutung von Q (es ist vom Faktor r^2 abgesehen eine Summe von Punktpotentialen) von vornherein anzunehmen war. Der Verf. begnügte sich mit einem gebrochenen rationalen Ansatz, welcher der bekannten Interpolationsformel von Lagrange nachgebildet ist. Kennt man die Punkte (R_i, Q_i) , durch die \bar{Q} gehen muß, so erhält man eine gebrochene rationale Funktion, deren Kurvenbild diese Eigenschaft hat, einfach durch den Ansatz

$$\bar{Q} = \frac{1}{G_{(R)}} \cdot \sum (i) \bar{Q}_i \cdot G_{(R_i)} \cdot \frac{(R - R_1)(R - R_2) \dots (R - R_{i-1})}{(R_i - R_1)(R_i - R_2) \dots (R_i - R_{i-1})}. \quad (11)$$

$G_{(R)}$ ist eine geeignet gewählte ganze Funktion, deren Konstanten noch als Parameter verfügbar sind, auch kann natürlich der Durchgang durch bewegliche Kurvenpunkte erzwungen und damit die Gestalt von Q noch beeinflußt werden.

Als vorgeschriebene Punkte für die Kurve \bar{Q} wählen wir die Berührungspunkte mit den vorhin festgelegten Kreisbahnparabeln. Die ungefähre Lage dieser Punkte auf den Parabeln kann leicht ermittelt werden. Berechnet man mit solchen vorläufigen Werten die Kurve Q und wird dabei die Berührung ungenügend, so genügt es, durch eine kleine Korrektur den Punkt in die Mitte des abgeschnittenen kleinen Parabelbogens zu verschieben. Eine ähnliche Korrektur kann notwendig werden bei Änderung der Parameterwerte.

Auf Grund der vorangegangenen Interpolationsversuche benutzte der Verf. die Punkte

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,089; \bar{Q}_1 = -0,723 \\ R_2 &= 0,70; \bar{Q}_2 = -1,855 \\ R_3 &= 8,87; \bar{Q}_3 = -0,030\,22 \\ R_4 &= 15,87; \bar{Q}_4 = -0,020\,77 \end{aligned}$$

als feste Punkte und legte durch sie ein Kurvenbüschel (11), wobei

$$G_{(R)} = (R^2 + \lambda)^2$$

angesetzt wurde und λ einen noch wählbaren Parameter bedeutete. Fig. 4 gibt das Aussehen des Büschels und enthält die zu den einzelnen Kurven gehörigen λ -Werte. Es kam, wie eine vorläufige Abschätzung zeigte, in Frage ein Intervall von $\lambda = 6$ bis $\lambda = 8$.

Zur Entscheidung über den Wert des Parameters muß ein weiterer Term aus dem Natriumspektrum herangezogen werden. Greift man den Term $2\mathfrak{P} = \frac{W_{3_2}}{ch} = -24485$ (die 3_2 -Parabel der Fig. 3) heraus, so hat man λ so zu wählen, daß

$$n' = \frac{1}{h} \oint \frac{\sqrt{P_{3_2} - Q}}{R} dR = 3 - 2 = 1 \text{ wird.}$$

Es ergibt sich für

$$\lambda = 6 \quad n' = 0,96,$$

$$\lambda = 7 \quad n' = 0,99,$$

$$\lambda = 8 \quad n' = 1,02,$$

so daß, wie man sieht, der beste λ -Wert zwischen 7 und 8 liegt. Mit dieser Rechnung ist eine Kurve Q festgelegt, deren Richtigkeit durch

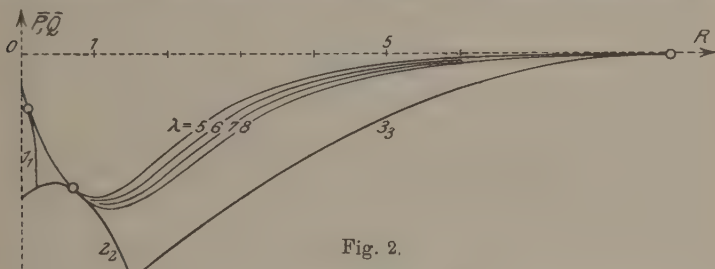


Fig. 2.

Ausrechnung weiterer Quantenintegrale, die alle ganzzahlig werden müssen, zu bestätigen ist.

§ 10. Es soll mit einigen Worten auf das Integrationsverfahren eingegangen werden.

Die in (9) vorkommende Wurzel $\sqrt{P - Q}$ kann im Integrationsintervall nicht nach aufsteigenden Potenzen von Q entwickelt werden, weil z. B. in der Umgebung der Punkte C und D der Figur Q durchaus nicht klein gegen P ist. Das von Sommerfeld angegebene komplexe Integrationsverfahren kann daher nicht angewendet werden.

Es bleibt die reelle Integration, die aber nur dann auf einfach auswertbare Integrale führt, wenn der Radikand $P - Q$ nicht gebrochen, sondern eine ganze Funktion höchstens zweiten Grades ist. Der Teil P entspricht, wie wir gesehen haben, dieser Forderung. Q aber muß zur numerischen Berechnung des Integrals abschnittsweise durch Funktionen zweiten Grades in R angenähert werden. Am Bild ausgedrückt: Die Kurve Q muß in eine Reihe einzelner Kurvenstücke zerschnitten, und jedes Stück durch einen passend gewählten Parabelbogen ersetzt werden. Über die Größenordnung des hierdurch

verursachten Fehlers gibt man sich leicht Rechenschaft durch Einzeichnung der Ersatzparabeln in die Figur. Wir wissen nämlich von der am Schluß von § 9 beschriebenen Integration her, um wieviel das Quantenintegral sich ändert, wenn man an Stelle der gewählten Q -Kurve eine benachbarte aus dem Büschel zur Integration benutzt. Die Abweichung dieser Kurve von der gewählten wird im allgemeinen weit größer sein, als die Abweichung der Ersatzparabeln. Dadurch ist auch rechnerisch eine obere Grenze für den entstandenen Fehler erkannt.

Bei der Zahlenrechnung wurde die Q -Kurve mit $\lambda = 7$ ersetzt durch folgende Parabeln:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Zwischen } R = 0 \text{ u. } R = 0,7 & \text{durch } Q = 1,574 R^2 - 3,199 R - 0,388 \\ \text{" } R = 0,7 \text{ " } R = 1,4 & \text{" } Q = 1,0714 R^2 - 2,4914 R - 0,6360 \\ \text{" } R = 1,4 \text{ " } R = 2 & \text{" } Q = 0,5167 R^2 - 1,1217 R - 1,4663 \\ \text{" } R = 2 \text{ " } R = 4 & \text{" } Q = -0,1375 R^2 + 1,4145 R - 3,922 \\ \text{" } R = 4 \text{ " } R = 6 & \text{" } Q = -0,058 R^2 + 0,750 R - 2,536 \end{array} \right\} (12)$$

Sie wurden immer durch drei sorgfältig gewählte Punkte auf der Kurve Q hindurchgelegt und passen sich deren Verlauf so gut an, daß der Fehler sicher nicht in Betracht kommt. Von $R = 6$ an wurde einfach die R -Achse als Q -Kurve genommen, der Fehler dieser Vernachlässigung bleibt unter 0,01.

Mit diesen Ersatzkurvenstücken ergab sich schon der in § 2 angeführte Wert des ersten Quantenintegrals. Berechnet man damit die zu den übrigen Termen des Natriumspektrums gehörigen Quantenintegrale, so entstehen folgende Resultate:

Die Terme $3_2, 4_2, 5_2, 6_2$ in der üblichen Bezeichnung $2\text{ } \mathfrak{P}, 3\text{ } \mathfrak{P}, 4\text{ } \mathfrak{P}, 5\text{ } \mathfrak{P}$ ergeben $n' = 0,99, 1,95, 2,89, 3,89$, also schon recht genau die erwarteten Quantenzahlen $1, 2, 3, 4$, aber die Terme $3_1, 4_1, 5_1, 6_1$ oder $1,5\text{ } \mathfrak{S}, 2,5\text{ } \mathfrak{S}, 3,5\text{ } \mathfrak{S}, 4,5\text{ } \mathfrak{S}$ liefern $n' = 2,22, 3,15, 4,14, 5,13$, also durchweg etwas zu große Werte. Besonders der 3_1 -Term ergibt ein ziemlich falsches Resultat.

Erinnern wir uns daran, daß die Zahlen n' abgebildet wurden durch Flächenstücke wie das in Fig. 3 schraffierte, daß also ein Überschuß oder Fehlbetrag an diesen Zahlen direkt gedeutet werden kann als zu große oder zu geringe Ausdehnung dieser Flächen, so müssen wir die angestellten Berechnungen offenbar dahin deuten, daß die angenommene Kurve Q in ihrem Anfangsverlauf zu tief liegt, und zwar schon in dem Gebiet, das nicht mehr zum Integrationsbereich der n_2 gehört, denn in dem letzteren liegt die Kurve Q ziemlich richtig, eher zu hoch, wie die Berechnung mit den \mathfrak{P} -Termen zeigt.

Das ist nun aber gerade, was wir auf Grund der in § 1 vorgenommenen allgemeinen Überlegungen erwartet haben! Dort

schlossen wir, daß ein von außen eindringendes Elektron im K -Bereich eine stärkere Kernabschirmung vorfinden müsse, als die K -Elektronen selbst durchschnittlich erfahren. Diese stehen unter stärkerer Kernanziehung, ihre Kreisbahn wird also einen zu großen Energiewert und zu kleinen Bahnradius liefern. An der Figur drückt sich das so aus: Die aus dem K -Term berechnete 1_1 -Parabel ist zu stark gekrümmt, sie müßte weiter gespannt werden, um die Kurve Q wirklich zu berühren. Die eigentliche Kurve Q läuft also ein Stück höher, als es der Berührung entspricht.

Bringt man demzufolge im Anfangsverlauf eine passende Korrektur an (die in der Figur weggelassen ist), ersetzt man etwa den in (12) genannten Anfangsbogen zwischen $R = 0$ und $R = 0,7$ durch die Parabel:

$$Q = 2,0633 R^2 - 3,880 R - 0,150,$$

so wird auch wirklich der störende Fehler beseitigt:

Die Terme	3_1	4_1	5_1	6_1
oder	$1,5 \text{ } \mathfrak{S}$	$2,5 \text{ } \mathfrak{S}$	$3,5 \text{ } \mathfrak{S}$	$4,5 \text{ } \mathfrak{S}$
liefern	$n' = 2,02$	2,95	3,94	4,93
die Terme	3_2	4_2	5_2	6_2
oder	$2 \text{ } \mathfrak{B}$	$3 \text{ } \mathfrak{B}$	$4 \text{ } \mathfrak{B}$	$5 \text{ } \mathfrak{B}$
liefern	$n' = 0,98$	1,94	2,88	3,88
die Terme	3_3	4_3	5_3	6_3
oder	$3 \text{ } \mathfrak{D}$	$4 \text{ } \mathfrak{D}$	$5 \text{ } \mathfrak{D}$	$6 \text{ } \mathfrak{D}$
liefern	$n' = 0$	1,01	2,02	3,02
und der Term	—	4_4	} Weitere Terme dieser Serie sind nicht bekannt ¹⁾ .	
oder	—	$4 \text{ } \mathfrak{B}$		
ergibt	$n' =$	0		

Damit ist gezeigt, daß sich alle Terme des optischen Natriumspektrums mit mindestens 3 Proz. Genauigkeit²⁾ auf Bahnenergien bei der Zentralbewegung von Elektronen zurückführen lassen, und der Beweis ist geliefert, daß die in der letzten Zeit gebildete Vorstellung über das Zustandekommen wasserstoffunähnlicher Serienspektren richtig ist.

¹⁾ Dunz gibt a. a. O. noch einen Term an, den er für $5 \text{ } \mathfrak{B}$ hält, jedoch würde er einen großen negativen Quantendefekt ergeben, was an dieser Stelle des Spektrums völlig unverständlich wäre, auch allen spektroskopischen Erfahrungen sonst widerspräche. Wir müssen daher die höheren \mathfrak{B} -Terme des Natriums sämtlich noch als unbekannt ansehen.

²⁾ Der prozentische Fehler des berechneten Terms wird bestimmt durch die Abweichung der berechneten Werte n' von ganzen Zahlen, im Verhältnis zum Wert der zugehörigen effektiven Gesamtquantenzahl n_{eff} . Es gehören aber zu den Termen 3_1 4_1 5_1 6_1 3_2 4_2 5_2 6_2 }
die Werte n_{eff} 1,63 2,64 3,65 4,65 2,12 3,13 4,14 5,14 } usf.
und die obigen Fehler + 0,02 — 0,05 — 0,06 — 0,07 — 0,02 — 0,06 — 0,12 — 0,12 }

Die Fehler betragen also durchweg weniger als 3 Proz.

§ 11. Die in § 3 angegebenen Resultate bedürfen noch einiger Anmerkungen. Zunächst soll ergänzt werden, daß, wenn man das in der Anmerkung auf S. 5 definierte L -Niveau auch als 2_1 -Term in Anspruch nimmt, das zugehörige Quantenintegral den Wert annimmt $n' = 1,15$, die aus dem Term berechnete Quantenzahl ist also um 0,15 zu groß, das sind ungefähr 25 Proz. des zugehörigen n_{eff} . Anders ausgedrückt: Zu unserer Potentialkurve ließe sich eine Parabel finden, die zwar die Fläche $n' = 1$ abschnitte, den Term aber um 25 Proz. zu groß ergäbe. Das ist auch gar nicht anders zu erwarten, weil wir, streng genommen, drei L -Niveaus unterscheiden müssen, und nach den Untersuchungen von Coster ¹⁾ nicht L_1 , sondern L_2 und L_3 mit der Bezeichnung 2_1 zu versehen sind. Diese beiden Niveaus unterscheiden sich wahrscheinlich durch die Quantelung einer dritten Bewegungsperiode, und aus dem L -Dublett der Elemente mit höherer Ordnungszahl ist zu extrapolieren, daß sie bei Natrium sehr erheblich auseinanderfallen. Das Dublett $L_1 L_2$ hat wohl die Größenordnung des von Grotrian als L -Dublett des Neons erkannten ²⁾, das eine Schwingungsdifferenz von 782 cm^{-1} besitzt. Einerlei, ob nun L_2 oder L_3 oder ein dazwischen liegendes, irgendwie gemitteltes Niveau in unserer Betrachtung als 2_1 -Term zugrunde zu legen wäre, jedenfalls fallen die 2_1 - und 2_2 -Terme nicht zusammen, sondern sind merklich, vielleicht sogar sehr erheblich getrennt. Dabei liegt das 2_1 -Niveau sicher tiefer als das 2_2 -Niveau. Es müßte also in der Figur die 2_1 -Parabel etwas enger und tiefer, die 2_2 -Parabel dagegen höher und weiter gezeichnet werden. Dadurch kann die Unstimmigkeit der Berechnung des 2_1 -Terms wahrscheinlich behoben werden.

Beim Anblick der Resultate hat man den Eindruck, daß noch ein systematischer Gang in den Ungenauigkeiten steckt. Man kann den Grund dafür in verschiedener Richtung vermuten.

Einmal gingen in die Berechnung der Quantenzahlen n' die universellen Konstanten e , m , h in verschiedenen Kombinationen ein, die wohl kaum bis auf ein Prozent genau angesehen werden dürfen.

Sodann war die Form der in § 10 beschriebenen Interpolation noch willkürlich und man kann versuchen, eine geeignetere Gestalt von Q aufzufinden. Der Verfasser hat auch einige Rechnungen angestellt, um zu untersuchen, ob durch Höherlegen des Anfangsverlaufs und Senken der Kurve zwischen $R = 4$ und $R = 8$ die Genauigkeit erhöht würde. Es hat sich aber gezeigt, daß durch solche Änderungen

¹⁾ Phil. Mag. **43**, 1070, 1922.

²⁾ Vgl. zu dieser ganzen Frage die Arbeit von Grotrian, ZS. f. Phys. **8**, 116, 1921.

die Genauigkeit nur unwesentlich verbessert werden kann, wenn man nicht auf eine einheitliche Berechnung des ganzen Spektrums aus demselben Potentialverlauf verzichtet. Es ist deshalb auf die eingehende Durchrechnung verzichtet worden.

Wir haben dabei aber den zweiten Punkt berührt, der möglicherweise für die kleine Ungenauigkeit der Resultate heranzuziehen ist. In den grundlegenden Überlegungen haben wir als erwiesen angenommen, daß es in erster Annäherung möglich sein müsse, die Elektronenbewegung in den wirklichen Atomen als Zentralbewegung zu beschreiben, und innerhalb der erreichten Genauigkeit hat die Rechnung die Richtigkeit dieser Annahme erwiesen. Streng genommen geht aber aus dem Auswahlprinzip der Terme nur hervor, daß der Umlauf in jeder einzelnen Bahn kinematisch sich überlagern läßt aus einem periodischen Wachsen und Schwinden des Kernabstandes und einer gleichförmigen Rotation. Darin ist nicht notwendig enthalten, daß die Bewegung nur unter dem Einfluß einer Zentralkraft stattfindet. Vielmehr ist ein Wechselspiel der Elektronen denkbar, bei dem mit derselben Periode auch ein Austausch von Impulsmoment stattfindet. Rechnerisch ausgedrückt ist nicht bloß der Ansatz

$$\begin{aligned} p_r &= f(r) \\ p_\varphi &= \text{const} \end{aligned}$$

mit dem Auswahlprinzip vereinbar, sondern ebensogut

$$\begin{aligned} p_r &= f(r) \\ p_\varphi &= g(r), \end{aligned}$$

wobei allerdings f und g voneinander abhängig sind.

Versucht man sich ein solches Wechselspiel vorzustellen, so wird wegen des ungleichen Rhythmus, in dem verschiedene Bahnen durchlaufen werden, wahrscheinlich, daß die Funktionen g und f sich von Bahn zu Bahn etwas ändern. Es wäre weder die Konstanz des Impulsmoments streng gewahrt (was von geringerer Bedeutung ist), noch ließe sich der radiale Impuls für alle Bahnen durch ein und dieselbe Funktion des Kernabstands ausdrücken. In der Sprache unserer Rechnung gesagt, gäbe es nicht eine einzige Kurve Q , die zur einheitlichen Berechnung des gesamten Spektrums ausreichte. Die Möglichkeit hierfür muß immerhin in Betracht gezogen werden bei der Beurteilung der Resultate. Diese zeigen aber, daß man eine solche Erschwerung sehr weitgehend außer acht lassen kann.

Und schließlich geht aus der Komplexstruktur der Terme deutlich hervor, daß die Vorstellung einer ebenen Zentralbewegung nur eine Annäherung an die Wirklichkeit bedeuten kann.

Nach all dem ist bemerkenswerter, als die geringen unterhalb 3 Proz. bleibenden Abweichungen, die weitgehende Berechenbarkeit des Natriumspektrums aus einer so einfachen mechanischen Vorstellung, wie es die Zentralbewegung der Elektronen im Atom ist.

§ 12. Zusammenfassung. Es wird modellmäßig begründet und rechnerisch bestätigt, daß in Annäherung die Terme des Röntgen- und des optischen Spektrums aus Elektronenbewegungen in einem und demselben Zentralkraftfeld berechnet werden können. Ferner wird gezeigt, wie sich aus dem gesamten Spektrum eines Elements die Potentialkurve des Atomfeldes gewinnen läßt. Die Rechnung wird durchgeführt am Natriumspektrum, wodurch dessen Terme die Bedeutung von Bahnenergien eines berechenbaren mechanischen Systems gewinnen.

Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons.

Von **Erwin Schrödinger** in Zürich.

(Eingegangen am 5. Oktober 1922.)

In der Weylschen Weltgeometrie¹⁾ tritt außer der bekannten quadratischen Form der Differentiale, welche die Metrik in den einzelnen Weltpunkten bestimmt, noch eine Linearform auf

$$\varphi_0 dx_0 + \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3 = \varphi_i dx_i,$$

welche den metrischen Zusammenhang der Weltpunkte untereinander festlegt. Ihre geometrische Bedeutung ist die, daß die Maßzahl einer „Strecke“ l (Quadrat des Absolutbetrages eines Vektors) bei „kongruenter Verpflanzung“ der Strecke in einen Nachbarpunkt nicht ungeändert bleibt, sondern die Änderung

$$dl = -l \varphi_i dx_i \quad (1)$$

erleidet. Weyl hat entdeckt, daß durch beides zusammen (Metrik der einzelnen Weltpunkte + metrischen Zusammenhang) ein affiner Zusammenhang der Welt (d. h. der Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors) mitgegeben ist, wenn man nur verlangt, daß bei Parallelverschiebung eines Vektors seine Strecke auch kongruent verpflanzt werden soll. Bei kongruenter Verpflanzung einer Strecke entlang eines endlichen Stückes einer Weltlinie — z. B. bei Parallelverschiebung eines Vektors entlang eines solchen Stückes — multipliziert sich die Maßzahl der Strecke mit dem Faktor

$$e^{-\int \varphi_i dx_i}, \quad (2)$$

wobei das Linienintegral natürlich dem betreffenden Weltlinienstück entlang zu nehmen ist und wesentlich vom Wege abhängt, wofern die Größen

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad (3)$$

nicht identisch verschwinden. — Physikalisch bilden die Komponenten des oben erwähnten affinen Zusammenhangs das Gravitationsfeld, die f_{ik} das elektromagnetische Feld. Liegen die Verhältnisse so — und ist die Koordinatenwahl so getroffen —, daß in einem Weltgebiet wenigstens mit einer gewissen Annäherung x_0 die Zeit (in sec) und x_1, x_2, x_3 kartesische Koordinaten (in cm) sind, so sind die φ_i bis auf

¹⁾ Siehe etwa H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl. Berlin, Springer, 1921. — Unten mit Weyl, RZM zitiert.

einen universell konstanten Proportionalitätsfaktor die elektromagnetischen Potentiale im gewöhnlichen Sinne:

$$V, \quad -\frac{1}{c} \mathcal{A}_x, \quad -\frac{1}{c} \mathcal{A}_y, \quad -\frac{1}{c} \mathcal{A}_z. \quad (4)$$

Schreiben wir diesen Faktor $\gamma^{-1}e$, wo e das Elementarquantum in elektrostatischen CGS-Einheiten, also

$$\varphi_0 = \gamma^{-1}eV, \quad \varphi_1 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathcal{A}_x, \quad \varphi_2 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathcal{A}_y, \quad \varphi_3 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathcal{A}_z,$$

dann erhält, da φ_0 die Dimension sec^{-1} , eV die Dimension „Energie“ hat, γ die Dimension einer Wirkung ($\text{g cm}^2 \text{sec}^{-1}$). — Der „Streckenfaktor“ (2) wird

$$-\frac{e}{\gamma} \int (\mathcal{V} dt - \mathcal{A}_x dx - \mathcal{A}_y dy - \mathcal{A}_z dz). \quad (5)$$

Die in der Überschrift angekündigte, mir bemerkenswert scheinende Eigenschaft der Quantenbahnen ist nun die, daß die „echten“ Quantenbedingungen, d. h. diejenigen, welche zur Festlegung der Energie und damit des Spektrums hinreichen, auch gerade hinreichen, um den Exponenten des Streckenfaktors (5) zu einem ganzzahligen Vielfachen von $\gamma^{-1}h$ zu machen (welches nach obigem eine reine Zahl ist) für alle approximativen Perioden des Systems. Ich will dies zunächst für die einzelnen Fälle nachweisen, da doch noch einige Wenn und Aber daran zu knüpfen sind, wenn man den Satz in der einfachen Form ausspricht, wie soeben geschehen. Dann erst will ich die eventuelle Bedeutung der Tatsache diskutieren, womit ich übrigens — um es gleich zu gestehen — nicht sehr weit gekommen bin.

A. Ungestörte Keplerbahn¹⁾. Der Effekt der Relativität wird zunächst vernachlässigt und später (unter E.) getrennt besprochen. Dann ist die einzige „echte“ Quantenbedingung²⁾

$$J = 2\pi \bar{T} = nh \quad (6)$$

(τ = Periode, \bar{T} = Zeitmittel der kinetischen Energie).

Sei ferner V das Potential des positiven Kerns am Orte des Elektrons, so gezählt, daß es im Unendlichen verschwindet. Dann ist bekanntlich (wir rechnen e als absolute Zahl)

$$\bar{T} = \frac{1}{2} e V, \quad (6a)$$

¹⁾ Wie mir Herr Prof. Weyl brieflich mitteilt, war der Satz für diesen Fall Herrn Fokker schon vor zwei Jahren bekannt und hat auch ihn dazu geführt, die Möglichkeit rein imaginärer Werte der φ_i ins Auge zu fassen (s. u.).

²⁾ Wir folgen durchweg der Bohrschen Auffassung, insbesondere seiner Theorie der leicht gestörten periodischen Systeme, wie sie in Teil II der noch unvollendeten Abhandlungsreihe in der Kopenhagener Akademie niedergelegt ist. Kopenhagener Akademieschriften, Naturw. u. Mathem. Abt., 8. Reihe, IV, 1, 2, 1918. Im folgenden zitiert mit Bohr, l. c.

also, in (6) eingesetzt,

$$e\tau\bar{V} = e \int_0^{\tau} V dt = nh. \quad (7)$$

Der Exponent des Streckenfaktors (5) wird also $-\frac{nh}{\gamma}$ für eine Periode. — Das einzige „Wenn und Aber“ dieses einfachsten Falles ist die Normierung der additiven Konstanten in V .

B. Zeemaneffekt. Mechanisch tritt jetzt auf die Larmorpräzession mit der Frequenz (= Zahl der Präzessionsumläufe pro Sekunde)

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{eH}{4\pi mc}. \quad (8)$$

Quantentheoretisch bleibt zunächst die frühere Bedingung bestehen und sichert die „Ganzzahligkeit des Streckenexponenten“ (wie wir kurz sagen wollen) für die erste Quasiperiode τ , jedenfalls angenähert. Genauere Überlegung lehrt, daß (7) bis auf Glieder, die in H quadratisch sind, bestehen bleibt, weil das Larmortheorem in dieser Näherung gilt und für das gedrehte Achsenkreuz mechanisch und quantentheoretisch dieselben Beziehungen gelten, wie im Falle A für ein ruhendes. Wenn wir also jetzt untersuchen, ob auch für die zweite Quasiperiode ϑ Ganzzahligkeit besteht, können wir das V -Glieder beiseite lassen, denn es liefert sicher einen ganzzahligen Beitrag (nämlich so viel Mal $-nh$, als der Larmorzyklus einfache Umläufe umfaßt). — Nun verlangt die zweite Quantenbedingung bekanntlich, daß das Flächenmoment um die Feldachse

$$2m \frac{f}{\tau} = \frac{n'h}{2\pi}. \quad (9)$$

f ist die Projektion der Ellipsenfläche auf die Äquatorebene. Aus (8) und (9) kommt

$$Hf \cdot \frac{\vartheta}{\tau} \cdot \frac{e}{c} = n'h. \quad (10)$$

Hf ist der Kraftfluß durch die Ellipse, daher

$$Hf = \int (\text{rot } \mathfrak{H})_n df = \int_{(\tau)} \mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz, \quad (11)$$

also wird nach (10) für den ganzen Larmorzyklus

$$\frac{e}{c} \int_{(\vartheta)} \mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz = n'h; \quad (12)$$

die Zusatzquantenbedingung fordert also genau die „Ganzzahligkeit“ des magnetischen Zusatzterms im Streckenexponenten, erstreckt über eine Larmorperiode.

C. Starkeffekt¹⁾. Mechanisch tritt hier eine säkulare Variation nicht bloß der Lage, sondern auch der Gestalt der Keplerellipse auf; doch ist die säkulare Variation (mit der Näherung, die experimentell in Betracht kommt) rein periodisch, d. h. wenn die Keplerellipse nach Durchlaufen eines säkularen Zyklus wieder dieselbe Gestalt angenommen hat, hat sie auch wieder dieselbe Lage im Raum. Der Bahnzyklus läßt sich am einfachsten in der folgenden Weise beschreiben. Bestimmt man den Schwerpunkt der gewöhnlichen Keplerbahnkurve unter Rücksicht auf die Verweilzeit des Elektrons in den einzelnen Teilen der Bahn („elektrischer Schwerpunkt“), so findet man dafür den Halbierungspunkt der vom Kern abgelegenen Hälfte der Brennstrecke. Dieser „elektrische Schwerpunkt“ führt nun in einer zur Feldrichtung senkrechten Ebene einfach harmonische, im allgemeinen elliptische Schwingungen aus. Dabei muß sich, nach dem Gesagten, die Gestalt der Keplerellipse ändern, und zwar ändert sich nicht ihre große Halbachse (also auch nicht ihre Energie und Umlaufszeit), sondern nur ihre Exzentrizität, die sonach durch die jeweilige Lage des elektrischen Schwerpunkts eindeutig mitbestimmt ist. Die jeweilige Stellung der Bahnebene ist dadurch bestimmt, daß zwar der gesamte Drehimpuls mit der Exzentrizität variiert, die Komponente in der Feldrichtung aber ungeändert bleibt.

Die Zusatzquantenbedingung besteht darin, daß dem Abstand des Kerns von der erwähnten, zur Feldrichtung senkrechten Ebene, in welcher der elektrische Schwerpunkt seine säkularen harmonischen Schwingungen vollführt, nur gewisse diskrete Werte erlaubt sind. Noch bequemer für unsere Zwecke ist eine andere Formulierung dieser Zusatzquantenbedingung, die aus der Bohrschen Theorie gestörter periodischer Systeme noch unmittelbarer folgt. Die Zusatzenergie, welche einfach gleich ist der über eine Keplerperiode gemittelten potentiellen Energie des Elektrons im äußeren Feld (der Mittelwert ist säkular konstant) — diese Zusatzenergie, sage ich, steht nach Bohr zu der säkularen Periode ϑ in genau derselben Beziehung, wie die Gesamtenergie eines einfachen harmonischen Oszillators zu seiner Periode, d. h. es muß sein

$$\Delta E = n' h \cdot \frac{1}{\vartheta} \quad (13)$$

(ΔE = Zusatzenergie, n' = ganze Zahl). Sei nun V' das Potential des äußeren Feldes, welches bei dieser Überlegung (d. h. damit obige

¹⁾ Bohr, l. c., § 4, S. 69.

Behauptungen richtig seien) so normiert werden muß, daß es im Kern verschwindet, so erkennt man leicht, daß

$$\Delta E = -e \overline{V'} = -\frac{e}{\tau} \int_t^{t+\tau} V' dt. \quad (14)$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\frac{e \vartheta}{\tau} \int_t^{t+\tau} V' dt = e \int_t^{t+\vartheta} V' dt = -n' h. \quad (15)$$

Ein Blick auf (5) lehrt, daß damit die „Ganzzahligkeit“ des elektrischen Zusatzterms im Streckenexponenten bewiesen ist für eine säkulare „Starkperiode“ — in voller Analogie zu dem Resultat für die Larmorperiode beim Zeemaneffekt.

Beim Zeemaneffekt konnten wir nun wegen des besonders einfachen Charakters der säkularen Störung aus der Ganzzahligkeit des Zusatzterms sofort auf die Ganzzahligkeit des ganzen Streckenexponenten schließen. Hier wäre das voreilig, denn der Mittelwert des Kernpotentials V über eine Keplerellipse erleidet Störungen erster Ordnung, die sich während einer säkularen Periode ϑ zu einem endlichen Betrag aufsummieren können¹⁾. Um ganz sicher zu gehen, greifen wir auf die Hauptquantenbedingung des gestörten Problems in expliziter Form zurück. Seien q_1, q_2, q_3 die rechtwinkligen Koordinaten des Elektrons, p_1, p_2, p_3 die Impulse, so muß

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3) dt = n h \quad (16)$$

sein, wobei ϑ jetzt — schärfer — eine genaue Quasiperiode des Systems bezeichnet, nach welcher die Koordinaten und Impulse sich mit großer Annäherung reproduzieren. Infolgedessen muß sein

$$\int_t^{t+\vartheta} \frac{d}{dt} \left(\sum p_i q_i \right) dt = 0.$$

Daher kann man statt (16) auch schreiben

$$\int_t^{t+\vartheta} (q_1 \dot{p}_1 + q_2 \dot{p}_2 + q_3 \dot{p}_3) dt = -n h; \quad (16')$$

oder, wenn

$$U = -e(V + V')$$

¹⁾ Zwar hat Bohr gezeigt — und es folgt unmittelbar aus der säkularen Konstanz von $\overline{V'}$ —, daß der Mittelwert der gesamten Energiefunktion des ungestörten Problems über eine Keplerbahn nur Störungen zweiter Ordnung aufweist. Für uns hier handelt es sich aber um die potentielle Energie allein, und für diese läßt sich nichts schließen, weil das Störungsfeld die einfache Beziehung (6a) zwischen den beiden Energiemittelwerten aufhebt.

die potentielle Energie ist, so folgt wegen der Bewegungsgleichungen aus (16'):

$$\int_t^{t+\vartheta} \left(q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} + q_3 \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) dt = n h. \quad (16'')$$

Die zwei Summanden von U sind aber homogene Funktionen der q_i , und zwar ist V homogen vom -1^{ten} , V' homogen vom 1^{ten} Grade. Daher folgt aus (16'')

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V - V') dt = n h. \quad (16''')$$

Mit Rücksicht auf (15) folgt also

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V + V') dt = (n - 2n') h, \quad (17)$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. — Eine notwendige Zusatzbemerkung zu unserem Satz im Falle des Starkeffekts ist die schon oben hervorgehobene Normierung des Potentials des äußeren Feldes, derart, daß es im Kern verschwindet.

D. Kombiniertes Stark-Zeemaneffekt mit parallelen Achsen¹⁾. Nach der Bohrschen Theorie gestörter periodischer Systeme erhält man bei Superposition eines homogenen elektrischen und eines homogenen magnetischen Feldes, falls die Störungen, die jedes Feld für sich hervorbringen würde, von gleicher Größenordnung sind, wohldefinierte diskrete Quantenbahnen überhaupt nur dann²⁾, wenn die Feldachsen parallel sind. Wir beschränken uns daher auf diesen Fall. In mechanischer Hinsicht liegt einfach der im vorigen Abschnitt behandelte Starkeffektzyklus bezüglich eines die Larmordrehung (8) mitmachenden Achsenkreuzes vor, wobei zu beachten ist, daß die Larmorfrequenz nur von den Elektronenkonstanten und der magnetischen Feldstärke, dagegen nicht von der Gestalt und Lage der Bahn abhängt, so daß die Larmordrehung auch jetzt gleichförmig erfolgt. Auch die Quantenbedingungen superponieren sich sozusagen. Der großen Halbachse der Keplerellipse sind dieselben Werte erlaubt, wie beim ungestörten Atom, dem Kernabstand der Ebene, in welcher der elektrische Schwerpunkt schwingt, dieselben Werte, wie im reinen Starkeffekt; und das Magnetfeld verlangt, daß

¹⁾ Bohr, l. c., S. 91.

²⁾ Bohr, l. c., S. 93.

die Komponente des Drehimpulses in der Feldrichtung (die ja auch im reinen Starkeffekt konstant, aber nicht gequantelt war) nunmehr, wie im reinen Zeemaneffekt ein ganzzahliges Multiplum von $h, 2\pi$ sein muß. Die Gesamtstörung ist jetzt natürlich nicht mehr rein periodisch, sondern es treten zwei, im allgemeinen inkommensurable säkulare Perioden von gleicher Größenordnung auf: in einem die Larmorpräzession mitmachenden Koordinatensystem reproduzieren sich Gestalt und Lage der Keplerellipse nach einer Periode ϑ_s des Stark-effekts, während sich die Ellipse, die der elektrische Schwerpunkt harmonisch durchläuft, in einer Larmorperiode, sagen wir ϑ_l einmal um 360° um die Feldrichtung dreht. Da bezüglich des gedrehten Systems sowohl mechanisch wie quantentheoretisch genau dieselben Verhältnisse vorliegen, wie im reinen Starkeffekt bezüglich eines ruhenden, und da ferner das elektrische Feld durch die Larmordrehung in sich selbst übergeführt wird, so erkennt man leicht, daß die ersten zwei Quantenbedingungen zur Folge haben, daß

$$\int_t^{t+\vartheta_s} e(V+V') dt = nh. \quad (18)$$

Was die magnetische Quantenbedingung anlangt, so ist zu bedenken, daß sowohl die Keplerperiode als auch das Flächenmoment in der Feldrichtung, daher auch die Projektion der Keplerellipse auf die Äquatorebene oder der magnetische Kraftfluß durch die Keplerellipse säkular konstant sind. Daher folgt aus der magnetischen Quantenbedingung in ganz derselben Weise wie unter B, daß

$$\frac{e}{c} \int_{(\vartheta_l)} \mathcal{U}_x dx + \mathcal{U}_y dy + \mathcal{U}_z dz = n' h, \quad (19)$$

das Linienintegral erstreckt über einen Larmorzyklus. Daß die Keplerellipse nach einem solchen Zyklus keineswegs in ihre anfängliche Gestalt und Lage zurückkehrt, tut dabei gar nichts zur Sache.

Die Formeln (18) und (19) stellen jede nur einen Teil des Streckenexponenten dar, und zwar (18) den elektrischen, (19) den magnetischen Anteil. Sie beziehen sich überdies auf ganz verschiedene Zeiträume ϑ_s und ϑ_l , deren keiner eine Quasiperiode der Bewegung bildet. Eine solche kann nur und wird im allgemeinen mit einer gewissen Annäherung für mäßig hohe Multipla der Pseudoperioden ϑ_s und ϑ_l zustande kommen, die einander angenähert gleich sind, etwa

$$n_s \vartheta_s = n_l \vartheta_l = \vartheta.$$

Wählen wir hier n_s exakt ganzzahlig, n_l dagegen so, daß die vorstehende Beziehung exakt erfüllt ist, multiplizieren (18) mit n , (19) mit n_l und subtrahieren, so kommt

$$e \int_{(\vartheta)} \left\{ (V + V') dt - \frac{1}{c} (\mathfrak{U}_x dx + \mathfrak{U}_y dy + \mathfrak{U}_z dz) \right\} = (n_s n - n_l n') h. \quad (20)$$

Hier steht links (bis auf den Faktor $-\gamma^{-1}$) der ganze Streckenexponent für die Quasiperiode ϑ ; rechts steht ein ganzzahliges Vielfaches von h , ganzzahlig etwa mit derselben Annäherung, mit der ϑ als Quasiperiode angesprochen werden kann. Denn n' ist die gewöhnliche magnetische Quantenzahl, also, mindestens für die niederquantigen Bahnen, eine kleine ganze Zahl; die kleine Abweichung des n_l von der Ganzzahligkeit wird also durch Multiplikation mit n' nicht wesentlich vergrößert. (Nicht so n ; n ist eine sehr große Zahl von der Größenordnung der Zahl der Keplerumläufe während einer Starkperiode; das schadet aber nichts, denn n_s ist exakt ganzzahlig und mußte so gewählt werden, damit auch die Phase innerhalb der Keplerbahn sich reproduziere.) — Etwas unbefriedigend erscheint es zunächst, daß zur Ableitung von (20) nur eine gewisse Linearkombination der beiden „echten“ (d. h. zur Festlegung der Energiewerte notwendigen) Quantenbedingungen (18) und (19) herangezogen werden mußte. Dennoch scheint mir, daß (18) und (19) einzeln nötig sind zur Sicherstellung von (20) für jede Quasiperiode. Denn wenn z. B. $n_s = 7$, $n_l = 12$ eine Quasiperiode liefert, so wird im allgemeinen nicht $n_s = 70$, $n_l = 120$, sondern vielleicht $n_s = 69$, $n_l = 118$ eine andere, rund zehnmal so große liefern. Allerdings darf man bei solchen Überlegungen auch nicht allzu hohe Multipla der säkularen Perioden heranziehen, damit nicht quadratische Glieder in den Feldstärken ins Spiel kommen, wobei dann nicht etwa nur die Gültigkeit der hier verwendeten Näherungsrechnungen, sondern die wirkliche physikalische Definiertheit der Quantenbahnen eine Grenze findet.

E. Die relativistische Massenveränderlichkeit. Sie wurde bisher vernachlässigt, was in den Fällen B, C, D darauf hinauskommt, die Störung durch das äußere Feld als groß im Vergleich zu der durch die relativistische Massenveränderlichkeit verursachten „Störung“ der rein periodischen Keplerbahn vorauszusetzen. Ziehen wir diese jetzt in Rechnung, so hat schon das kräftefreie Atom zwei Quasiperioden, die kurze Keplerperiode τ und die Periode ϑ der Periheldrehung. Für τ wird die „Ganzzahligkeit des Streckenexponenten“ natürlich durch dieselbe Quantenbedingung gewährleistet wie im nicht-relativistischen Fall. Es fragt sich, ob sie auch für ϑ zutrifft. Be-

stimmt man ϑ — schärfer — als Quasiperiode, d. h. so, daß Koordinaten und Impulse sich sehr angenähert reproduzieren, so gilt zunächst in Polarkoordinaten

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}) dt = n'h \quad (21)$$

[r, φ sind Polarkoordinaten, p_r, p_φ die zugehörigen relativistischen Impulse; die Formel (21) ist eine ganzzahlige Linearkombination der gewöhnlichen „radialen“ und „azimutalen“ Quantenbedingungen, und zwar ist die Zahl der φ -Umläufe genau um 1 größer als die der r -Schwingungen]. Der Integrand ist gegen Punkttransformationen invariant, also gilt auch in rechtwinkligen Koordinaten

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_x \dot{x} + p_y \dot{y}) dt = n'h. \quad (21')$$

Hierfür darf man, da $(x p_x + y p_y)$ zu seinem Ausgangswert zurückkehrt, schreiben

$$\int_t^{t+\vartheta} (x \dot{p}_x + y \dot{p}_y) dt = -n'h, \quad (21'')$$

\dot{p}_x, \dot{p}_y sind auch in der Relativmechanik den negativen partiellen Derivierten der potentiellen Energie gleich; diese ist $-eV$ und in x, y homogen vom -1^{ten} Grade. Daher folgt aus (21'')

$$\int_t^{t+\vartheta} e V dt = n'h. \quad (21''')$$

Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes für die ungestörte relativistische Bahn erwiesen.

Der Zeemaneffekt mit Relativistik¹⁾ ist bekanntlich sehr einfach, es gerät einfach die relativistische Rosette in Larmordrehung. Es treten also zwei säkulare Perioden auf, wie in dem unter D behandelten Fall zweier paralleler Felder. Die Behandlung ist der dort gegebenen so völlig analog, daß sie sich wohl erübrigt — sie kann ohne Rechnung überblickt werden und führt natürlich wieder zur Bestätigung unseres Satzes.

Den Starkeffekt mit Relativität, den Kramers²⁾ vor einiger Zeit in einer sehr schönen Arbeit untersucht hat, habe ich noch nicht nach dem hier verfolgten Gesichtspunkt geprüft — doch ist wohl nicht zu zweifeln, daß ganz ähnliche Verhältnisse vorliegen, wie im Falle D und beim Zeemaneffekt.

¹⁾ Erstmalig behandelt von A. Sommerfeld, Phys. ZS. 17, 491, 1916 und P. Debye, ebenda, S. 507.

²⁾ ZS. f. Phys. 3, 199, 1920.

Der Fall D mit Relativität ist meines Wissens noch nicht untersucht, obwohl er (wegen seiner Rotationssymmetrie) zu wohl-definierten Quantenbahnen führen muß. Er bietet aber wohl geringeres Interesse.

Diskussion des Resultats.

Zusammenfassend haben wir folgenden Sachverhalt. Würde das Elektron auf seiner Bahn eine „Strecke“ mitführen, die sich bei der Bewegung ungeändert verpflanzt, so würde, wenn man von einem beliebigen Punkt der Bahn ausgeht, die Maßzahl dieser Strecke stets mit einer sehr angenähert ganzzahligen Potenz von

$$\frac{\hbar}{e^2} \quad (22)$$

multipliziert erscheinen, so oft das Elektron sehr angenähert an den Ausgangsort und zugleich in den anfänglichen Bewegungszustand zurückkehrt.

Es fällt schwer, zu glauben, daß dieses Resultat lediglich eine zufällige mathematische Konsequenz der Quantenbedingungen und ohne tiefere physikalische Bedeutung sei. Die etwas unpräzise Form des Näherungsgesetzes, in der es uns entgegentritt, ändert daran gar nichts; wissen wir doch, daß die Quantenbahnen physikalisch überhaupt nicht mit voller Schärfe definiert sind¹⁾ aus zwei Gründen: erstens wegen der Reaktionskraft der Strahlung, die zwar sicherlich nicht in der von der klassischen Elektrodynamik geforderten Form existiert, der aber ebenso sicher quantentheoretisch ein Etwas von gleicher Größenordnung entspricht, sonst könnte sich die Abklingungszeit nicht richtig aus dem Korrespondenzprinzip berechnen lassen²⁾. Zweitens entspringt eine Unschärfe der Quantenbahnen aber auch daraus, daß die Bewegung in den meisten Fällen überhaupt nur mit einer gewissen Annäherung bedingt periodisch ist. [Z. B. müssen im Zeemaneffekt die in der Feldstärke quadratischen Glieder wohl prinzipiell vernachlässigt werden; und auch der Starkeffekt gehört, wenn man die Relativitätskorrektur berücksichtigt, nicht mehr zu den in Strenge separierbaren Problemen³⁾.]

Ob das Elektron nun wirklich bei seiner Bewegung irgendwelche „Strecke“ mitführt, ist mehr als fraglich. Es ist sehr wohl möglich, daß es sich bei seiner Bewegung fortwährend im Weylschen Sinne „einstellt“⁴⁾. Es kann sein, daß die Bedeutung unseres Satzes darin

¹⁾ Bohr, l. c., S. 50, 61, 66, 97.

²⁾ A. Sommerfeld u. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **10**, 393, 1922.

³⁾ H. A. Kramers, ZS. f. Phys. **5**, 201, 1920.

⁴⁾ Weyl, RZM, S. 280.

zu suchen ist, daß dem Elektron nicht jedes Tempo der Einstellung gleich möglich ist, daß diese vielmehr in einer gewissen Abhängigkeit von den quasiperiodischen Bahnzykeln erfolgen muß.

Man fühlt sich versucht, zu raten, welchen Wert die universelle Konstante γ wohl haben mag. Wohlvertraut sind uns zwei universelle Konstante von der Dimension einer Wirkung, nämlich h und $\frac{e^2}{c}$ (ich für meinen Teil bin überzeugt, daß sie voneinander nicht unabhängig sind). Wäre $\gamma \simeq \frac{e^2}{c}$, so wäre der universelle Faktor (22) eine sehr große Zahl¹⁾ von der Ordnung e^{1000} . Die andere Möglichkeit, $\gamma \simeq h$, legt den Gedanken nahe, ob für γ nicht der rein imaginäre Wert

$$\gamma = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$$

denkbar ist, wo dann der universelle Faktor (22) der Einheit gleich würde und die Maßzahl einer mitgeführten Strecke sich nach jeder Quasiperiode reproduzieren würde. — Ich wage nicht zu entscheiden, ob dergleichen im Rahmen der Weylschen Weltgeometrie sinnvoll sein könnte.

Übrigens ist natürlich zu bedenken, daß e , h , c nicht die einzigen universellen Konstanten sind, die wir kennen. Zieht man die (gewöhnliche) Gravitationskonstante k und irgend eine universelle Masse, z. B. die Elektronenmasse, heran, so ist

$$\frac{e^2}{km^2} = \text{reine Zahl} \simeq 10^{+40\ 2)}.$$

Daher ist

$$\frac{he^2}{km^2}$$

ein „universelles Wirkungsquantum“ von der Größenordnung 10^{+18} ergsec. — Wir wollen damit aber nur erinnern, daß sich aus Dimensionsbetrachtungen allein in dieser Sache eben nichts ausmachen läßt.

Arosa, 3. Oktober 1922.

1) $\frac{2\pi e^2}{hc}$ ist die sogenannte Feinstrukturkonstante und gleich $7,29 \times 10^{-3}$.

2) Siehe auch Weyl, RZM, S. 238.

Molekulare Dimensionen, Molekülbau und innere Reibung der Halogene und ihrer Hydride.

Von **Harry Schmidt** in Altona.

(Eingegangen am 10. Oktober 1922.)

Faßt man die Atome als undurchdringliche, kugelförmige Hüllen von bestimmtem Radius auf, so läßt sich der mittlere Querschnitt eines Moleküls als Funktion der Radien seiner Atome berechnen, indem man den Mittelwert der Flächeninhalte der Projektionen ermittelt, die das betreffende Molekülmodell auf eine feste Ebene bei allen möglichen räumlichen Orientierungen liefert. Da bei gasförmigen Stoffen die innere Reibung Anhaltspunkte für die Größe des mittleren Molekülquerschnitts gibt, liegt der Versuch nahe, aus den Daten der inneren Reibung Aufschlüsse über die Größe der Atome und den Bau von Molekülen zu erlangen. Wie vor einiger Zeit gezeigt¹⁾ wurde, führt die einfache Vorstellung, daß die Moleküle im Gaszustand Aggregate sich unmittelbar berührender kugelförmiger Atome sind, auf rechnerischem Wege zu mittleren Molekülquerschnitten, die sich bei einer größeren Anzahl von Gasen mit den entsprechenden, aus den Reibungsdaten sich ergebenden Querschnitten in guter Übereinstimmung befinden. Allein in zweifacher Hinsicht erschien eine Verfeinerung des in jener früheren Mitteilung benutzten Verfahrens wünschenswert. Einmal nämlich war eine exakte Berechnung des mittleren Querschnitts der einzelnen Molekülmodelle an Stelle der ziemlich willkür unterworfenen Mittelwertbildung aus drei abgerundet genommenen Hauptquerschnitten anzustreben; andererseits waren für die Ermittlung des Molekülquerschnitts aus den Daten der inneren Reibung die von Chapman²⁾ erhaltenen Ergebnisse zu berücksichtigen. Dabei ergab sich, daß das zuvor erwähnte Resultat der früheren Mitteilung in seiner Allgemeinheit nicht aufrecht erhalten werden kann, sondern gewissen Einschränkungen unterliegt, die mit den neueren Anschauungen über den Zusammenschluß der Atome zu Molekülen qualitativ und quantitativ in gutem Einklang stehen. Man darf somit tatsächlich hoffen, daß der genannte Weg beim Vorhandensein zuverlässiger Reibungsdaten für gewisse Fragen des Molekülbaus sich als nützlich erweisen wird. Die vorliegende Mitteilung behandelt zunächst die Halogene und ihre Hydride; über

¹⁾ H. Schmidt, ZS. f. Elektrochem. **28**, 50, 1922.

²⁾ S. Chapman, Phil. Trans. (A) **216**, 279, 1915.

die Verhältnisse bei einigen anderen Verbindungen soll demnächst berichtet werden.

Bezeichnet man den Radius eines als kugelförmig gedachten Gasmoleküls mit r , so ist nach Chapman¹⁾

$$r^2 \pi = \frac{0,491 \cdot (1 + \varepsilon_a) \cdot \varrho \cdot V}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \nu \cdot \eta_T \cdot \left(1 + \frac{C}{T}\right)}, \quad (1)$$

wobei ϱ die Dichte des Gases, V die mittlere molekulare Geschwindigkeit, ν die Anzahl der Moleküle pro ccm, η_T den Koeffizienten der inneren Reibung bei der absoluten Temperatur T , sowie C die Sutherlandsche Konstante bedeuten, und der Ausdruck $(1 + \varepsilon_a)$, der von C/T abhängig ist, praktisch gleich Eins gesetzt werden kann. Die Dichte ϱ läßt sich aus dem Molekulargewicht M berechnen; da die Dichte des Sauerstoffs $1,429 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$ beträgt, wird

$$\varrho = \frac{1,429 \cdot M}{32} \cdot 10^{-3}.$$

Ferner ist, falls mit p_0 der normale Atmosphärendruck bezeichnet wird,

$$V = 2 \sqrt{\frac{2 p_0 T}{\pi \cdot \varrho \cdot 273}},$$

und wenn man für ν den von Millikan²⁾ angegebenen Wert $2,705 \cdot 10^{19}$ benutzt, so ergibt sich für den mittleren Querschnitt Q_m eines beliebig gestalteten Gasmoleküls die Beziehung

$$Q_m = \frac{T \cdot \sqrt{T \cdot M}}{\eta_T \cdot (T + C)} \cdot 2,085 \cdot 10^{-21}. \quad (1a)$$

Betrachten wir nun ein aus zwei sich unmittelbar berührenden Atomen mit den Radien r_1 und r_2 bestehendes Molekül, wobei $r_1 > r_2$ sei, so ist sein mittlerer Querschnitt q_m durch die Beziehung

$$q_m = \int_{r_1 - r_2}^{r_1 + r_2} F_x \cdot w(x) + \int_0^{r_1 - r_2} r_1^2 \pi \cdot w(x)$$

gegeben, wobei

$$F_x = r_1^2 \pi + r_2^2 \pi - 2 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - y^2} dy - 2 \int_{x_2}^{r_2} \sqrt{r_2^2 - y^2} dy$$

mit

$$x_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x^2}{2x}; \quad x_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + x^2}{2x}$$

¹⁾ Die Originalarbeit Chapmans war mir bisher nicht zugänglich; Gl. (1) wurde einer Arbeit von A. O. Rankine und C. J. Smith (Phil. Mag. **42**, 601, 1921) entnommen.

²⁾ Phil. Mag. **34**, 1, 1917.

ist, und mit $w(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet wird, daß der Zentralabstand der als Projektion des Moleküls sich ergebenden beiden Kreise zwischen x und $x + dx$ liegt. Mit

$$w(x) = \frac{x dx}{(r_1 + r_2) \cdot \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}}$$

ergibt die Ausführung der Integration:

$$q_m = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} (r_1^3 + r_2^3) + (r_1^3 - r_2^3) \cdot \arcsin \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \\ & + 2(r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2} - \frac{8 r_1 r_2 \sqrt{r_1 r_2}}{3(r_1 + r_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

woraus für $r_1 = r_2 = r$

$$q_m = r^3 \left(\pi + \frac{8}{3} \right) \quad (3)$$

folgt.

Mit Hilfe der Chapmanschen Formel hat A. O. Rankine¹⁾ aus seinen Reibungsmessungen²⁾ die mittleren Molekülquerschnitte der Halogene Chlor, Brom und Jod berechnet; die von ihm ermittelten Werte sind in der zweiten Spalte der Tabelle 1 enthalten. Unter

Tabelle 1.

	q_m	r	r^3
Chlor	$1,07 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^3$	$1,357 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$	$1,402 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Brom	$1,28 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^3$	$1,485 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$	$1,497 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Jod	$1,56 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^3$	$1,639 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$	$1,664 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

der Voraussetzung, daß das Halogenmolekül aus zwei sich berührenden Halogenatomen besteht, lassen sich gemäß Gl. (3) die Radien r der Halogenatome berechnen; sie sind in der dritten Spalte der Tabelle 1 verzeichnet. Nimmt man dann ferner an, daß ein Halogenhydridmolekül aus einem Halogen- und einem Wasserstoffatom besteht, die sich unmittelbar berühren, und nimmt man als Radius des Wasserstoffatoms den aus der Bohrschen Theorie sich ergebenden Wert

$$r_H = 0,532 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

so erhält man gemäß Gl. (2) als mittlere Molekülquerschnitte q_m der Halogenhydride die in der sechsten Spalte der Tabelle 2 angeführten Werte, während sich aus den von H. Harle³⁾ gemessenen, in der zweiten bis vierten Spalte der Tabelle 2 wiedergegebenen Reibungs-

¹⁾ A. O. Rankine Proc. Roy. Soc. **98**, 360, 1921.

²⁾ A. O. Rankine, Proc. Roy. Soc. **86**, 162, 1911; **88**, 575, 1913; **91**, 201, 1915.

³⁾ H. Harle, Proc. Roy. Soc. **100**, 429, 1922.

daten die in der fünften Spalte der Tabelle 2 verzeichneten Querschnitte berechnen. Die Übereinstimmung der q_m und der Q_m ist befriedigend; genaue Übereinstimmung wird mit den in der vierten Spalte der Tabelle 1 zusammengestellten Radien r' der Halogenatome erhalten.

Tabelle 2.

	$\eta_0 \cdot 10^4$	$\eta_{100} \cdot 10^4$	C	Q_m	q_m
HCl . .	1,332	1,837	357	$0,676 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$	$0,639 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$
HBr . .	1,710	2,365	375	$0,763 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$	$0,752 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$
HJ . .	1,731	2,403	390	$0,926 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$	$0,900 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$

Für Wasserstoff hat kürzlich Kia-Lok Yen¹⁾ den Koeffizienten der inneren Reibung bei 23° C zu $882,16 \cdot 10^{-7}$ gemessen; setzt man für C den von H. Markowski²⁾ angegebenen Wert 83 ein, so berechnet sich aus der Chapmanschen Formel

$$Q_m = 0,451 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2,$$

während für ein aus zwei sich berührenden Wasserstoffatomen bestehendes Gebilde gemäß Gl. (3)

$$q_m = 0,164 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$$

wird. Der für die Größe der inneren Reibung maßgebende Querschnitt des Wasserstoffmoleküls ist also erheblich größer als der mittlere Querschnitt des genannten Gebildes, was ja auch nach allem bisher Bekannten als sehr wahrscheinlich anzusehen ist.

Sind unsere Überlegungen und die ihnen zugrunde gelegten Reibungsdaten zuverlässig, so unterscheiden sich also die Halogenmoleküle bezüglich ihrer Größe und Gestalt nur unwesentlich von zwei sich unmittelbar berührenden Halogenatomen.

¹⁾ Kia-Lok Yen, Phil. Mag. **38**, 582, 1919.

²⁾ H. Markowski, Ann. d. Phys. **14**, 742, 1904.

Eine neue Theorie des Sehens.

Von **Fritz Schanz** in Dresden.

(Eingegangen am 15. Oktober 1922.)

Über die physiologischen Vorgänge, die dem Sehakt zugrunde liegen, sind trotz eifrigsten Studiums die Ansichten noch recht verschieden. Man sieht dies am besten an dem Streit über das Sehen der Farben. Zwei Theorien stehen sich da auch jetzt noch unvermittelt gegenüber. Auf der letzten Naturforscherversammlung ist dies wieder recht deutlich zum Ausdruck gekommen bei dem Vortrag von v. Hess über die Lehre vom Farbensehen. Von der Tatsache ausgehend, daß jede Farbenempfindung auf drei Grundfarben zurückgeführt werden kann, wird von Helmholtz angenommen, daß drei Grundempfindungen: Rot, Grün, Violett in der Netzhaut vorhanden sind, die je nach der Stärke ihrer gleichzeitig auftretenden Reizung die Farbenempfindung vermitteln. Der Nachweis der verschiedenen Nervengruppen läßt aber auch heute noch auf sich warten. Hering nimmt drei Sehsubstanzen an, durch deren Veränderungen die Grundempfindungen ausgelöst werden sollen, und zwar soll beim Aufbau (Assimilation) eine Empfindung erregt werden, die zu der beim Abbau (Dissimilation) auftretenden komplementär ist. Auch diese Sehsubstanzen haben sich bisher nicht feststellen lassen. Der Sehpurpur findet sich nur in den Stäbchen, er ist nicht identisch mit einer der Sehsubstanzen, wie sie die Heringsche Theorie erfordert. Solange dieser Kampf auch schon dauert, so leidenschaftlich er geführt worden ist, es hat keine dieser Theorien sich durchzusetzen vermocht. Es dürfte daher berechtigt sein, nach einer neuen zu suchen. Im letzten Jahrzehnt haben sich unsere Anschauungen über das Wesen des Lichtes wesentlich geändert, wir haben Einblick erhalten in die Wirkungen des Lichtes auf die Stoffe, von denen es absorbiert wird. Diese Veränderungen sind zweierlei Art, thermische und chemische. Die thermischen bestehen darin, daß die Schwingungen der Moleküle erhöht werden, bei den chemischen Veränderungen vermag das Licht in die Moleküle einzudringen und deren Struktur zu verändern. Bei den chemischen Veränderungen werden aus den Molekülen Elektronen herausgeschleudert. Dabei fällt ein Teil der Elektronen wieder auf das Molekül zurück. Dadurch, daß er sich an einer anderen Stelle wieder anlegt, entstehen Umlagerungen im Molekül. Ein Teil legt sich an Moleküle der Nachbarschaft an und erzeugt dort Ver-

änderungen. So entstehen mit der Zeit Veränderungen an den belichteten Stoffen. Die Elektronen besitzen nur eine sehr kleine Masse, und so kommt es, daß sich diese Veränderungen bei vielen Stoffen noch unserer Beobachtung entziehen. In der Natur sind mit diesen Vorgängen Oxydationsvorgänge verknüpft, die uns die direkten Lichtwirkungen häufig verdecken.

Bei lichtbiologischen Vorgängen handelt es sich stets um chemische Wirkungen des Lichts, die thermischen Wirkungen machen sich dabei nur insofern bemerkbar, als sie die chemischen Vorgänge beschleunigen. Um die Wirkungen des Lichtes auf die lebende Substanz zu prüfen, habe ich mir Lösungen von Linseneiweiß hergestellt und an diesen die Wirkungen des Lichtes geprüft. Linseneiweiß hatte ich gewählt, weil ich als Augenarzt die Wirkungen des Lichtes auf die Augenlinse prüfen wollte. In der Augenlinse bilden sich bei allen Menschen im Laufe des Lebens auf Kosten der leichtlöslichen Eiweißkörper schwerer lösliche. Ich vermutete, daß diese Umwandlung der Eiweißkörper durch das Licht veranlaßt wird, das die Augenlinse absorbiert. In der Linse bildet sich ein harter Kern, der immer größer wird. Im Alter von 40 bis 50 Jahren macht sich dieser Prozeß an allen Augen bemerkbar. Die Linse verliert ihre Akkommodationsfähigkeit, wir werden weitsichtig, im späteren Leben führt der Prozeß dann zur Bildung des Altersstars.

Um diese Anschauung experimentell zu stützen, habe ich folgende Versuche¹⁾ ausgeführt: Linseneiweißlösungen wurden gleichmäßig in Reagenzröhrchen aus Quarzglas verteilt und verschieden lange dem Licht ausgesetzt. Am Ende des Versuches wurde in allen Röhrchen den Eiweißlösungen gleichmäßig, langsam ansteigend gesättigte Ammoniumsulfatlösung zugesetzt. Dabei zeigte sich, daß in den Lösungen mit der Dauer der Belichtung die durch Ammoniumsulfat ausflockbare Substanz deutlich zugenommen hatte. Durch weitere Versuche habe ich dann noch festgestellt, daß diese Veränderungen nur von den besonders kurzwelligen Strahlen erzeugt werden, die von den Eiweißlösungen absorbiert werden, und die an ihnen die Fluoreszenz erzeugen. Ich habe dann Eiereiweiß- und Serumeiweißlösungen auf dieselbe Weise geprüft und gefunden, daß sich auch an diesen ganz gesetzmäßig dieselben Veränderungen erzeugen lassen. Es ist daher wohl anzunehmen, daß das Licht auf alle Eiweißkörper in

¹⁾ Schanz, Wirkungen des Lichts auf die lebende Substanz. Pflügers Arch. f. Physiol., 161, 384, 1915, u. Schanz, Lichtreaktion der Eiweißkörper, ebenda 164, 1916.

gleicher Weise wirkt. Die lebende Substanz, das Plasma der Zelle, besteht im wesentlichen aus Eiweiß, wir sind deshalb zur Annahme berechtigt, daß das Licht darauf in gleicher Weise wirkt.

In der Natur sehen wir aber, daß auch langwelliges Licht biologisch wirksam wird. Die Wirkung dieses Lichtes ist aber geknüpft an die Gegenwart von Sensibilisatoren. Sensibilisatoren sind Farbstoffe, die mit den Eiweißkörpern innige Verbindungen bilden. Es werden dann die Strahlen wirksam, die zu der Farbe des Sensibilisators komplementär sind. Diese Vorgänge der optischen Sensibilisation, die ich am leblosen Eiweiß untersucht habe, sind an lebenden Organismen, an organischen und anorganischen Stoffen schon länger studiert. In der einfachsten Form finden wir diesen Vorgang beim Becquerel-Effekt. Werden zwei sonst ganz gleiche Metallplatten leitend verbunden und in eine Elektrolytflüssigkeit getaucht, so entsteht ein elektrischer Strom, wenn man die eine Platte belichtet, während man die andere dunkel hält. Der elektrische Strom wird wesentlich verstärkt, wenn man der Flüssigkeit einen Farbstoff zusetzt. Besonders eingehend ist die Sensibilisation in der Photographie studiert, man hat gelernt, damit die photographische Platte für Strahlen empfindlich zu machen, die sonst nicht auf sie einwirken. An lebenden Organismen wurden sie besonders eingehend studiert von v. Tappeiner und seinen Schülern. Von der Amöbe bis herauf zum Menschen läßt sich jeder Organismus für Licht sensibilisieren. Auf der letzten Naturforscherversammlung habe ich gezeigt, daß dies auch bei den Pflanzen möglich ist¹⁾.

Mir lag daran, die physikalischen Vorgänge bei der Sensibilisation klarzustellen. Zu diesem Zweck habe ich besondere Versuche²⁾ ausgeführt. In der Physik beschäftigt man sich jetzt viel mit dem Studium der lichtelektrischen Zerstreuung, mit dem sogenannten Hallwachs-Effekt. Hallwachs hat zuerst gefunden, daß die besonders kurzwelligen Strahlen aus den belichteten Stoffen Elektronen herausschleudern, die man auffangen und messen kann. Um zu sehen, ob solche Veränderungen auch bei biologischen Prozessen in Frage kommen, habe ich Eiweißlösungen auf ihre lichtelektrische Zerstreuung geprüft. Dabei hat sich gezeigt, daß sich auch an diesen dieselbe Erscheinung finden läßt, wie sie Hallwachs zuerst an anorganischen

¹⁾ Schanz, Erscheinungen der optischen Sensibilisation. Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft 1922.

²⁾ Schanz, Die physikalischen Vorgänge bei der optischen Sensibilisation. Pflügers Arch. f. Physiol. 190, 311, 1921.

Stoffen gefunden. Um festzustellen, wie die Sensibilisatoren diesen Prozeß beeinflussen, habe ich auch diese auf ihre lichtelektrische Zerstreuung geprüft. Sie zeigen diese Erscheinung in besonders intensiver Weise. Es galt nun festzustellen, wie die lichtelektrische Zerstreuung der Sensibilisatoren die Eiweißlösung beeinflusst. Zu diesem Zweck wurde zunächst die lichtelektrische Zerstreuung einer Sensibilisatorlösung festgestellt, dann wurde sie in gleicher Weise mit destilliertem Wasser und mit dialysierter Eiweißlösung verdünnt. Die verdünnten Lösungen wurden dann ebenso geprüft. Dabei zeigte sich, daß in der mit Eiweiß verdünnten Lösung die lichtelektrische Zerstreuung in viel stärkerem Maße abgenommen hatte als bei der Verdünnung mit Wasser. Zur Erklärung dieser Erscheinung muß angenommen werden, daß die aus dem Sensibilisator herausgeschleuderten Elektronen von den Eiweißmolekülen aufgefangen werden und an diesen die Veränderungen erzeugen, die ich bei den eingangs erwähnten Versuchen mit Licht an den Eiweißlösungen erzeugt hatte.

Mit diesen Versuchen scheint mit klargestellt, wie die Sonne als Motor eingreift in das Triebwerk alles irdischen Lebens. Wir kennen jetzt den Gang dieses Triebwerkes und vermögen ihn durch Sensibilisation künstlich zu beeinflussen.

Wenn diese Anschauungen über die elementaren Wirkungen des Lichtes richtig sind, so muß auch dem Sehakt derselbe Vorgang zugrunde liegen. Das Licht kann nur da wirken, wo es absorbiert wird. Wir haben bis jetzt die Zapfen und Stäbchen für die lichtempfindlichen Elemente der Netzhaut gehalten, das ist ausgeschlossen, denn diese vermögen nicht die sichtbaren Lichtstrahlen gleichmäßig zu absorbieren. Absorbiert werden sie aber von dem Pigment im Pigmentepithel der Netzhaut. Wir sind zu der Annahme berechtigt, daß von dem Licht, das im Pigmentepithel absorbiert wird, ebenso wie aus den zahlreichen Pigmenten, die darauf untersucht sind, Elektronen herausgeschleudert werden. Die Zapfen und Stäbchen der Netzhaut wirken dann wie das Drahtnetz, mit dem man bei der Prüfung der lichtelektrischen Zerstreuung die Elektronen auffängt. Dem Licht verschiedener Wellenlänge entsprechen Elektronen verschiedener Geschwindigkeit. Da, wo die Elektronen in den Zapfen und Stäbchen auftreffen, erzeugen sie einen elektrischen Strom, der die Erregung durch die Netzhaut und den Sehnerven bis zum Zentralorgan weiterleitet. Dieser Aktionsstrom ist identisch mit dem elektrischen Strom, der bei der Prüfung der lichtelektrischen Zerstreuung im Drahtnetz entsteht. Die Identität dieser beiden elektrischen Ströme ergibt sich daraus, daß sie gleiche Eigentümlichkeiten zeigen. Von

Brossa und Kohlrausch¹⁾ ist festgestellt, daß der Aktionsstrom des Sehnerven bei Belichtungen mit monochromatischem Licht für die verschiedenen Wellenlängen des auslösenden Lichtes charakteristisch ist. Die Eigentümlichkeit besteht vor allem darin, daß die Erstenergie um so größer ist, je kurzwelliger das Licht ist. Der erste Anstieg der Aktionsstromkurve ist daher bei kurzwelligem Licht steiler als bei langwelligem. Dasselbe hat E. Ladenburg²⁾ bei der Prüfung des elektrischen Stromes festgestellt, als er Metalle mit monochromatischem Licht auf ihre lichtelektrische Zerstreuung prüfte.

Damit wäre es gelungen, den Sehakt ohne jede vitalistische Hypothese auf bekannte physikalische Vorgänge zurückzuführen. Es wäre nun zu prüfen, ob damit sich auch die physiologischen und klinischen Erscheinungen besser erklären lassen als an der Hand der jetzt geltenden Theorien. Gegen meine Theorie könnte man den Einwand erheben: Wie erklärt sich dabei das Sehen der Albinos? Diesen Einwand habe ich mir selbst gemacht. Ich habe die Literatur darüber durchgesehen und war freudig überrascht, als ich sah, daß die Befunde an albinotischen Augen nicht gegen, sondern für meine Anschauung sprechen. In allen albinotischen Augen, die darauf untersucht sind, fand sich im Pigmentepithel ausnahmslos Pigment, auch wenn die übrigen Augenteile und der ganze übrige Organismus völlig pigmentfrei waren. In meinem Vortrag „über das Sehen“, den ich im August 1921 in der gemeinsamen Sitzung der Wiener und der Deutschen Ophthalmologischen Gesellschaft³⁾ gehalten habe, habe ich die Literatur darüber ausführlich mitgeteilt.

Auch die Verhältnisse bei der Netzhautablösung stützen meine Ansicht. Dabei sehen wir fast regelmäßig, daß das Pigmentepithel von der übrigen Netzhaut abgetrennt wird und an der Aderhaut haftet. An der abgehobenen Stelle verliert die Netzhaut meist vollständig ihre Erregbarkeit. Legt sich die Netzhaut wieder an, so stellt sich sofort die Erregbarkeit wieder her. Bei flachen Abhebungen ist die Erregbarkeit zuweilen nicht ganz erloschen. In diesen Fällen vermögen aus dem Pigmentepithel herausgeschleuderte Elektronen noch die Zapfen und Stäbchen zu erreichen und eine stumpfe Lichtempfindung zu veranlassen. Zuweilen sehen wir mit dem Wechsel der Körperhaltung die Erregbarkeit solcher abgehobenen Partien wechseln. Mit dem Wechsel der Körperhaltung verschiebt sich die

¹⁾ Brossa u. Kohlrausch, Arch. f. Anat. u. Physiol., physiol. Abt. 1910 und 1913.

²⁾ E. Ladenburg, Phys. ZS. 8, 590, 1904.

³⁾ Münch. mediz. Wochenschr. 43, 1921.

Flüssigkeitsschicht unter der abgehobenen Partie, damit ändert sich ihre Entfernung vom Pigmentblatt und ihre Erregbarkeit. Zur Erklärung dieser Erscheinungen hat man angenommen, daß die Regeneration der Sehstoffe vom Pigmentepithel her erfolgt. Die Sehstoffe sind noch immer hypothetische Körper, sie reichen nicht aus, um die Vorgänge beim Sehakt zu erklären. Elektronen sind es, die das Licht aus dem Pigment der Netzhaut herausschleudert, und die die Erregung in den Zapfen und Stäbchen erzeugen.

Wie läßt sich an der Hand dieser Theorie das Sehen der Farben erklären?

Dem Licht verschiedener Wellenlänge entsprechen Elektronen verschiedener Geschwindigkeit. So entsteht die Wahrnehmung der reinen Farben, wie wir sie im Spektrum sehen. In der Natur sehen wir fast nie reine Farben. Unsere Umwelt erscheint uns in Farbungemischen, und es gibt zahlreiche Farbungemische, die unser Auge nicht von den reinen Spektralfarben zu unterscheiden vermag. Das Ohr ist imstande, Tongemische aufzulösen, dem Auge fehlt die Fähigkeit, Farbungemische in gleicher Weise zu analysieren. Wie läßt sich dies erklären?

Wenn Farbungemische auf unser Auge wirken, so werden gleichzeitig Elektronen mit verschiedener Geschwindigkeit aus dem Pigmentepithel herausgeschleudert. Solche Farbungemische können im Zentralorgan denselben Eindruck erzeugen wie die reinen Farben, die von Elektronen einer Geschwindigkeit ausgelöst werden. Zur Erklärung dieser Erscheinung müssen wir annehmen, daß die Elektronen auf ihrer Bahn sich in ihrer Geschwindigkeit gegenseitig beeinflussen, die schnelleren werden die langsameren beschleunigen, die langsameren werden die schnelleren hemmen. Die Geschwindigkeiten werden sich ausgleichen, und es wird auf ihrer Bahn sich eine Stelle finden, wo die Geschwindigkeiten gleich geworden sind. Treffen sie nach Ausgleich ihrer Geschwindigkeiten auf das Zentralorgan, so wird eine Farbenwahrnehmung entstehen, die den Elektronen entspricht, welche die ganze Bahn mit der Geschwindigkeit durchlaufen haben, die jenes Elektronengemisch erst am Ende der Bahn erreicht. In beiden Fällen treffen auf das Zentralorgan Elektronen gleicher Geschwindigkeit und veranlassen dort dieselbe Erregung. Das Auge ist nicht imstande, die beiden Eindrücke zu unterscheiden. Um ein Beispiel zu geben: Elektronen, die von den Strahlen λ 400 und 500 $\mu\mu$ aus dem Pigmentepithel herausgeschleudert werden, können, wenn sie das Zentralorgan erreichen, eine Geschwindigkeit haben, wie die Elek-

tronen, die das Licht von $\lambda 450 \mu\mu$ herausschleudert. Das Strahlungsgemisch von $\lambda 400$ und $500 \mu\mu$ würde dann dieselbe Farbenempfindung hervorrufen, wie die Strahlen von $\lambda 450 \mu\mu$. Für diese Eigentümlichkeit der Farbenwahrnehmung fehlt bisher jede Erklärung. Ich glaube, sie ist hier nach bekannten Gesetzen der Physik gegeben.

Wie entsteht die Wahrnehmung von Weiß? Wie eben an einem Beispiel gezeigt, können die Strahlen von $\lambda 400$ und $500 \mu\mu$ dieselbe Farbenwahrnehmung erzeugen, wie die Strahlen von $\lambda 450 \mu\mu$. Mischt man aber Strahlen von $\lambda 400$ und $600 \mu\mu$, so wird ein völliger Ausgleich der Geschwindigkeiten der Elektronen auf derselben Wegstrecke nicht erfolgen können. Wenn die Elektronen auftreffen, so werden sie nicht instande sein, die Wahrnehmung einer Spektralfarbe zu erzeugen. Wir empfinden einen Lichteindruck, bei dem die Elektronen bei ihrem Auftreffen die größten Differenzen in ihrer Geschwindigkeit zeigen, als Weiß. Mischen wir in gleicher Weise Strahlen von $\lambda 600$ und $700 \mu\mu$, so werden sich die Geschwindigkeiten der Elektronen bis zum Zentralorgan ausgleichen, wir werden wieder den Eindruck einer Spektralfarbe haben, die in der Mitte zwischen den erregenden Lichtstrahlen liegt. Mischen wir aber die Strahlen von $\lambda 600$ und $800 \mu\mu$, so wird wieder ein Ausgleich auf derselben Wegstrecke nicht möglich sein. Die Differenzen in der Geschwindigkeit der Elektronen werden dieselben sein, wie bei dem Gemisch der Strahlen von $\lambda 400$ und $600 \mu\mu$. Es entsteht daher auch bei diesem Strahlungsgemisch die Wahrnehmung von Weiß. Wenn wir die Strahlen des gesamten Spektrums mischen, muß dieselbe Wahrnehmung entstehen. Wir hätten hier die Erklärung für die Entstehung der Komplementärfarben und die Erklärung, wie durch Mischen der Komplementärfarben und der gesamten Spektralfarben dieselbe Wahrnehmung, die Wahrnehmung von Weiß, entsteht.

Wenn man zwei einfache Farben mischt, die im Spektrum weniger voneinander entfernt sind als Komplementärfarben, so ergibt die Mischung eine der dazwischenliegenden Farben, und diese zieht desto mehr in das Weiße, je größer der Abstand der gemischten Farben ist. Auch dieses Verhalten läßt sich jetzt erklären. Je näher die Farben zueinander liegen, desto geringer sind die Differenzen in der Geschwindigkeit der Elektronen, desto schneller werden sich diese auf ihrer Bahn zum Zentralorgan ausgleichen, desto gesättigter wird der Farbeindruck, den sie erzeugen. Je mehr sich die zweite Farbe der Komplementärfarbe nähert, desto größer sind beim Auftreffen auf das Zentralorgan noch die Differenzen in der Geschwindigkeit der Elektronen, desto mehr zieht die Mischung ins Weiß.

Bei dieser Betrachtung sind zum leichteren Verständnis abgerundete Zahlen willkürlich gewählt worden. Die Komplementärfarben würden sich dabei um $200 \mu\mu$ voneinander unterscheiden. Wieweit entspricht dies der Wirklichkeit? Helmholtz bringt in dem Handbuch der physiologischen Optik außer den Messungen an seinen Augen noch vier Tabellen anderer Beobachter. Sie zeigen, daß die Komplementärfarben in der Mitte des Spektrums um etwa $110 \mu\mu$ auseinanderliegen. Da, wo eine der Komplementärfarben am Ende des Spektrums liegt, wird die Differenz größer, sie wird etwa $130 \mu\mu$.

Die Untersuchungen über die Komplementärfarben haben noch ein Ergebnis erbracht, für das bisher jede Erklärung fehlt. Für die Strahlen von 500 bis $560 \mu\mu$ gibt es keine Komplementärfarben. Die Erklärung ist durch die eben dargelegte Entstehung der Komplementärfarben gegeben. Für diese Strahlen fehlen die Strahlen, die die Geschwindigkeit der Elektronen in derselben Weise wie bei anderen komplementären Farbgemischen beeinflussen. Zu diesen Strahlen komplementär würden die ultravioletten sein, sie werden aber in dem den lichtempfindlichen Elementen vorgelagerten Gewebe absorbiert. Staroperierte sehen ein längeres Spektrum. Der Teil, um den dieses verlängert ist, muß komplementär sein zu einem Teil der Strahlen zwischen $\lambda 500$ und $560 \mu\mu$.

Hier bot sich Gelegenheit, obige Theorie experimentell auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Der Versuch ist in der Zeitschrift für Augenheilkunde Bd. 48, Heft 6, ausführlich beschrieben. Es konnte an staroperierten Augen festgestellt werden, daß sich im Strahlungsbereich von $\lambda 500$ bis $560 \mu\mu$ ein Bezirk befindet, zu dem Strahlen aus dem ultravioletten Strahlungsbereich komplementär sind. Damit wäre experimentell der Nachweis erbracht, daß die Entstehung der Komplementärfarben, wie ich sie angegeben, der Wirklichkeit entspricht.

Zur Stütze meiner Theorie möchte ich noch folgendes anführen: Jetzt fehlt uns eine Erklärung für das Purkinjesche Phänomen. Dieses besteht darin, daß bei herabgesetzter Beleuchtung für unser Auge zuerst die roten Farben, zuletzt die violetten unsichtbar werden. Wenn ein rotes und ein blaues Papier bei Tage gleich hell aussehen, so erscheint uns bei Einbruch der Dämmerung das blaue heller als das rote. Dieses Phänomen können wir beobachten an Gemälden; auch da schwinden in der Dämmerung die roten Farben zuerst, die blauen bleiben am längsten. Auch für diese Erscheinung findet sich jetzt die Erklärung. Die Elektronen, die das rote Licht aus dem Pigmentepithel herausschleudert, haben eine geringe Geschwindigkeit oder, was dasselbe ist, eine geringere Energie als die Elektronen, die

vom blauen Licht herausgeschleudert werden. Bei herabgesetzter Beleuchtung vermögen die ersteren keine Bewegung mehr auszulösen, während die letzten noch wirksam werden.

Bei herabgesetzter Beleuchtung sehen wir auch, daß die Netzhautmitte schlechter sieht als ihre Umgebung. Man hat zur Erklärung dieses Phänomens angenommen, daß die Stäbchen, die in der Netzhautmitte fehlen und erst in der Umgebung der Netzhautmitte auftreten, länger erregbar bleiben als die Zapfen, und hat darauf die Theorie von der „Doppelnethaut“ begründet. v. Hess hat gezeigt, daß diese Trennung des Stäbchen- und Zapfensehens nicht mehr aufrecht zu erhalten ist, dadurch, daß er nachwies, daß bei der Hemeralopie auch die Zapfen im gleichen Sinne Veränderungen erleiden wie die Stäbchen. Meine Theorie erklärt auch diese Erscheinung. In der Netzhautmitte findet sich in dem Netzhautgewebe ein gelbes Pigment; man bezeichnet deshalb die Netzhautmitte auch als gelben Fleck. Dieser Farbstoff absorbiert aus dem einfallenden Licht blaue und violette Strahlen. Bei herabgesetzter Beleuchtung macht sich dies bemerkbar. Es vermögen dann blaue und violette Strahlen nicht mehr zum Pigmentepithel zu gelangen; sie vermögen dort keine Elektronen mehr herauszuschleudern, während in der Umgebung des gelben Fleckes ihnen dies noch gelingt.

Wie verhält es sich nun mit der Farbenwahrnehmung in der Netzhautperipherie? Wir wissen, daß sich die Farbenempfindlichkeit der Netzhaut nach der Peripherie hin ändert. Wir prüfen häufig die farbigen Gesichtsfelder. Wir verwenden dazu meist nicht Spektralfarben, sondern Farbungemische, Pigmente. Diese reichen nicht aus, um uns über die Farbenempfindung der Netzhautperipherie ein richtiges Urteil zu bilden. Es hält schwer, Spektralfarben mit gleicher und hoher Helligkeit für solche Prüfungen herzustellen. Man hat in allerneuester Zeit wieder an den Abgrenzungen der farbigen Gesichtsfelder, wie wir sie in der Praxis vornehmen, Kritik geübt. Es wäre zu prüfen, ob nicht auch da die Abgrenzung der verschiedenen Erregungen zusammenhängt mit der verschiedenen Energie der Elektronen, die das Licht aus dem Pigmentepithel herausschleudert. Das engste Gesichtsfeld hat das Rot, das größte das Blau. Wenn vielfach das Gesichtsfeld für Grün als das engste angegeben wird, so liegt dies daran, daß bei den Pigmentplättchen, mit denen die farbigen Gesichtsfelder aufgenommen werden, die grünen eine wesentlich geringere Helligkeit haben als die roten. Aubert hat schon vermutet, daß die Farbenperzeption auf der ganzen Netzhaut, wenn auch in verschiedenem Grad, statthat, und Landolt hat dies experimentell da-

durch erwiesen, daß er mit direktem Sonnenlicht die gefärbten Papiere belichtete, die er bei solchen Prüfungen angewandt hatte.

Bei vielen Menschen sehen wir Störungen des Farbensinnes. Bei den einen sind dieselben angeboren, bei den anderen entstehen sie im Anschluß an Erkrankungen der Netzhaut und des Sehnerven. Bei den angeborenen Störungen müssen wir annehmen, daß das Pigment im Pigmentepithel das Licht verschiedener Wellenlänge verschieden absorbiert. Für die Farbensinnstörungen, die im Verlauf von Krankheiten auftreten, müßten wir annehmen, daß auf der Bahn vom Pigmentepithel zum Zentralorgan Hemmungen in der Leitung auftreten, die zuerst die Erregung von den Elektronen aufhalten, welche die geringere Energie besitzen. Das scheint in der Tat der Fall. Die roten Farben schwinden in solchen Fällen zuerst.

Wie man sieht, handelt es sich hier um eine Theorie, die den neueren Anschauungen über das Wesen des Lichts entspricht, sie vermag die Vorgänge auch beim Sehen der Farben ohne jede vitalistische Hypothese, wie sie die Theorien von Helmholtz und Hering zur Voraussetzung haben, auf bekannte Gesetze der Physik zurückzuführen.

Über einige Wirkungen von Strahlen. I.

Von **Fr. Dessauer** in Frankfurt a. Main.

Mitteilung aus dem Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin
in Frankfurt a. Main.

(Eingegangen am 30. September 1922.)

Eine sehr große Anzahl von Strahleneinwirkungen auf organische und anorganische Materie ist bekannt. Um nur einige Beispiele zu nennen, seien die Verfärbungen von Mineralien unter dem Einfluß des sichtbaren Lichtes, der Radiumstrahlung und der Röntgenstrahlen, ferner die Ionisierung der Gase durch eben diese Strahlen, des weiteren die chemischen und insbesondere die unter dem Namen Photoeffekte bekannten Einwirkungen, und schließlich die enorm starken, biologischen Effekte der Strahlen erwähnt. Bei der überwiegend größeren Anzahl dieser und anderer Strahleneinflüsse ist nur der Anfang und das Ende des Prozesses bekannt. — Am Anfang steht die wirksame Welle; sie ist durch ihre Wellenlänge λ oder durch ihre Frequenz ν vollständig beschrieben. Ihr Wesen ist ein pulsierendes, elektrisches und magnetisches Feld. Im Sinne der Quantentheorie liegt die Energie einer Welle fest, wenn ihre Frequenz gegeben ist. Die Intensität oder Helligkeit einer Strahlung von gegebener Frequenz hat sozusagen nur noch numerischen Sinn. Wird also eine Welle von einer bestimmten Frequenz absorbiert, so kann man quantitativ übersehen, wie groß die Energie des Produktes der Transformation sein muß. Soweit scheint alles klar und deutlich, wenn wir etwa auf eine Pflanze violettes Licht von $\lambda = 4000 \text{ \AA.-E.}$ oder auf die menschliche Haut Röntgenstrahlen von $\lambda = 1 \text{ \AA.-E.}$ einwirken lassen.

Das Resultat der Einwirkung ist auch deutlich. Um den Gedankengang an einem Beispiel, welches für die Aufstellung der hier vortragenen Hypothese mit maßgebend war, fortzuführen, so ist unzählige Male festgestellt worden, welchen ungeheuren Einfluß Radium- oder Röntgenstrahlung im Gewebe ausüben kann. — Das ist makroskopisch und mikroskopisch zu sehen und im einzelnen zu verfolgen, bis zur vollständigen Zellnekrose, die zum Tode des Individuums führen kann. Man kennt auch ziemlich gut die einzelnen Stadien dieser biologischen Änderungen: Daß die Wirkung an den Zellkernen an-

greift, und zwar an den in Karyokinese begriffenen Kernen undifferenzierter Zellen zuerst, und wie sie dann fortschreitend schließlich bis zum vollständigen Zelltod, zu Autolysen führt, ist sehr oft im einzelnen studiert worden. Dagegen ist so gut wie vollständig unbekannt, was dazwischen liegt. Eine Lichtwelle wird absorbiert — aber was geschieht im Gewebe, um bei dem Beispiel zu bleiben, weiter, bis zum biologischen Geschehen? Das ist ein oft aufgestelltes Problem, ganz analog den zahlreichen anderen Problemen über das Geschehen bei der Absorption von Strahlen. Was geschieht bei den Döltersehen Versuchen über Verfärbung von Edelsteinen? Was geschieht mit den Silberhalogensalzen? Was geschieht mit kolloiden Substanzen, wenn sie ihre Viskosität ändern unter dem Einfluß von Strahlen? Das ist nicht nur eine theoretische Frage, sondern es wäre sehr wohl möglich, daß eine der Wirklichkeit nahe kommende Anschauung über das Geschehen zugleich Erklärungen für manche Merkwürdigkeit und Hinweis für manche neue Möglichkeit lieferte.

Ziemlich gut bekannt ist der Energieabbau absorbierter kurzwelliger Strahlung nur im Gas. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, kann man nach heutiger Auffassung als sehr wahrscheinlich annehmen, daß die ganze Energie, etwa absorbierter Röntgenstrahlen, zunächst in Elektronen wieder auftritt, welche in dem durchstrahlten Gase mit denjenigen Geschwindigkeiten wandern, welche den Frequenzen der absorbierten Strahlen entsprechen. Die zweite Stufe des Energieabbaues ist wohl ebenso sicher die Ionisierung des Gases, die von den Elektronen unter Abbau der Geschwindigkeit ihres Fluges herbeigeführt wird. Ist diese Ionisierung, die sich einige Zeit halten kann, in einem abgeschlossenen Gasraum beendet, so muß die Energie in der Form von Wärme vollständig wiedergefunden werden.

Im Gegensatz dazu kann man natürlich in einem Elektrolyten oder in einem organischen Körper den Abbau der Wellenenergie in Elektronen nicht verfolgen. Möglich ist dies an der Oberfläche fester und flüssiger Gebilde. Hierüber besteht eine Fülle von Literatur. Die photoelektrischen Oberflächenwirkungen sind hauptsächlich an festen Körpern vorhanden. An der Oberfläche von Flüssigkeiten sind sie nicht vorhanden oder minimal. Immerhin könnte man sich denken, daß auch beim röntgenbestrahlten menschlichen Körper die ganze absorbierte Energie zunächst als Elektronenbewegung wiederkehrt, und dann zur Ionisierung führt. Die erste Stufe des Energieabbaues wäre dem Versuch natürlich unzugänglich, die zweite nicht in demselben Maße. Denn schließlich sind im menschlichen Körper Bedingungen, die experimentell wiederholt werden können, vorhanden:

Elektrolyt plus Kolloid plus Membran. Man kann solche Systeme Strahlenwirkungen aussetzen und versuchen, ob sich irgend eine elektrolytische Veränderung findet. Man kann auch, wie Friedrich und Schwarz, an die Beeinflussung von Katalysatoren durch die Strahlen denken. Versuche dieser Art sind in meinem Institut seit längerer Zeit im Gange (gemeinsam mit Dr. R. Liesegang und Dr. Janitzky). Für Anregungen bei diesen Versuchen bin ich auch Herrn Geh. Rat Friedrich Kraus von der zweiten medizinischen Klinik in Berlin und Herrn Prof. Caspari vom Institut für experimentelle Therapie in Frankfurt von Herzen dankbar.

Unsere Versuche, über die an anderer Stelle ausführlich berichtet werden soll, ergeben unter beträchtlichem Strahleneinfluß gewisse elektrolytische Veränderungen. Aber diese Veränderungen sind so klein, daß man auf sie die biologischen Veränderungen wohl nicht zurückführen darf.

Man kann nämlich leicht ausrechnen: — eine durch Stunden hindurch geführte energische Röntgenbestrahlung, wie sie jetzt beim Krebs üblich ist, aber so ausgedehnt, daß sie für den Menschen tödlich wirkt, daß ein ganzes Körpergebiet nekrotisiert wird, bedeutet nur einige Gramm-Kalorien inkorporierter Energie. (Diese und weitere ausgeführten Berechnungen und Einzelheiten befinden sich in meinem zurzeit erscheinenden Buche: Das Problem der Dosierung und der Strahlenwirkung, bei Steinkopff, Dresden.) Einige Schluck heißen Wassers oder eine heiße Kompresse führen dem Körper ein Vielfaches der Energie zu, wie eine tödliche Röntgenbestrahlung. Auf der anderen Seite läßt sich wieder leicht ausrechnen, daß die Energie der absorbierten Röntgenstrahlen, würde sie zu einem merklichen Bruchteil zur Ionisierung verwendet, leicht nachweisbar wäre. Aber das ist sie eben nicht. Es tritt keine irgendwie adäquate Ionisierung auf. Auch die von Friedrich und Schwarz gefundene Beeinflussung eines Katalysators ist sehr klein.

Diese Resultate führten mich zu einer Arbeitshypothese, über diese und andere Wirkungen der Strahlen, die, wenn auch ein schlüssiger Beweis für ihre Gültigkeit noch nicht zu erbringen ist, doch manches recht gut zu erklären scheint.

Die Hypothese nimmt an, daß auch im Gewebe und auch bei den übrigen Wirkungen der Wellen der Abbau zunächst über das bewegte Elektron führt. Ein Anhaltspunkt hierfür ist die Tatsache, daß dieselben biologischen Wirkungen wie bei Röntgenbestrahlung allerdings nur an der Oberfläche, aber in verstärktem Maße bei reiner

Elektronenbestrahlung auftreten. Versuche verschiedener Autoren zeigen, daß Kathodenstrahlen und β -Strahlen biologisch eminent wirksam sind, hinsichtlich der Einzelheiten sei auf das oben zitierte kleine Buch hingewiesen. Jedenfalls ist es zulässig, vorläufig anzunehmen, daß die von den X-Strahlen erregten Elektronen bei einer ganzen Reihe von Wirkungen, insbesondere auch bei biologischen Wirkungen die Voraussetzung bilden. Die X-Strahlen selbst kommen nur als Erreger der Zahl und Art (Reichweite, Geschwindigkeit), der Elektronen und als Verteiler der Energie in Frage. Was aber die zweite Energieabbaustufe, die Ionisierung anlangt, so fragt es sich, ob sie in einem Elektrolyten wie im menschlichen Körper überhaupt nachweisbar sein würde. In Gasen haben die Ionen hinreichende freie Weglänge, sie vermögen sich weit genug voneinander zu entfernen, um der sofortigen Rekombination zu entgehen. Im Elektrolyten ist das Medium rund tausendmal dichter, und die Überschlagsrechnung ergibt, daß die rückanziehende Kraft eines durch Elektronenstoß getrennten Ionenpaares der Größenordnung nach zehntausendmal größer sein müßte. Da ist es also sehr unwahrscheinlich, daß ein gegebenenfalls auf diese Weise abgespaltetes Ion sich hinreichend weit entfernt, um nicht sofort rekombiniert zu werden.

Auch der Gedanke, durch Zusatz möglichst disperser Kolloide die Wiedervereinigung der Ionen zu erschweren, etwa dadurch, daß ein feines Kolloidteilchen sich zwischen die im ersten Augenblick getrennten Ionen schiebt, führte nicht zum Ziel. Der Effekt, der wie oben gesagt eintritt, reicht bei weitem nicht zur Erklärung aus.

Bildung und Rekombination von Trägern, auch wenn die Rekombination sofort erfolgt, müssen notwendig mit kinetischen Vorgängen verknüpft sein. Solche Antriebe, die bei Absorption von Röntgenstrahlen beispielsweise — natürlich auch bei Absorption von anderen Lichtstrahlen — auf die Teilchen erfolgen, sind beträchtlich und können — da es Stöße von erheblicher kinetischer Energie, wenn auch unter Beteiligung zunächst sehr weniger Teilchen, an einem sehr kleinen Orte sind, aufgefaßt werden als eine erhebliche Temperaturerhöhung an diesem Ort. Diese beim Abbau der absorbierten Energie zunächst an sehr kleinen Orten (Punkten) auftretenden Wärmen bei hohen Temperaturen — ich will sie in folgendem „Punktwärmen“ nennen — müssen auftreten, denn die Verteilung der Energie von dem Orte, wo sie zunächst auftritt, in die Umgebung durch Wärmeleitung bedarf endlicher Zeiten und an sie knüpft das weitere Geschehen an. Die Vorstellung ist also folgende: im ganzen tritt bei der Bestrahlung während der Stunden und darum

auch während einer Sekunde wenig Energie in die durchstrahlte Zone: die Gesamterwärmung ist kaum mehr meßbar —, aber die Art, wie sie eintritt, geschieht sozusagen durch äußerst schmale Engpässe, wo sie aufs äußerste verdichtet ist, da, wo Geschwindigkeitsverluste von Elektronen an die Teilchen Energie abgaben. Und eben dieser räumlich wie zeitliche Konzentrationspunkt der Energie bestimmt den Ort der weiteren Wirkung. Durch die Konzentration kommt die Wirkung zustande. Überschlagsrechnungen ergeben die Möglichkeit der Vorstellung ohne weiteres. Die Energie eines Elektrons von der Geschwindigkeit von 11 Volt, das zu einer Ionisierung im Gase hinreicht und ungefähr der Energie der Ultraviolettwellen von $\lambda = 1000 \text{ \AA}$ -E. entspricht, bedeutet etwa $0,5 \cdot 10^{-18} \text{ cal}$. Damit kann ein Molekül vom Molekulargewicht 3000 um 100° erhitzt werden, oder ein zweifach größerer Stoffkomplex, also etwa ein Eiweißmolekül, auf 50° . Eine Röntgenwelle von $0,1 \text{ \AA}$ -E. liefert zehntausendmal mehr Energie, die wohl nicht an einem einzigen Ort, sondern entlang einer Wegstrecke des Elektrons in Intervallen abgebaut wird. (Eine ähnliche Wegstrecke ist anschaulich zu sehen bei den bekannten Ionisierungsfiguren von C. T. R. Wilson. Nur rücken, entsprechend dem dichteren Medium, die Ionisierungspunkte etwa tausendmal näher zusammen.) Nimmt man der Größenordnung nach den Durchmesser einer Zelle etwa mit 1 bis 10μ , das ist 10^{-4} bis 10^{-3} cm an, so werden die Punktwärmen bei Absorption eines Röntgenstrahls je nach seiner Frequenz innerhalb einer einzigen Zelle oder entlang einigen benachbarten Zellen zustande kommen. Es werden innerhalb dieser Zellen sehr kleine Orte bestimmt über 100° erhitzt, so daß vielleicht Eiweißkoagulationen oder andere Störungen zustande kommen können. Es ist indessen nicht nötig, nur an Koagulationserscheinungen zu denken. Vielmehr können die Stöße der Punktwärme zu Verdampfungspunkten führen, an die sich das weitere Geschehen anknüpft.

Um die Vorstellung noch mehr zu veranschaulichen, sei noch einmal darauf hingewiesen: die Wirkung von Röntgenstrahlen auf Gewebe ist ungeheuer, trotzdem die absorbierte Energie minimal ist — also ist dieser Energie etwas Spezifisches gegeben —, sie wirkt wie ein sehr differentes Medikament, wie ein sehr starkes Gift. In ihrer Endform kann sie diese Wirkung nicht vollbringen, denn die Endform ist eine sehr geringe, kaum mehr der Messung zugängliche Erwärmung. Also ist anzunehmen, daß vor der Erreichung ihrer Endform, da, wo die Energie in starker Verdichtung auftritt, aber auf der anderen Seite doch schon in einer Form vorhanden ist, die biologisch sicher wirkt, die biologische Wirkung zustande kommt.

Es ist nirgends in der Literatur eine Tatsache bekannt, die es wahrscheinlich macht, daß das Feld der Welle primär biologisch wirkt. Es sind viele Tatsachen sichergestellt, daß Elektronen selbst die biologischen (und andere) Wirkungen da, wo sie hingelangen, hervorbringen. Die Versuche, Ionisierung der Gewebe durch Elektronen zur Erklärung auch nur im entferntesten quantitativ heranzuziehen, sind bisher gescheitert. Es bleiben uns die kinetischen Antriebe bei Ionisierung und Rekombination. Sie sind notwendig vorhanden. Durch sie muß die absorbierte Wellenenergie hindurch, um in ihr Endstadium zu gelangen, und an diesen Stellen ist die Energie zweifellos noch hochkonzentriert, also als kleine Stellen hoher Temperatur vorhanden. Wenn ein Stein ins Wasser fällt, so erhöht er, abgesehen von der Erwärmung, das Niveau des Teiches ganz unmerkbar. Aber da, wo er einschlägt, spritzt das Wasser hoch auf — hier ist die Energie sehr merkbar, nachher als Erhöhung der Temperatur und der potentiellen Energie (durch die Niveauerhöhung des Teiches) nicht mehr nachweisbar.

Bei dieser Vorstellung ergeben sich zwei wichtige Konsequenzen — die erste, zunächst für die Bestrahlung in der Medizin ausgesprochen, heißt: Die Sensibilität ist in erster Linie eine biologische Sache und nicht eine physikalische. Wenn die Punktwärme im Kern einer sensiblen Zelle etwa im Zustand der Mythose eintritt, so macht das etwas aus. Wenn die Punktwärme aber irgendwo in einem Muskel auftritt, so braucht es nichts auszumachen. Die Strahlensensibilität wäre eine Empfindlichkeit der Zellen, besonders ihrer Kerne, auf Temperatursteigerungen an kleinen Stellen in ihnen. Daß solche Temperaturempfindlichkeiten an und für sich bestehen, ist sicher. Herr Professor Caspari machte mich in diesem Zusammenhang darauf aufmerksam, daß die Koagulationstemperatur *ceteris paribus* von der Wasserstoffionenkonzentration abhängt. Das erkläre die Empfindlichkeit der Kerne, deren Chromatin mit großer Intensität basische Farbstoffe aufnimmt. In diesem Zusammenhang könnte man auch darauf hinweisen, daß die Versuche von Fernau und Pauli merkbare Viskositätsverringerungen bei Gallerten unter dem Einfluß von Radiumstrahlung zeigen, die übrigens auch durch Wärme herbeigeführt werden können. Wie ebenso die verschiedenen Eiweißveränderungen durch Strahlung, auch durch Wärme herstellbar sind.

Aber, und damit komme ich zur entscheidenden und hauptsächlichen Konsequenz der Theorie: Die Vorgänge der Punktwärme müssen zwar im groben einige Ähnlichkeiten mit Erwärmungsvorgängen zeigen — nämlich wenn man lange genug bestrahlt —, aber

sie müssen im einzelnen ganz verschieden sein, sowohl von den Wirkungen der Erwärmung wie auch von anderen Einflüssen etwa elektrolytischer Art.

Die Gesetzmäßigkeiten, nach welchen Teilchen bei der Bestrahlung durch Punktwärmen betroffen und beeinflusst werden, sind keine anderen als die des Zufalls. Wenn M die gesamte Zahl von zu betrachtenden Teilchen in 1 cm^3 des Einflußgebietes ist, und σ den Einstrahlungskoeffizienten darstellt, welcher ein Maßstab dafür ist, wieviel unter den gesamten Teilchen in jeder Sekunde Punktwärmen erleiden, so ergibt sich, daß nach jeder beliebigen Zeit t noch ein Rest M_r von Teilchen, die nicht getroffen worden sind, nach der Gleichung übrig bleibt:

$$M_r = Me^{-\sigma t}, \quad (1)$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmus ist. Einmal oder beliebig oft darüber hinaus getroffen sind alle übrigen Teilchen $M_{(1\dots n)}$ nach der Gleichung:

$$M_{(1\dots n)} = M(1 - e^{-\sigma t}). \quad (2)$$

Allgemein ist während der Dauer einer Bestrahlung die Situation so, daß zum n ten Mal getroffene Teilchen M_{rn} nach der Zeit t so viele vorhanden sind, als in diesem Augenblick aus den $(n-1)$ mal getroffenen hervorgegangen und noch nicht an die $(n+1)$ mal getroffenen verloren gegangen sind. Der Ansatz führt zu einem Integral, dessen Lösung unter der Voraussetzung, daß zur Zeit $t=0$ noch nicht bestrahlt worden ist, durch den Ausdruck gegeben wird:

$$M_{rn} = Me^{-\sigma t} \cdot \frac{(\sigma t)^n}{n!}. \quad (3)$$

Diese Gleichung ist übrigens ähnlich der, die für den Zerfallszustand einer radioaktiven Substanz unter den gleichen Anfangsbedingungen gilt, wenn die aufeinanderfolgenden Abbauprodukte die gleichen Zerfallskonstanten haben.

Daraus geht aber folgendes hervor: wenn nach einer nicht übermäßig langen Bestrahlung zahlreiche Teilchen, die untereinander an und für sich gleichempfindlich sind, durchgemustert werden, so befinden sie sich nicht im gleichen Zustand, ganz im Gegensatz zur Beeinflussung solcher Teilchen in einem homogenen Elektrolyten, oder unter dem Einfluß einer allgemeinen Erwärmung. Vielmehr werden einige von diesen Teilchen Hunderte, andere Tausende Male von Punktwärmen getroffen sein, während wieder andere ganz wenige oder überhaupt gar keine Beeinflussung erlitten haben. Erst wenn die

Summierung der Punktwärmen ein Teilchen einem Endzustand zuführt, so daß weitere Punktwärmen es nicht mehr ändern (wenn übermäßig belichtet wird), werden praktisch alle Teilchen allmählich gleich. Wenn nun weiter die Teilchen Zellen sind, ganz konkret gesprochen, wenn sie Krebszellen gleicher biologischer Empfindlichkeit gemischt mit anderen Zellen im menschlichen Körper wären, die weniger große Empfindlichkeit hätten, so wird sich zwar bei einer summarischen Betrachtung deutlich herausstellen, daß die empfindlicheren Karzinomzellen zwar im großen und ganzen mehr geschädigt sind, aber es muß sich daneben bei genauer Betrachtung herausstellen, daß trotz der angenommenen gleichen Empfindlichkeit ihre Schädigung erheblich verschieden ist, daß auch bei zureichender Bestrahlung einige Krebszellen überhaupt nicht, andere fast gar nicht gelitten haben, während die Mehrzahl sehr schwer geschädigt ist und endlich, daß auch von den widerstandsfähigen Zellen ein Teil etwas, ein kleiner Teil sehr stark geschädigt ist. Dieser Befund ist auf Grund der Theorie zu erwarten; er ist in dieser Form bestimmt nicht zu erwarten, wenn eine Theorie zugrunde gelegt wird, bei der die Wirkung an allen Wirkungsorten gleichmäßig, oder doch annähernd gleichmäßig eintritt, etwa wie beim Kochen eines Hühnereies. Bei Bestrahlung mit Radium muß das Ei auch gerinnen, wegen der auftretenden Punktwärmen, und zwar der Größenordnung nach bei Aufnahme der gleichen Energie. Dabei ist das Ei bei der Bestrahlung überhaupt nicht warm geworden.

Die gesamte Erfahrung der bisherigen Radium- und Röntgentherapie zeigt nun, daß die Dinge so liegen. Immer und immer wieder findet man selbst bei unzulässig stark bestrahlten Tumorherden bei sorgfältiger Durchmusterung neben Hunderten zerstörten oder schwer geschädigten Tumorzellen einige erhaltene. Entscheidende biologische Versuche zeigte mir September 1921 Dr. Wood vom St. Lucas-Hospital in der Columbia-Universität in New York. Er hat Tumormäuse mit steigenden Dosen bestrahlt und Impfversuche gemacht, und zwar an einem sehr großen Material. Dann zeigte sich, daß mit steigender Bestrahlung die positiven Impffresultate abnahmen, also die Virulenz der Tumoren geringer wurde. Aber sie erreichte niemals Null, sondern nahm nach einer Exponentialkurve ab, und zwar bei den verschiedensten Versuchen auch bei verschiedenen Tumoren. Ich will das Material über das engere Anwendungsgebiet der Theorie in meinem Spezialfache hier nicht erweitern. Soweit ich sehe, sind die beobachteten Tatsachen mit den Konsequenzen der Theorie im Einklang und einige, bisher sehr schwer erklärliche Tatsachen ergeben sich von selbst. Nun darf man nicht den Schluß ziehen, daß damit

die Hoffnungen auf den Erfolg der Tiefentherapie mit Radium- und Röntgenstrahlen vereitelt würden, weil man niemals so bestrahlen kann, daß keine Neoplas mazelle übrig bleibt. Auch hier wird der Körper selbst das wesentliche tun, und das physikalische Medikament nur Hilfsmittel sein. Aber eine etwas andere Grundlage bekommt die Methodik, insbesondere die Dosierung ohne jeden Zweifel: auch die Frage der sogenannten Reizwirkung und der scheinbare Übergang der Reizwirkung in eine Schädigung sieht auf dieser Grundlage ganz anders aus. (Siehe das zitierte Buch.) Die Literatur gibt mancherlei experimentelles Material, an Hand dessen sich nachprüfen läßt, wieweit die Vorstellung auch für ganz andere Gebiete zu richtigen Konsequenzen führt. Am nächsten liegt die eigentliche Photographie, die Schwärzung der Emulsionen. Soweit Resultate exakter experimenteller Arbeiten uns vorlagen, haben meine Mitarbeiter im Institut Dr. Altenburger (und Fräulein Dr. Blau einige Übereinstimmung gefunden. Insbesondere ergeben sich plausible Deutungen der Schwärzungsgesetze und Solarisation aus der Punktwärmentheorie ohne weiteres. In einigen Fällen lassen sich aus dem mitgeteilten experimentellen Material die Einwirkungskoeffizienten σ bestimmen und die Kurven aus den Gleichungen der Theorie aufzeichnen, die mit den empirischen Gängen übereinstimmen. Die Unterschiede im photographischen Schwärzungsvorgang bei Licht- und Röntgenstrahleneinwirkung ergeben sich gleichfalls (bei Röntgenstrahlen fehlt der Schwellenwert der Schwärzung, der bei Licht vorhanden ist, und gilt das Bunsensche Schwärzungsgesetz). Über diese und einige andere, zur Prüfung herangezogene Naturvorgänge (Viskositätsveränderungen von Gallerten, Gerinnungsvorgänge unter Licht- und Röntgeneinfluß u. a.) und über den Ausbau der Theorie in formaler Hinsicht (wovon hier nur die ersten Ansätze gegeben sind), werden die genannten in einer besonderen Arbeit berichten¹⁾.

¹⁾ Nach Abschluß dieser Arbeit kamen die Aufsätze E. Warburgs in früheren Jahrgängen der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift zu meiner Kenntnis, die sich eingehend mit einer Einsteinschen Hypothese, dem sogenannten photochemischen Äquivalenzgesetz beschäftigen. Mit der vorgetragenen Hypothese ist gemeinsam der Abbau der Lichtenergie in Wirkungsquanten bei photochemischen Prozessen. Warburg hält indessen den Weg über Elektronenabspaltung für unwahrscheinlich, weil Ionenbildung bei photochemischen Vorgängen in Gasen nicht stattfindet. Das scheint mir kein hinreichend starker Einwand, denn die photochemische Wirkung über den Weg der Ionisierung muß nicht zur Folge haben, daß umgekehrt photochemische Vorgänge stets Ionisierung bewirken. Warburg erwähnt, daß schon Graf Rumford den Gedanken hatte, daß z. B. bei der photochemischen Wirkung auf Knallgas das Licht die Temperatur kleinster Teilchen erhöhe, ohne die Wärme der ganzen Masse zu erhöhen,

Zusammenfassung.

Eine Arbeitshypothese über die Vorgänge bei der Absorption von Strahlen im biologischen Gewebe, in photographischen Platten, Kolloiden und anderen Stoffen wird aufgestellt. Sie dient, ohne sich auf Einzelheiten festzulegen, zur Veranschaulichung der Vorgänge. Die Prüfung der Hypothese an einigen Erfahrungstatsachen wird skizziert und einige Konsequenzen werden abgeleitet.

Frankfurt a. M., Univ.-Inst. f. phys. Grundlagen d. Medizin.

also Wirkung nur auf einzelne Teilchen — eine Voraussetzung quantenhafter Wirkung und — auf einem anderen Gebiete, der vorgetragenen Hypothese im Jahre 1808. Man wird durch die vorgetragene Hypothese auch an J. J. Thompsons Überlegung von der „fleckigen“ Struktur der Strahlung erinnert.

Bestimmung des Verhältnisses $k = c_p / c_v$ der beiden spezifischen Wärmen von Kohlendioxyd nach der Quinckeschen Resonanzmethode sowie Untersuchungen über den Einfluß der dabei verwandten Tönhöhen¹⁾.

Von **Bruno Tornau** in Marburg.

(Eingegangen am 27. September 1922.)

Vorliegender Arbeit liegt eine Überlegung zugrunde, die F. Richarz in einer „Anmerkung des Herausgebers“ bei den Vorlesungen von Helmholtz über Theorie der Wärme angebracht hatte²⁾. Bei Gasen mit mehreren Atomen in der Molekel besteht im Gleichgewichtszustande ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Energie der fortschreitenden Bewegung der ganzen Molekel und der inneren Energie in der Molekel. Von dem Verhältnis dieser beiden Energien hängt das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen ab. Man hat nun bisher stillschweigend angenommen, daß auch bei veränderlichen Zuständen immer außerordentlich schnell dasselbe Verhältnis zwischen den beiden Energien sich ausbildet und infolgedessen das Verhältnis der spezifischen Wärmen stets (bei im wesentlichen ungeänderter Temperatur) seinen bestimmten Wert beibehält. Bisher hat man auch noch keine Tatsache gefunden, welche dieser stillschweigenden Voraussetzung widersprechen würde. Es ist aber denkbar, daß die Druckänderung bei den Schallschwingungen für hohe Töne so schnell geschieht, daß bei ihnen der Ausgleich zwischen den beiden Energien der Molekel nicht mehr hinreichend folgen kann. Insbesondere ist zu erwarten, daß diese Abweichung, wenn überhaupt, so am ehesten bei komplizierten Molekeln unvollkommener Gase sich zeigen und in der Weise in Erscheinung treten wird, daß bei Verwendung hoher Töne sich der Wert von k erhöht und sich dem für einatomige Gase nähert.

Als Versuchsgas wurde Kohlendioxyd gewählt. Es kommt von den leicht im Laboratorium herstellbaren Gasen einem idealen Gase am wenigsten nahe, und es war daher bei ihm ein Einfluß am ehesten zu erwarten.

¹⁾ Auszug aus der Marburger Inaug.-Dissertation. Die Originalarbeiten sind in der Bibliothek des physikalischen Instituts der Universität Marburg, der dortigen Universitätsbibliothek sowie in der Staatsbibliothek in Berlin aufbewahrt.

²⁾ H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoret. Physik VI, Wärme (herausgeb. von F. Richarz), S. 404, Fußnote A. D. H. Vgl. auch L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, 2. Teil, S. 131 und 244.

I. Methode.

Die Bestimmung des Verhältnisses $k = \frac{c_p}{c_v}$ der beiden spezifischen Wärmen eines Gases aus der Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Gase beruht auf der von Laplace aufgestellten Formel für die Schallgeschwindigkeit in einem Gase¹⁾

$$v = \sqrt{\frac{p}{\varepsilon} \cdot k},$$

wo p der Druck, ε die Dichte bedeuten.

Führt man statt $\frac{p}{\varepsilon} R \cdot \Theta$ ein, wo R die individuelle Gaskonstante, Θ die absolute Temperatur bedeuten, so erhält man:

$$v = \sqrt{k \cdot R \cdot \Theta}.$$

Andererseits ist $v = n \lambda$, worin n die Schwingungszahl, λ die Wellenlänge des als Schallquelle angewandten Tones ist.

Es ist also:

$$n \cdot \lambda = \sqrt{k \cdot R \cdot \Theta} \quad \text{oder} \quad k = \frac{n^2 \lambda^2}{R \cdot \Theta}.$$

Sind also n , R und Θ bekannt, so läßt sich k durch eine experimentelle Bestimmung von λ berechnen, λ ist hierbei die Wellenlänge des Tones bei freier Ausbreitung im Raum.

Die experimentelle Bestimmung von λ bedingt (außer bei Luft) das Messen von λ in Röhren, wodurch eine Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des Schalles infolge von Reibung und Wärmeleitung bedingt ist, und zwar ist nach G. Kirchhoff²⁾

$$u = v \left(1 - \frac{\gamma}{2r \sqrt{\pi n}} \right),$$

wo u die Schallgeschwindigkeit in der Röhre, v die Schallgeschwindigkeit im freien Raume, r der Röhrenradius, n die Schwingungszahl des Tones und γ eine Konstante ist, die nach Kirchhoff den Wert hat:

$$\gamma = \frac{\eta}{\varepsilon} + \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \cdot \frac{l}{\varepsilon \cdot c_p}.$$

Hierin bedeuten: η den Koeffizienten der inneren Reibung, l den Koeffizienten der Wärmeleitung, ε die Dichte, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, a die Schallgeschwindigkeit nach Laplace, b die Schallgeschwindigkeit nach Newton.

¹⁾ H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoret. Physik VI, Wärme (herausgegeben von F. Richarz), S. 190 ff., 1903.

²⁾ G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134, 177, 1868.

Valentiner¹⁾ gibt für γ den Wert an:

$$\gamma = 1,43 \sqrt[3]{\frac{\eta}{\varepsilon}}$$

Die Formel kann als richtig angenommen werden²⁾, wenn der Röhrendurchmesser der benutzten Röhre eine gewisse Grenze nicht unterschreitet.

Um die wahre Schallgeschwindigkeit v zu erhalten, kann also aus den experimentell vorliegenden Daten nach der von Kirchhoff oder Valentiner angegebenen Formel zunächst γ berechnet und dieser Wert dann in die Formel

$$u = v \left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}} \right)$$

eingesetzt werden.

Die direkte Bestimmung von γ kann umgangen werden, indem man die Schallgeschwindigkeit u_1 bzw. u_2 für den Ton derselben Schwingungszahl n in zwei Röhren von den Radien r_1 und r_2 bestimmt. Die Anwendung der Kirchhoffschen Formel ergibt für die wahre Schallgeschwindigkeit

$$v = \frac{u_1 r_1 - u_2 r_2}{r_1 - r_2}$$

für den betreffenden Ton n . Ähnliche Versuche kann man mit Röhren von anderer Weite sowie unter Benutzung verschiedener Tonhöhen durchführen.

Beide Wege zur Bestimmung der wahren Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Gase müssen aber für denselben Ton (innerhalb der Fehlergrenzen) denselben Wert für die wahre Schallgeschwindigkeit und damit für k ergeben. Das gleiche müßte der Fall sein bei Verwendung verschiedener Tonhöhen. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist diese Verschiedenheit durch die Verschiedenheit der benutzten Tonhöhen hervorgerufen worden. In diesem Sinne kann man einen etwaigen Einfluß der Tonhöhe auf die Schallgeschwindigkeit und damit auf das Verhältnis k der beiden spezifischen Wärmen eines Gases feststellen.

¹⁾ Valentiner, Ann. d. Phys. **15**, 93, 1904.

²⁾ Schneebeli, Pogg. Ann. **136**, 296, 1869; A. Seebeck, ebenda **139**, 104, 1870; H. Kayser, Wied. Ann. **2**, 218, 1877; D. J. Blaikley, Proc. Phys. Soc. London **6**, 228, 1884; J. W. Low, Wied. Ann. **52**, 641, 1894; H. Stevens, Ann. d. Phys. **7**, 285, 1902; J. Müller, ebenda **11**, 331, 1903; F. A. Schulze, ebenda **13**, 1060, 1904; J. Sturm, ebenda **14**, 822, 1904; S. Valentiner, ebenda **15**, 93, 1904; M. Thiesen, ebenda **24**, 401, 1907.

II. Versuchsanordnung.

Zur experimentellen Bestimmung von k wurde die Quinckesche¹⁾ Resonanzmethode benutzt und, um die wahre Schallgeschwindigkeit zu erhalten, der Weg der Kombination von Röhren verschiedener Röhrenweite eingeschlagen. Andererseits war aber auch die Möglichkeit gegeben, durch Einsetzen des theoretisch berechneten Wertes von γ die wahre Schallgeschwindigkeit mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel zu berechnen.

Die Resonanzmethode, von Quincke angegeben, erstmalig von Seebeck²⁾ in etwas veränderter Form zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Röhren benutzt, beruht auf folgendem Prinzip:

In einer geraden beiderseits offenen Röhre ist ein Stempel verschiebbar, der den Querschnitt der Röhre nahezu ausfüllt und so eine Luftsäule von variabler Länge abschließt. Auf der offenen Seite befindet sich als Schallquelle eine Stimmgabel. Zum Abhören ist in einer Entfernung von $\frac{\lambda}{4}$ von der Schallquelle an der Versuchsröhre eine Ansatzröhre angebracht, die durch einen Gummischlauch und Gehörknopf mit dem Ohr verbunden werden kann.

Treten von der Schallquelle Wellen in die Röhren ein, so wird die Gassäule in stehende Schwingungen versetzt. Verschiebt man nun den Stempel, verändert also damit die Länge der schwingenden Gassäule, so läßt sich deren Länge auf den Ton der Schallquelle abstimmen. Man erhält für bestimmte Lagen des Stempels scharf ausgeprägte Minima oder Maxima des Mitschwingens. Die Entfernung zweier entsprechend ausgezeichneter Punkte kann man festlegen, dann ist die Wellenlänge λ des Tones gleich dem doppelten Werte des Abstandes solcher Punkte.

Die Methode ist im Laufe der Zeit je nach dem Zweck, zu dem sie verwandt wurde, verändert und vervollkommen worden³⁾.

Die zu nachfolgenden Versuchen benutzte Apparatur schließt sich in ihrem Aufbau und ihrer Anordnung im wesentlichen an Apparaturen an, wie sie bereits im Marburger Physikalischen Institut benutzt worden sind. Allerdings hat die Meßapparatur einen durch die Vor-

¹⁾ G. Quincke, Pogg. Ann. **128**, 190, 1866.

²⁾ A. Seebeck, ebenda **139**, 104, 1870.

³⁾ J. W. Low, Wied. Ann. **52**, 641, 1894; A. Kalähne, Hab.-Schrift Heidelberg, Ann. d. Phys. **11**, 226, 1903; **20**, 398, 1906; Fürstenau, Inaug.-Diss. Gießen, S. 78, 93, 94, 1908; Ann. d. Phys. **27**, 725, 1908; W. Wenz, Inaug.-Diss. Marburg 1909, s. auch Ann. d. Phys. **33**, 951, 1910; M. Robitsch, Diss. Marburg 1910; W. Küpper, Inaug.-Diss. Marburg 1912; W. Perron, Diss. Marburg 1912.

nahme von absoluten Messungen der Schallgeschwindigkeit bedingten Umbau erfahren. Sie sei kurz beschrieben.

Das Hauptziel war, einmal den Einfluß des Röhrendurchmessers auf die Schallgeschwindigkeit nach Möglichkeit auszuschalten, anderseits die Genauigkeit der einzelnen Messungen dadurch zu erhöhen, daß möglichst viele Wellenlängen gemessen werden konnten.

Diese beiden Forderungen bedingten weite und in Anbetracht der großen Wellenlänge des tiefsten verwandten Tones ($\frac{\lambda}{2} \sim 0,50 \text{ m}$) auch lange Röhren. Als Meßröhren wurden daher etwa 3 m lange Messingröhren verwandt, deren innere Durchmesser 6, 8 und 10 cm betrugen. Als Schallquelle diente ein Präzisionstelephon von Siemens und Halske, das parallel zu einem Saitenunterbrecher¹⁾ geschaltet war. Die Wirkung ist folgende:

Das Telephon bekommt bei jeder Unterbrechung einen Impuls, und der Ton im Telephon stimmt so mit der Tonhöhe des Unterbrechers überein. (Die Intensität des Tones konnte durch Entfernen oder Nähern des Magneten im Telephon verändert werden.) Die in Schwingungen versetzte Telephonmembran erregt ihrerseits die im Meßrohr befindliche Gassäule zu stehenden Longitudinalwellen.

Es bilden nun ferner ein im Rohr verschiebbares, als Stempel dienendes Körnermikrophon mit einem Stöpselregulierwiderstand und einem durch eine Induktionsspule induktiv gekoppelten Telephon den Abhörkreis, der von einem Zink-Kohle-(Leclanché-) Element gespeist wurde. Je nach der Stellung des durch ein Führungsrohr in der Röhre verschiebbaren Mikrophons wird dies mehr oder minder stark durch die in der Gassäule entstehenden Longitudinalwellen zum Mitschwingen erregt. Dadurch treten Schwankungen der Stromintensität im Abhörkreis ein, was bewirkt, daß die Telephonmembran des Abhörtelephons im gleichen Takte mitschwingt, man also im Telephon den von der Schallquelle erregten Ton hört. Die Intensität der Longitudinalschwingung im Rohre und damit die Tonstärke im Mikrophon ist am größten, wenn der Abstand zwischen Telephon- und Mikrophonplatte ein ganzes Vielfaches einer halben Wellenlänge des Tones ist, die Luftsäule in Resonanz mit dem Ton steht. Durch Aufsuchen der Stellen der maximalen Intensität des Tones kann so die Wellenlänge gemessen werden.

Das Ausmessen der Wellenlängen geschah folgendermaßen:

¹⁾ A. Wratzke, Inaug.-Diss. Marburg, S. 39, 1914; M. Vos, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 529, 1914.

Jedesmal wenn durch Verschieben des Stempels die Lage eines Maximums festgestellt worden war, wurde unmittelbar auf dem Stempelrohr, an der Stelle, wo es aus dem Führungsrohre herauskam, mit einem scharfen Meißel eine Marke gemacht. Die Lage der so aufgezeichneten Maxima wurde nachher mittels Lupe und eines in 0,5 mm geteilten Präzisionsmaßstabes sorgfältig ausgemessen. Ein Vergleich des angewandten Maßstabes mit dem Normalmeter ergab bei 18° eine Abweichung von 0,4 mm.

Zur Füllung der etwa 9 bis 23 Liter fassenden Meßröhren waren beträchtliche Mengen von Kohlendioxyd erforderlich, welche im Kippschen Apparat aus Marmor und Salzsäure dargestellt, gereinigt und getrocknet wurden, um dann erst in die Meßröhren zu gelangen.

Den Messungen zugrunde gelegt wurden drei Stimmgabeln von R. Koenig. Sie hatten die Tonhöhen:

$$C_1 = 256 \text{ v. d. (Doppelschwingungen)}$$

$$C_2 = 512 \quad "$$

$$C_3 = 1024 \quad "$$

umfaßten also ein Intervall von zwei Oktaven, dessen Grenze nach unten durch die Länge der Meßröhren, nach oben durch den benutzten Saitenunterbrecher gegeben war, da dessen Tonhöhe nicht weiter erhöht werden konnte.

Außerdem stand noch eine von der Firma Max Kohl, Chemnitz, gelieferte Präzisionsnormalgabel zur Verfügung, die von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeicht und so abgestimmt war, daß die Zahl ihrer ganzen Schwingungen in der Sekunde bei 15° um nicht mehr als (+)0,1 von 435 abwich. Ihre Schwingungszahl erniedrigte sich um 0,4, wenn die Temperatur um 10° stieg.

Trotzdem bei der Güte der Koenigschen Stimmgabeln angenommen werden konnte, daß die angegebenen Tonhöhen stimmten, so wurden sie doch einer Nachprüfung unterzogen und ihre Tonhöhen nach der vibrographischen Methode¹⁾ durch Vergleich mit der Normalgabel zu

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 256,18 \text{ v. d.} \\ n_2 = 512,18 \quad " \\ n_3 = 1024,08 \quad " \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{bei } 15^\circ \\ \text{gefunden.} \end{array}$$

Auf diese Stimmgabeln wurde der Unterbrecher mittels Schwebungen eingestellt, deren Anzahl in der Sekunde bestimmt wurde. Dadurch konnte die Tonhöhe der Schallquelle, deren genaue Kenntnis

¹⁾ F. Melde, Wied. Ann. 51, 667, 1894.

für die vorzunehmenden absoluten Messungen unbedingt erforderlich war, genau bestimmt werden.

III. Endgültige Versuche.

1. Gang eines Versuches. Vor Beginn eines Versuches wurde das Kohlendioxyd bis zu Tagen durch die Meßröhre durchgeleitet, so daß eine vollkommene Füllung mit dem zu untersuchenden Gase gewährleistet war. Auch während des Versuches selbst strömte das Kohlendioxyd weiter durch die Apparatur.

Dann wurde der Unterbrecher in Tätigkeit gesetzt und durch Schwebungen auf die Stimmgabel abgestimmt, deren Tonhöhe dem Versuche zugrunde gelegt werden sollte. Erst nachdem er längere Zeit in Betrieb war und ein Gleichgewichtszustand sich herausgebildet hatte, wurde seine Tonhöhe durch mehrmalige Messungen der Schwebungen endgültig bestimmt. Nachdem durch Ablesung des Thermometers die Temperatur des Gases sowie die Zimmertemperatur festgestellt worden war, wurde die Lage der Maxima abgehört und auf dem Stempelrohr in beschriebener Weise aufgezeichnet. Nach Beendigung der Messung wurden abermals Temperatur sowie Tonhöhe bestimmt.

Zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit u_t wurde aus den mit Lupe und Maßstab ausgemessenen Werten für die halben Wellenlängen das Mittel nach einer von Kundt¹⁾ angegebenen Formel berechnet.

Bei dem tiefsten Ton konnte so der Mittelwert aus durchschnittlich vier bis fünf, bei dem höchsten aus etwa 20 halben Wellenlängen berechnet werden.

Durch Einsetzen der erhaltenen Wellenlänge und der bekannten Tonhöhe n erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des betreffenden Tones bei der Versuchstemperatur t .

2. Korrekturen. Da die Versuchstemperatur bei den einzelnen Versuchen nur selten die gleiche war, so wurden, um einen Überblick und die Möglichkeit der Berechnung eines Mittelwertes zu erhalten, diese so erhaltenen Werte auf 0° reduziert nach der Formel

$$u_0 = \frac{u_t}{\sqrt{1 + \alpha t}},$$

wo u_t die bei t^0 gemessene, u_0 die auf 0° reduzierte Schallgeschwindigkeit, α den Ausdehnungskoeffizienten bedeuten.

¹⁾ A. Kundt, Pogg. Ann. 135, 387 u. 527, 1868.

Für die Umrechnungen wurde der Wert $\alpha_0^{200} = 0,003742$ als Mittelwert zweier experimentell bestimmter Werte für den Ausdehnungskoeffizienten von Kohlendioxyd¹⁾ und eines von Schweikert²⁾ berechneten Wertes genommen.

Diese so erhaltenen Werte bedürfen aber noch einer weiteren Korrektur wegen der Abhängigkeit des in der Laplaceschen Formel für die Schallgeschwindigkeit vorkommenden Faktors k von der Temperatur.

Um die Werte auf die gleiche Basis zu bringen, wurde auf Grund einer kritischen Betrachtung der einschlägigen Arbeiten³⁾ der Wert von Partington⁴⁾ zugrunde gelegt.

3. Ergebnisse. Aus den Werten für die wahre Schallgeschwindigkeit bei 0° und den aus diesen berechneten für $k_{0, \text{id}}$ ergibt sich als Mittelwert:

$$k_{0, \text{id}} = 1,298_5 \pm 0,0003_2,$$

und nach Umrechnung mit der die Berthelotsche⁵⁾ Zustandsgleichung benutzenden Formel, die den reellen Zustand eines Gases berücksichtigt,

$$k_{0, \text{reall}} = 1,3165 \pm 0,0003_2.$$

IV. Schlußfolgerungen.

Als Werte der wahren Schallgeschwindigkeit in Kohlendioxyd bei 0° für die den Versuchen zugrunde gelegten Tonhöhen ergab sich:

Tonhöhe λ	V_0	V_0
256	$258,76 \pm 0,132$	$258,90 \pm 0,108$
435	—	$258,80 \pm 0,114$
512	$258,72 \pm 0,063$	$258,83 \pm 0,105$
1024	$258,94 \pm 0,186$	$258,95 \pm 0,113$

Hierin sind die linken Werte dadurch erhalten worden, daß die bei denselben Tonhöhen, aber in verschieden weiten Röhren gefundenen Werte kombiniert und nach der anfangs gegebenen Formel V_0

¹⁾ Landolt-Börnstein-Tabellen, 4. Aufl., S. 351.

²⁾ Schweikert, Ann. d. Phys. **48**, 597, 1915.

³⁾ A. Wüllner, Wied. Ann. **4**, 321, 1878; K. Strecker, Ann. d. Phys. **13**, 28, 1883, Fußnote; A. Leduc, C. R. **129**, 659, 1898; O. Buckendahl, Inaug.-Diss. Heidelberg 1906; R. Fürstenau, Ann. d. phys. **27**, 725, 1908; Verh. d. D. Phys. Ges. **11**, 137, 1909; Amagat, Journ. de Phys. (3) **5**, 114, 1896; M. Thiesen, ZS. f. Instrkde. **27**, 112, 1907; J. R. Partington, Phys. ZS. **14**, 969, 1913; Ann. d. Phys. **23**, 809, 1907; Schweikert, Inaug.-Diss. Bonn 1915; Ann. d. Phys. **48**, 593, 1915.

⁴⁾ l. c.

⁵⁾ Nernst, Theoret. Chem., 7. Aufl., S. 243.

berechnet wurden, während die rechten als Mittelwerte der nach der Formel von Valentiner erhaltenen Resultate berechnet sind.

Aus obiger Tabelle ersieht man, daß zwar die Werte bei den verschiedenen Tonhöhen verschieden sind, daß aber die Abweichungen noch innerhalb der Fehlergrenzen liegen, so daß daraus auf einen Einfluß der Tonhöhe auf die Schallgeschwindigkeit und damit auf den Wert k des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen innerhalb des benutzten Tonbereichs nicht geschlossen werden kann, zumal die mittleren Werte die kleinsten sind.

In der folgenden Tabelle sind die bisherigen Bestimmungen von k_{CO_2} zusammengestellt¹⁾.

Name	Methode	t	k_0 , reell	k_0 , reell Mittelwert
Röntgen	Cl. u. D.	19,5	1,3121	1,3104
Lummer u. Pringsheim . .	L. u. P.	11	1,3058	
Moody	L. u. P.	25	1,3152	
Partington	L. u. P.	17	1,3084	
Wüllner	Ber. d. Partington	0 ⁰	1,3208	1,3155
Wüllner	Ber. d. Keutel	0 ⁰	1,3140	
Capstick	Kundt	20 ⁰	1,3154	
Thibaut	Behn u. Geiger	15 ⁰	1,3132	
Beckmann	Kundt	15 ⁰	1,3128	
Tornau	Quincke	0 ⁰	1,3185	

Der Mittelwert der nach der Methode von Clément und Désormes gefundenen Werte von k_0 ist etwas kleiner als der Mittelwert der aus der Schallgeschwindigkeit gefundenen Werte, was vielleicht als Stütze für die Richtigkeit der anfangs gegebenen Überlegungen anzusehen ist, denn bei der Methode von Clément und Désormes haben wir sehr viel langsamere Zustandsänderungen als bei den Schallschwingungen. Und es ist vielleicht anzunehmen, daß ein nicht vollständiger Ausgleich zwischen der fortschreitenden und der inneren Energie der Molekeln letztere kleiner und damit den Wert von k dem Werte für einatomige Gase näher, also größer ergibt. Indessen ist die gefundene Differenz zu klein, um als sicher angesehen werden zu können und daraus so weitgehende Schlüsse zu ziehen.

¹⁾ F. Keutel, Inaug.-Diss. Berlin, S. 69—75, 1910; H. W. Moody, Phys. ZS. **13**, 383, 1912; Lummer u. Pringsheim, Ann. d. Phys. **64**, 553, 1898; J. R. Partington, Phys. ZS. **14**, 969, 1913; R. Thibaut, Inaug.-Diss. Tübingen 1910; B. Beckmann, Arkiv för Mat., Astron. och Fis. **7**, No. 27, 1912.

V. Zusammenfassung.

1. Das Ergebnis vorliegender Untersuchungen für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen für Kohlendioxyd hat bei 0° den Wert:

$$k_0 = 1,3165 \pm 0,000\,32.$$

2. Ein etwaiger Einfluß der benutzten Tonhöhe auf die Schallgeschwindigkeit und damit auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen konnte für den Tonbereich $n = 256$ bis $n = 1024$ nicht festgestellt werden.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle in Dankbarkeit meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. F. Richarz, für die Anregung zu dieser Untersuchung und das mir in reichem Maße entgegengebrachte Wohlwollen zu gedenken.

In gleicher Weise danke ich herzlichst Herrn Prof. F. A. Schulze für die dauernde liebenswürdige Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit.

Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen¹⁾.

I. Mitteilung:

Allgemeine Beschreibung der Erscheinungen und Untersuchungsmethoden.

Von H. Mark, M. Polanyi und E. Schmid in Berlin-Dahlem.

Mit 9 Abbildungen und 5 Tafeln (Tafel I—V). (Eingegangen am 18. Juli 1922.)

Gesichtspunkte der Untersuchung.

Belastet man einen Metalldraht über die Grenze elastischer Deformationen (Elastizitätsgrenze), so erreicht er unter dem Einfluß der angehängten Last trotz des abnehmenden Querschnittes einen Gleichgewichtszustand und kommt zur Ruhe. Er hat sich also durch die Dehnung verfestigt, die Elastizitätsgrenze ist hinaufgerückt. Nun entstehen die Fragen:

Wie ändert sich die Struktur des Drahtes bei der Dehnung und inwiefern könnte eine gefundene Strukturänderung die Verfestigung erklären?

Zur Beantwortung dieser Fragen werden uns neuere röntgenographisch gefundene Resultate als Leitung dienen: der Befund, daß durch Dehnen verfestigte Drähte eine ganz bestimmte Anordnung ihrer Kristallite relativ zur Drahtachse aufweisen und die damit verwandte Tatsache, daß die natürlich gewachsenen Faserstoffe aus ganz ähnlich angeordneten Kristallen bestehen, was wohl auch ihre künstlich nicht nachzuahmenden Festigkeitseigenschaften bedingt²⁾. Wir fragen also insbesondere:

Auf welche Weise kommt die „Faserstruktur“ der Metalldrähte bei der Dehnung zustande?

Wie läßt sich die Verfestigung auf die entstandene Faserstruktur zurückführen, bzw. die hohe Festigkeit von Faserstoffen nach analogen Gesichtspunkten verstehen?

In einem polykristallinen Draht wird die Analyse des Dehnungsvorganges durch die unübersehbaren interkristallinen Vorgänge sehr erschwert. Es wurden daher Versuche angestellt, um zu prüfen, ob

¹⁾ Verh. d. D. Phys. Ges. **3**, 57, 1922.

²⁾ Literatur siehe bei M. Polanyi, Die Naturwissenschaften **16**, 441, 1922.

bereits Einzelkristallen eine Dehnungsverfestigung zukommt. Das Resultat war durchweg positiv. Steinsalzkristalle konnten durch verschiedene mechanische Beanspruchungen verfestigt werden. Desgleichen verfestigten sich Wolfram- und Zink-Einkristalldrähte durch Dehnung¹⁾. Die Elastizitätsgrenze wurde bei den Einkristalldrähten stets viel niedriger gefunden als bei den kristallinen Drähten aus gleicher Substanz, Einkristalle sind also immer duktiler. Daß es festere und weniger feste Einzelkristalle gibt, beweist auch der Umstand, daß aus derselben Schmelze einmal Zinkkristalle hergestellt werden konnten, die sich auf das Fünf- bis Sechsfache, ein andermal solche, die sich nur um wenige Prozente dehnen ließen²⁾. Ähnliches fand sich bei anderen Metallen, auf die in vorliegender Arbeit nicht genauer eingegangen werden soll. Hier sei nur erwähnt, daß wir aus derselben Schmelze Sn-Kristalle erhielten, die auf das Achtfache dehnbar waren und ganz undeformbar³⁾. Es gelang ferner, Wismutkristalle herzustellen, die schlaffer waren als Blei und sich bei 200° auf das Dreifache dehnten, dann wieder aus derselben Schmelze Kristalle von der normalen Sprödigkeit des Wismuts.

Damit war zunächst qualitativ bewiesen, daß sich Einzelkristalle ebenso verfestigen lassen, wie kristallinische Gefüge.

Als Nächstes mußte also die Dehnung der Einzelkristalle untersucht werden: auf welche Weise spiegelt sich die Dehnung in der Kristallstruktur wider und wie können die Veränderungen im Kristall zur Ursache der Verfestigung werden?

Als Material soll zunächst der Zink-Einkristalldraht dienen und genauer nur die engere Frage nach den Vorgängen untersucht werden, die sich bei der Dehnung der dehnbaren Zinkdrähte abspielen. Denn das Prinzip, nach dem ihre Verfestigung erfolgt, ist sicherlich mitverantwortlich für das Verhalten der von Haus aus undeformbaren Zink-E.K.-Drähte. Auf diesen Zusammenhang soll aber bloß hingewiesen werden; das Hauptgewicht legen wir auf die Untersuchung der Dehnung, also auf das Studium dehnbarer Drähte und der Standpunkte, die sich daraus für die Beantwortung der oben gestellten Fragen eröffnen.

¹⁾ M. Polanyi, ZS. f. Elektrochem. **28**, 16, 1922; H. Schönborn, ZS. f. Phys. **8**, 377, 1922; E. v. Gomperz, ebenda **8**, 184, 1922.

²⁾ E. v. Gomperz, l. c.

³⁾ Vgl. auch H. Burger, Physica **2**, 56, 1922, der Sn-Kristalle durch Erhitzen auf 220° in dehnbare Form überführt hat. Zitiert nach ZS. f. Metallkde. **44**, 258, 1922.

Allgemeine Beschreibung der Erscheinungen und Untersuchungsmethoden.

1. Herstellung der Drähte. 2. Die Dehnbarkeit. 3. Äußere Formänderung bei der Dehnung. 4. Zeichnungen auf der Mantelfläche des Drahtes. 5. Die Reißstellen. 6. Röntgenographische Bestimmung der Gitterorientierung. 7. Metallographische Untersuchungen. — Rückblick. Belege für die Einkristallnatur.

1. Herstellung der Drähte. Die Kristalle wurden nach der von v. Gomperz modifizierten Czochralskischen Methode aus der über den Schmelzpunkt erhitzten Schmelze gezogen. Am zweckmäßigsten erwies sich dabei die in Fig. 1 skizzierte Anordnung. Die Kühlung durch das inerte Gas (N_2) erfolgte in Abweichung von der früheren Anordnung durch ein umgebogenes Rohr (R) und wurde manometrisch genau kontrolliert. Über den ganzen elektrischen Ofen

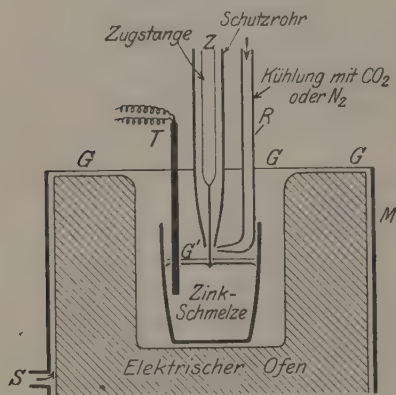


Fig. 1. Schema der Herstellung der Zinkkristalle.

war ein Schutzmantel (M) aus Blech gestülpt, dessen Deckel ein Glimmerfenster (G) trägt, das für die Durchführung des Zugrohres (Z), des Kühlrohres (R) und des Thermoelementes (T) durchlocht war. Das Innere des Mantels wird durch den Kohlensäurestrom (S) gespült. Zweckmäßig für die Herstellung dehnbarer Drähte ist die Einhaltung der von v. Gomperz ermittelten Herstellungsbedingungen: hohe Temperatur der Schmelze und große Zuggeschwindigkeit (0,2 bis 0,1 mm/sec). Doch auch bei günstigsten Erzeugungs-

bedingungen gelingt es vorläufig noch nicht, die Entstehung dehnbarer Drähte eindeutig zu erzwingen. Man kann es aber immer so weit bringen, daß etwa die Hälfte der entstehenden Drähte dehnbar wird¹⁾.

Dehnbare Drähte kann man nur aus sehr reinem Zn erzeugen. Das verwendete Kahlbaum-Zn enthielt weniger als 0,03 Proz. Verunreinigungen. Dagegen konnte aus dem Merckschen reinsten Präparat, das nach unseren Analysen 0,087 bis 0,097 Proz. Pb, 0,18 bis 0,22 Proz. Cd und weniger als 0,003 bis 0,005 Proz. Cu enthielt, kein dehnbarer Zn-Kristall mehr hergestellt werden.

¹⁾ Dagegen hat man es stets in der Hand, spröde Drähte zu erzeugen. Bei langsamem Zug (weniger als 0,1 mm/sec) entstehen ausschließlich solche Kristalle.

Diese geringen Beimengungen genügen demnach, um das Entstehen dehnbarer Drähte zu verhindern. Auch Sättigung der Schmelze mit O_2 (ZnO) scheint den gleichen Effekt zu haben.

2. Die Dehnbarkeit. Die Einteilung der E. K.-Drähte in spröde und dehnbare ist keine scharfe. Allerdings ist in extremen Fällen der Unterschied in der Dehnbarkeit sehr groß. Ganz spröde Drähte dehnen sich um wenige Prozente, und zwar sprungweise, unter hörbarem Knacken. Extrem dehnbare lassen sich bei Zimmertemperatur bis auf das Sechsfache verlängern, die Dehnungskurve ist meist glatt und ohne Sprünge¹⁾.

Die Mehrzahl der untersuchten Drähte war von mittlerer Dehnbarkeit, den gewöhnlichen Verlauf ihrer Dehnungskurve zeigt Fig. 2.

Bei gleichen Drähten ist die maximal erreichbare Dehnung eine Funktion der Temperatur. In flüssiger Luft ($T = 80$) ist überhaupt keine Dehnung zu merken. Bei Kohlen säuretemperatur ($T = 191,5$) ist bereits Dehnung bis zu 30 Proz. beobachtet worden, allerdings nur, wenn die Last sehr vorsichtig gesteigert wurde. Bei gewöhnlicher Temperatur kommt, wie gesagt, im Höchsthalle sechsfache Dehnbarkeit vor. Über die Dehnungen, die bei erhöhter Temperatur bei einer Reihe von Drähten erreicht wurden, gibt die Tabelle 1 Aufschluß.

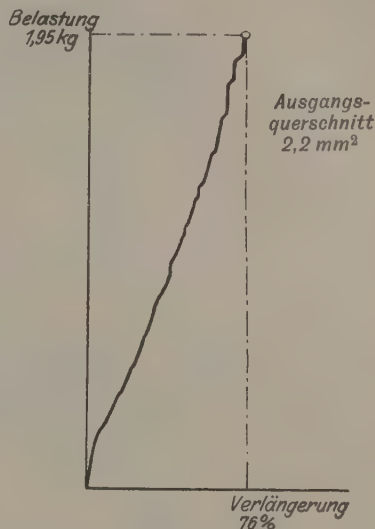


Fig. 2.
Dehnungskurve eines Zn-Kristalles
mittlerer Dehnbarkeit.

Tabelle 1. Dehnungen von sechs Drähten
bei erhöhter Temperatur.

t in Celsius	Dehnung	t in Celsius	Dehnung
180 ⁰	5,5-fach	200 ⁰	4,5-fach
180	6,5 "	205	13 "
190	4 "	205	17 "

Die Elastizitätsgrenze ist so niedrig, daß sie vorläufig nicht bestimmt werden konnte; sie liegt ungefähr bei 100 g/mm^2 . Bei $T = 80$

¹⁾ Vgl. die Kurven bei v. Gomerz, l. c.

fällt die Elastizitätsgrenze mit der Reißfestigkeit zusammen. Die hierfür gefundenen Zahlen enthält Tabelle 2. Sie gruppieren sich um etwa $2,5 \text{ kg/mm}^2$. Das ist nicht viel mehr als der zehnte Teil der Reißfestigkeit gewöhnlicher Zinkdrähte¹⁾. Ebenso klein ist die Reißfestigkeit „spröder“ Drähte, sowohl bei gewöhnlicher Temperatur wie bei $T = 80$. Man sieht darauf bezügliche Zahlen in Tabelle 3.

Tabelle 2. Zerreißfestigkeit dehnbarer Drähte
bei $T = 80^\circ$.

Querschnitt in mm^2	Z in kg pro mm^2	Querschnitt in mm^2	Z in kg pro mm^2
0,28	2,3	0,21	3,1
	2,2	0,34	1,5
0,20	2,9	0,31	2,2
	2,4	0,25	2,8
	2,6	0,88	2,5

Mittelwert 2,5.

Tabelle 3. Zerreißfestigkeit eines spröden Drahtes
(Querschnitt = $1,4 \text{ mm}^2$).

T abs.	Z in kg pro mm^2	T abs.	Z in kg pro mm^2
80 ⁰	2,1	290 ⁰	2,3
80	3,1	290	2,1
80	2,7	290	2,2
80	2,7	290	2,1
80	3,6	290	2,1
Mittelwert . . . 2,8		Mittelwert . . . 2,2	

Die Dehnung der Drähte erfolgte unter langsamer Steigerung der Last im Schopperschen Dehnungsapparat, oder mit einer eigenen Vorrichtung, in der die Last durch zufließendes Quecksilber allmählich erhöht wurde. Die Formänderung ging unter diesen Umständen durchschnittlich in etwa fünf bis zehn Minuten vor sich.

Daß durch die Dehnung der Draht seine Dehnbarkeit einbüßt, sieht man in Fig. 3. Sie zeigt zwei Scharen aufeinanderfolgender Dehnungskurven, wie sie entstehen, wenn man einen dehnbaren Draht bis zum Reißen dehnt, dann eines der Bruchstücke wieder dehnt, bis es reißt usw. Die Kurve 1 (Fig. 3a) zeigt eine Dehnung um etwa 620 Proz., die nächste, daß ein dabei entstehendes Bruchstück nach kaum 15proz.

¹⁾ Vgl. z. B. Bach-Baumann, Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. J. Springer 1921.

Dehnung riß; ebenso riß ein bei dieser zweiten Dehnung abfallendes Bruchstück, fast ohne sich zu dehnen (Kurve 3). Dabei hatte die Dehnung der Bruchstücke anderen Charakter als die Dehnung des Ausgangsdrahtes; sie bestand bloß aus einer kurzen Einschnürung von etwa 1 bis 2 mm Länge („Nachdehnung“). Kurvenscharen wie in Fig. 3 b entstehen, wenn der Draht bei der Dehnung vorzeitig riß (Kurve 1 und 2); erst nach der zweiten Dehnung verschwindet die Dehnbarkeit, wie dies die Kurven 3 und 4 zeigen.

Auffallend ist, daß die Last, die die Bruchstücke aushalten, oft wesentlich geringer ist, als die Endbelastung des Drahtes, aus dem sie entstanden sind. Auf diese, als Entfestigung zu deutende Erscheinung soll hier nicht näher eingegangen werden.

3. Äußere Formänderung bei der Dehnung. Das Merkwürdigste bei der Dehnung der E.K.-Drähte ist, daß die dabei eintretende Verjüngung des Querschnittes auch nicht annähernd gleichmäßig erfolgt, sondern unter charakteristischen Formänderungen vor sich geht.

Unsere E.K.-Drähte waren vor der Beanspruchung angenähert Kreiszylinder, die, abgesehen von zuweilen vorkommenden Längsrillen, durchaus gleichmäßig gestaltet waren. (Die Dicke wechselte zwischen etwa 2 und 0,5 mm.)

Wurde nun ein solcher (dehnbarer) Kristall gedehnt, so erfolgte die entsprechende Querschnittsabnahme lediglich durch Abflachung des Drahtes. Der neue Querschnitt ist also eine meist flache Ellipse, deren große Achse mit dem Durchmesser des Ausgangsdrahtes übereinstimmt und deren Achsenverhältnis gleich dem Verhältnis von Anfangslänge zu Endlänge ist. Ein durch eine solche Flachdehnung entstandenes Band ist in Tafel II, Fig. 12 zu sehen, auf die wir noch zurückkommen. Weitere Bilder solcher Bänder folgen in der nächsten Mitteilung, wo die Flachdehnung eingehender erörtert wird.

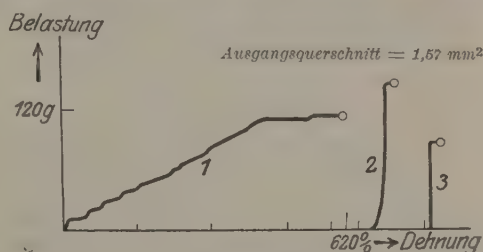


Fig. 3 a.

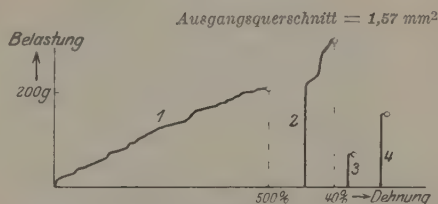


Fig. 3 b.

Dehnungskurven bei mehrfacher Dehnung.

Die Flachdehnung ist der wesentliche Mechanismus der Zinkkristalldehnung, doch ist sie nicht die einzige Gestaltsänderung, die der Drahtquerschnitt bei der Dehnung erleidet. Kurz vor dem Reißen schnürt sich nämlich der flachgedehnte Draht meistens nochmals ein und dehnt sich auf diese Weise noch um etwa 0,5 bis 2 mm. Dieser Vorgang ist der oben bereits als Nachdehnung erwähnte Prozeß, der auch dann eintritt, wenn ein Bruchstück eines (flach) gedehnten und zerrissenen Zinkkristalls nochmals bis zum Reißen beansprucht wird.

Auch bei der Nachdehnung erfolgt die Querschnittsveränderung wie bei der Flachdehnung so, daß ein Durchmesser des ursprünglichen Drahtquerschnittes unverändert bleibt, und zwar ist dies der Durchmesser senkrecht zur Bandfläche.

Blickt man also auf die Einschnürungsstelle in Richtung des Bandes, so erscheint der Umriß des Drahtes unverändert, senkrecht zur Bandfläche dagegen sieht man eine Verjüngung, deren Maß dem Verhältnis der Ausgangslänge zur Endlänge des gedehnten Stückes gleichkommt.

Diese Verhältnisse zeigen die Photographien (Taf. I, Fig. 1 und 2), die von einem Draht aufgenommen wurden, der einen besonders langen Nachdehnungsfaden von etwa 5,5 mm aufwies. Die Bilder stellen die Einschnürungsstelle erst senkrecht zur Bandfläche, dann in Richtung der Bandfläche gesehen dar. Im letzteren Falle deutet bloß ein Reflex die Stelle an, wo die Verjüngung einsetzt.

Die Figur zeigt, daß die Dehnung im „nachgedehnten“ Teil eine beträchtliche war. Die Ausmessung ergibt Dehnung auf das 4,6fache. Bei erhöhter Temperatur ($t = 100^\circ \text{C}$) ist Nachdehnung bis auf das Achtfache beobachtet worden.

4. Zeichnungen auf der Mantelfläche des Drahtes. Die Mantelfläche der Drähte ist von Haus aus im allgemeinen glatt. Zuweilen nur, wenn bei der Erzeugung des Drahtes das Glimmerblättchen, durch dessen Loch der flüssige Strang aus der Schmelze gezogen wird (G' in Fig. 1), zu nahe an den Draht herankommt — also vornehmlich bei dicken Drähten —, kann es vorkommen, daß die Umrandung des Loches sich auf der Mantelfläche mehrfach als kreisförmige Rille einzeichnet. Diese Rillen entstehen dann durch die periodische Bewegung des Glimmerblättchens in gleichmäßigen, kleinen Abständen, so daß der Draht hierdurch an einzelnen Stellen gleichmäßig quergestreift erscheint¹⁾. Eine solche von Anfang an bestehende Querstreifung äußert sich auch nach der Dehnung noch in einer Zeichnung von besonderer Form.

¹⁾ Ein gutes Beispiel hierfür zeigt Fig. 23 der Tafel IV.

Doch wollen wir von diesen atypischen Sonderfällen zunächst absehen und jene Zeichnungen besprechen, die erst bei der Dehnung der Kristalle entstehen und mit dem Mechanismus des Dehnungsvorganges innig verknüpft sind. Diese Zeichnungen, die man ihrer Entstehung nach als Gleitlinien ansprechen muß, sind zweierlei Art: die elliptischen und die schrägen Gleitlinien.

a) Das Auftreten der elliptischen Gleitlinien ist eine typische Begleiterscheinung des Flachdehnungsvorganges. Sobald dieser einsetzt, tritt sie mehr oder weniger deutlich auf — wie man es in einer Reihe der später gezeigten Lichtbilder sieht. Ein typisches Beispiel zeigt das Kristallband in Tafel I, Fig. 3, dessen ganze Mantelfläche mit gleichmäßig dicht aufeinanderfolgenden, parallelen Gleitellipsen bedeckt ist.

Das Band war so flach (Achsenverhältnis der Querschnittsellipse 1:0,15), daß durch die ebene Darstellung im Bilde keine nennenswerte Verzerrung entstehen kann. Es läßt sich also feststellen, daß die Gerade, welche die Scheitelpunkte der Ellipsen verbindet, parallel zu den Bandkanten (bzw. Drahtachse) verläuft und diese Scheitelgerade merklich von der Mittellinie abweicht, die Ellipsenscheitel also exzentrisch liegen.

Die Gleitellipsen treten bei erhöhter Temperatur deutlicher auf als bei normaler. Daher sind Versuche, bei denen eine Ausmessung der Zeichnung in Aussicht genommen war, stets in der Wärme (etwa 180° C) ausgeführt worden.

Die Ausmessung erfolgte im Mikroskop und wurde unter der Voraussetzung ausgeführt, daß die Zeichnungsellipsen der Kristallbänder ebene Kurven sind und daß die Form dieser Bänder selbst einem elliptischen Zylinder nahekommmt. Der ganze Zusammenhang der nachfolgenden Arbeiten wird diese Voraussetzungen weitgehend bestätigen, aber auch zeigen, daß gewisse Abweichungen von denselben vorkommen. (Vgl. insbesondere das in der III. Mitteilung zu Tafel VI, Fig. 33 Gesagte.)

Die Ausmessung hatte zum Gegenstand die Feststellung

- a) der Achsen der Zeichnungsellipse,
- b) des Winkels zwischen Ellipsenebene und Drahtachse,
- c) des Winkels zwischen großer Ellipsenachse und Mittelebene des Bandes als Maß der Exzentrizität der Scheitellage der Ellipsen.

Aus dem folgenden geometrischen Schema Fig. 4 ist zu ersehen, welche Parameter zu diesem Zwecke gemessen wurden, und man findet in demselben auch die Begründung für die folgenden Formeln,

beträchtlichere Fehler als für die Achsen. Es wurde daher zumeist vorgezogen, die Projektion von β direkt mit einem Mikroskop mit Drehtisch auszumessen, wobei allerdings die Lage der großen Achse durch Schätzung festgelegt werden mußte. In einfacher Weise läßt sich schließlich auch noch der Winkel ι bestimmen, um welchen durch die exzentrische Lage der Gleitellipsen ihre Flächennormale aus der Mittelebene des Bandes herausgedreht ist. Man findet für $\operatorname{tg} \iota$ den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \iota = \sin \nu \cotg \mu.$$

Das nachfolgende Beispiel zeigt, wie eine solche Messung ausgeführt und die Formeln angewendet wurden.

Die mehrfache Messung der Strecken a , b und A wurde mit einem Okularschraubenmikrometer durchgeführt und ergab als Einzelbeobachtungen (in Klammern) und Mittelwerte die Zahlen

$$a = (230, 242, 236) = 235 \text{ partes} = 0,59 \text{ mm},$$

$$b = (351, 370, 344, 341, 357) = 353 \text{ partes} = 0,88 \text{ mm},$$

$$A = 22 \text{ partes} = 0,055 \text{ mm},$$

da 1 pars = 0,0025 mm war.

Die Dimensionen des Bandes waren $d = 0,23 \text{ mm}$, $h = 1,48 \text{ mm}$.

Daraus berechnet sich zunächst $\mu' = 79^\circ$, $\nu = 9^\circ 40'$ und weiter

$$A = 0,89 \text{ mm}, \quad B = 0,69 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \chi = 9^\circ 50'.$$

Für β findet man $19^\circ 50'$, während die direkte Ausmessung dieses Winkels etwa 24° ergibt. ι ergibt sich schließlich zu $1^\circ 52' 1)$.

b) Die zweite Art typischer Zeichnungen, die schrägen Gleitlinien der Kristallbänder, tritt erst gegen Ende der Dehnung auf. Die sie verursachenden Gleitungen bedingen die gegen Ende der Dehnungskurve auftretenden Sprünge.

Diese Zeichnung durchkreuzt die bereits vorhandenen Gleitellipsen und unterscheidet sich von diesen wesentlich dadurch, daß sie nicht gleichmäßig über den ganzen Draht, sondern an einzelnen, unregelmäßig verteilten Stellen auftritt. So zeigt z. B. das Bild Tafel I, Fig. 4 ein von der schrägen Zeichnung besonders dicht durchsetztes Kristallband.

Während Tafel I, Fig. 4 nur ein System paralleler schräger Gleitlinien aufweist, zeigt Tafel I, Fig. 5, daß zuweilen auch ein zweites System an demselben Draht auftreten kann. Mehr als zwei solcher Systeme sind nie beobachtet worden. Wenn zwei Streifungssysteme auftreten, belegen sie verschiedene Teile des Drahtes, so daß Überkreuzung nicht stattfindet.

1) Man sieht, daß die hier schon ziemlich exzentrische Lage der Gleitellipsenscheitel nur eine geringe Herausdrehung des Flächenlotes zur Folge hat. ι wird also nur in seltenen Fällen 2° übersteigen.

Eine Ausmessung der schrägen Zeichnung erübrigte sich, da es gelang, die Ebene, deren Umrandung sie bildet, durch Zerreißen des Kristallbandes bei tiefen Temperaturen freizulegen¹⁾. Diese Ebene wurde dann ausgemessen.

c) Schließlich ist noch eine weitere, bereits oben erwähnte atypische Art von Zeichnungen der Kristallbänder anzuführen; jene nämlich, die als Folge einer etwa von Haus aus vorhandenen Querstreifung des E.K.-Drahtes auftritt. Diese Zeichnung gleicht ihrer Form nach den Gleitellipsen, nur sind hier die Ellipsen meistens noch länglicher. Sie ist gröber, weniger dicht, ungleichmäßiger und unschärfer als die Gleitellipsen. Hervorzuheben ist, daß sie an fertiggedehnten Kristallbändern stets entgegengesetzt zu jenen orientiert ist. Dieses Verhalten zeigt Tafel I, Fig. 6. In der schematischen Nachzeichnung (Fig. 5) ist der Lauf der Gleitellipsen durch feine Linien angedeutet, jener der atypischen Ellipsen durch dicke Striche. An dem Bilde

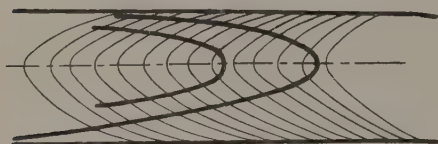


Fig. 5. Gleitellipsen (fein) und atypische Ellipsen (dick).

fällt auch auf, daß die die Scheitel der atypischen Ellipsen verbindende Gerade mit jener der Gleitellipsen zusammenfällt.

Der hier angegebene Ursprung der atypischen Streifung läßt sich direkt

nachweisen an solchen Stellen, wo ein flachgedehntes Kristallband an ein noch ungedehntes Stück angrenzt; man sieht dort die atypischen Ellipsen in die kreisförmige Querstreifung des ungedehnten Teiles direkt übergehen.

Einen weiteren Beweis für unsere Behauptung erhält man, wenn man an den Draht vor der Dehnung einen kreisförmigen Ritzer macht und diesen nach der Dehnung beobachtet. Der Ritzer geht dabei in eine Ellipse über, die sich genau wie eine atypische Streifung verhält. Man sieht dies in Tafel I, Fig. 7 und Tafel II, Fig. 8. An den mit Pfeilen hervorgehobenen Stellen sind drei kreisförmige Ritzer zu sehen, die nach der Dehnung in die Ellipsen der Fig. 8 übergehen. Diese Ellipsen zeigen gegen die Gleitellipsen genau das im Schema Fig. 5 gekennzeichnete Verhalten.

5. Die Reißstellen. Die Einkristallnatur der verwendeten Zn-Drähte äußert sich am markantesten darin, daß sie unter bestimmten Bedingungen in glatten Kristallflächen reißen.

¹⁾ Die Gleitebene der elliptischen Streifung läßt sich nur ausnahmsweise freilegen, vgl. Tafel IV, Fig. 24.

Fast immer erhält man Kristallflächen beim Reißen spröder Kristalle. Nur nahe beim Schmelzpunkt verhalten sich diese meistens anders. Die Reißflächen spröder Kristalle stehen nahezu quer zur Drahtachse. Man sieht eine solche Fläche in Tafel II, Fig. 9 photographisch dargestellt.

Flachgedehnte Drähte reißen bei gewöhnlicher Temperatur nur ausnahmsweise in Kristallflächen, doch erhielten wir schon bei $T = 191,5$ stets Kristallflächen als Reißstellen von Kristallbändern. Diese Kristallflächen schneiden die Drahtachse unter schiefen Winkeln (von etwa 60 bis 65°) und stehen auch nicht genau quer zur Bandfläche. Es sind Ellipsen, die um so stärker abgeflacht sind, je flacher das Kristallband selbst ist. Tafel II, Fig. 12 zeigt eine solche Fläche.

Wie bereits erwähnt, ließ sich feststellen, daß die Umrandung dieser Reißflächen genau in ein System parallellaufender schräger Gleitlinien hineinpaßt. Tafel I, Fig. 5 zeigt dies für die beiden Endflächen des dargestellten Bandes.

Die Reißflächen der Kristallbänder tragen eine typische Streifung, die aus parallelen Linien besteht, welche mit der großen Ellipsenachse nahezu zusammenfallen. Im Höchsthalle bildeten sie mit dieser einen Winkel von etwa 15° . Eine typisch gestreifte Kristallbandreißfläche sieht man in Tafel II, Fig. 13.

Beansprucht man einen dehnbaren Draht bei tiefen Temperaturen ($T = 191,5$ oder weniger), so reißt er in einer Kristallfläche, ohne zuvor in die Bandform überzugehen.

Solche Reißflächen sind von jenen, die an Kristallbändern auftreten, sehr verschieden. Die Neigung zur Drahtachse wechselt in weiten Grenzen von 90° bis etwa 16° . Die Flächen sind weniger stark gestreift und glänzender: sie sind oft schwach gekrümmt, und zwar in Richtung der großen Achse. Die Streifung besteht im Höchsthalle aus drei Systemen paralleler Linien, deren Richtungen, wie die nachfolgend (II. Mitteilung) mitgeteilte Ausmessung zeigen wird, die Seiten eines gleichseitigen Dreieckes bilden. Am stärksten ist immer jene Streifung ausgeprägt, deren Richtung am wenigsten von der kleinen Ellipsenachse abweicht. Das Bild Tafel II, Fig. 10 zeigt einen bei $T = 191,5$ in einer Kristallfläche gerissenen dehnbaren Draht. Tafel II, Fig. 11 zeigt die Reißfläche eines dehnbaren Drahtes mit stark ausgeprägter Streifung in der Aufsicht; man sieht, daß die Fläche zum Teil gewellt ist.

Die Untersuchung der Reißflächen war von zweierlei Art. Es erfolgte a) goniometrische Ausmessung der Neigungswinkel und b) mikroskopische Ausmessung der Streifungen.

Goniometriert wurde im Zweikreisgoniometer. Gegenstand der Messung war entweder die gegenseitige Neigung zweier Reißflächen an demselben Drahte oder Neigungswinkel der Reißfläche zur Drahtachse. Die Genauigkeit der Messung hing von der Güte der vorliegenden Kristallfläche ab, bei stark gestreiften Flächen war sie geringer. Um diese Messungen beurteilen zu können, teilen wir nachfolgend einige Versuchsprotokolle mit.

Der Winkel (ψ) der Reißflächennormalen gegen die immer horizontal justierte Drahtachse wird durch seine Horizontalprojektion (α) und die Höhe (φ) der Normalen durch die Beziehung

$$\cos \psi = \cos \alpha \cos \varphi$$

bestimmt, worin α und φ die direkten goniometrischen Messungsergebnisse sind.

Für zwei gut meßbare Flächen ergaben sich z. B. die Werte

$$\begin{aligned}\alpha &= 3^{\circ} 50', 3^{\circ} 35', 3^{\circ} 45', \\ \varphi &= 74^{\circ} 35', 74^{\circ} 25', 74^{\circ} 15'\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha &= 67^{\circ} 39', 66^{\circ} 58', 66^{\circ} 58', 67^{\circ} 16', \\ \varphi &= 28^{\circ} 13', 28^{\circ} 16', 28^{\circ} 10',\end{aligned}$$

welche nur wenig streuen.

Die zwei weiteren Beispiele an ziemlich stark gestreiften Flächen zeigen dagegen bedeutend größere Abweichungen:

$$\begin{aligned}\alpha &= 5^{\circ} 14', 6^{\circ} 30', 5^{\circ} 45', 6^{\circ} 52', \\ \varphi &= 59^{\circ} 39', 61^{\circ} 1', 59^{\circ} 47'\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha &= 30^{\circ} 54', 30^{\circ} 33', 30^{\circ} 30', \\ \varphi &= 9^{\circ} 6', 9^{\circ} 34', 10^{\circ} 7'.$$

Doch ist wohl auch hier der Fehler des Mittelwertes noch kleiner als 1° .

Die Genauigkeit der Resultate ist aber auch noch durch den Umstand beeinträchtigt, daß es sehr schwer ist, die immer leicht verbogene Drahtachse genau horizontal zu stellen. Der Gesamtfehler dürfte jedoch kaum mehr als 2 bis 3° betragen.

Der Neigungswinkel zweier Reißflächen desselben Drahtes gegeneinander wird schließlich als Neigungswinkel der zwei Flächenlote bestimmt, wobei darauf zu achten ist, die Vorzeichen von α und φ in beiden Fällen richtig zu wählen.

In der großen Mehrzahl der Fälle reißt, wie erwähnt, ein flachgedehnter Zinkkristall bei normaler Temperatur ohne Ausbildung einer Kristallfläche. Bei höherer Temperatur wurden solche über-

haupt nicht beobachtet. Unter diesen Bedingungen schnürt sich das Kristallband bei Überbeanspruchung an einer Stelle ein und reißt ungefähr in der Mitte der Einschnürungsstelle durch. Die Endflächen sind kegelförmig mit abgerundeten Spitzen.

Die Konfiguration dieser Einschnürungsstellen ist die einer mehr oder weniger charakteristischen „Nachdehnung“, der Nachdehnungsfaden reißt dann unter Ausbildung des erwähnten wenig ausgeprägten Fließkegels durch.

In Tafel II, Fig. 14 sieht man ein Bruchstück eines so gerissenen Kristallbandes mit schönem Ansatz zur Nachdehnung. Wenn auch der Nachdehnungsfaden meist nicht so lang wird, ist doch der geschilderte Charakter der Erscheinung stets unverkennbar.

6. Röntgenographische Bestimmung der Gitterorientierung. Eine der Fragen, die uns unserer Problemstellung gemäß am meisten interessieren mußte, war die, ob und wie sich die Orientierung des Kristallgitters bei der Dehnung ändert.

Zink ist hexagonal. Das von Hull¹⁾ nach der Pulvermethode röntgenographisch bestimmte Gitter läßt sich durch ein doppelt primitives, hexagonales Elementarprisma kennzeichnen. Dieses enthält außer an den acht Eckpunkten auch noch im Innern ein Zinkatom, dessen Lage in dem obenstehenden Schema ersichtlich ist (Fig. 6).

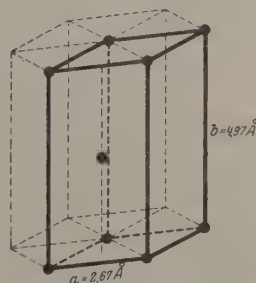


Fig. 6. Elementarkörper des Zn-Gitters nach Hull.

Die Abmessungen des Elementarkörpers sind:

$$a = \text{Sechseckseite} \quad \quad 2,67 \text{ \AA}$$

$$b = \text{Prismenhöhe} \quad \quad 4,97 \text{ \AA}$$

Die von Hull gemessenen Netzebenenabstände (D) sind in folgende Tabelle eingeordnet.

Tabelle 4.

Index	D in Å.-E.	Index	D in Å.-E.
0001	2,466	1012	1,678
1010	2,295	1013	1,337
1011	2,080	1120	1,326

¹⁾ Physical Review **17**, 571, 1921.

Es sei hier die Tatsache hervorgehoben, die später noch eine gewisse Rolle spielt, daß die dichtest belegte Ebene die Basisfläche ist, die zweitdichtest belegte die Prismenfläche erster Art und daß dann drei Pyramidenflächen folgen und schließlich erst an sechster Stelle die Prismenfläche zweiter Art.

Unsere an Einkristallen ausgeführten Untersuchungen, die wohl als Prüfung der weniger sicheren Pulvermethode betrachtet werden können, bestätigten das Hullsche Resultat. Spröde, dehbare und gedehnte Kristalle und auch die bei „Nachdehnung“ entstehenden Stellen haben alle genau das gleiche Gitter.

Festzulegen war die Gitterorientierung relativ zur Drahtachse und, bei Kristallbändern, auch relativ zur Bandfläche. Als Parameter zur Festlegung des Gitters relativ zur Drahtachse wurden gewählt:

a) der Winkel (δ) zwischen hexagonaler Achse und Drahtachse,
 b) der Winkel (π), den die Projektion der Drahtachse auf die Basisfläche mit der nächsten digonalen Achse erster Art [Seitenkante des Sechsecks, in welchem die Basis von den Prismen- und Pyramidenflächen I. Art geschnitten wird — Fig. 6]¹⁾ einschließt. Zur weiteren Orientierung relativ zur Bandfläche diente der Winkel (γ) zwischen hexagonaler Achse und Bandfläche.

Die röntgenographische Methode gestattete, aus einer Aufnahme die Gitterorientierung in bezug auf eine beliebige Richtung festzustellen. Zunächst wurde immer die Orientierung in bezug auf die Drahtachse bestimmt; falls ein Kristallband vorlag, wurde durch eine zweite Aufnahme die Gitterorientierung in bezug auf eine zweite Richtung festgelegt, und zwar wurde als solche eine in der Bandfläche gelegene Richtung gewählt, die mit der Drahtachse einen beliebigen, jedoch durch Messung bekannten Winkel (δ_0) (20 bis 50°) einschloß.

Das Gitter sei relativ zur Drahtachse mit Hilfe der Winkel δ und π orientiert, und relativ zur zweiten Richtung, die in der Bandfläche liegt, mit Hilfe der Winkel δ^* und π^* ; dann ergibt sich, wie die Konstruktion in Fig. 7 zeigt, der Winkel γ aus den drei Größen δ , δ^* und δ_0 auf folgende Weise:

\mathfrak{D} sei die Drahtachse und (\mathfrak{D}) die Bandebene.

\mathfrak{H} die hexagonale Achse und \mathfrak{H} die in der Bandebene liegende Richtung, gegen welche das Gitter ebenfalls orientiert wurde. Der gesuchte Winkel γ ergibt sich als Höhe auf die Seite δ_0 des sphärischen Dreiecks mit den Seiten δ , δ^* und δ_0 .

¹⁾ Die digonalen Achsen II. Art, welche der Schnitt der Prismen- und Pyramidenflächen II. Art mit der Basis sind, stehen senkrecht auf jenen I. Art.

Es ist zunächst

$$\cos(\delta_0, \delta^*) = \frac{\cos \delta - \cos \delta_0 \cos \delta^*}{\sin \delta_0 \sin \delta^*}$$

und weiter

$$\sin \gamma = \sin(\delta_0, \delta^*) \sin \delta^*.$$

Das Gitter ist nun eindeutig durch die Winkel δ , π und γ im Bande festgelegt.

Die erwähnte röntgenographische Methode bestand in der Drehung des Kristalles um die Bezugsrichtung bei monochromatischer Durchleuchtung senkrecht zur Drehungsachse. Die Aufnahmen wurden in einer gewöhnlichen Debye-Kamera von 7 cm Höhe und 5,72 cm Durchmesser gemacht. Verwendet wurde Kupfer-K-Strahlung ($\lambda_{K\alpha} = 1,54 \text{ \AA}$).

Die Diagramme, die man auf diese Weise erhält, sind Streifen-diagramme von der Art, wie sie in mehreren vorangehenden Mitteilungen als Faserdiagramme und Drehdiagramme diskutiert worden sind ¹⁾.

Die Tafel III, Fig. 15 zeigt ein Beispiel eines solchen, an einem Zinkkristall aufgenommenen Drehdiagramms ²⁾.

Wie aus den zitierten Mitteilungen zu entnehmen ist, kann man auf einfache Weise folgende Beziehungen gewinnen.

Wir bezeichnen den auf dem ausgebreiteten Film gemessenen Abstand eines Interferenzstreifenmaximums vom Äquator (horizontale Mittellinie) mit m , die Entfernung von der vertikalen Mittellinie mit n . Dann erhält man den Gleitwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ aus der Formel

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m^2 + r^2 \sin^2 \frac{360}{2r\pi} n}{r^2 \cos^2 \frac{360}{2r\pi} n} \quad (1)$$

¹⁾ Polanyi, ZS. f. Phys. **7**, 149, 1921. Polanyi-Weissenberg, ZS. f. Phys. **9**, 123, 1922; **10**, 44, 1922.

²⁾ Die besondere Regelmäßigkeit des Diagrammes (Anordnung der Interferenzen auf „Schichtlinien“) rührt daher, daß in diesem Falle die hexagonale Achse mit der Drehachse zusammenfiel.

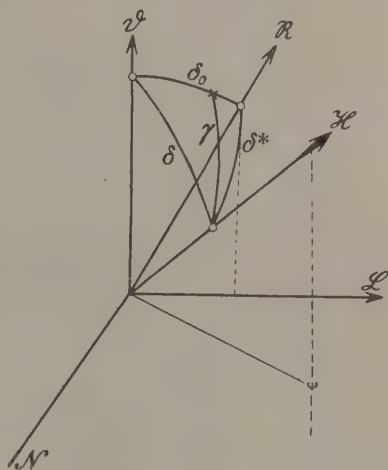


Fig. 7. Bestimmung des Winkels zwischen hexagonaler Achse und Bandfläche.

(r = Radius der Kamera) und weiter den Netzebenenabstand D aus

$$D = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}.$$

Durch die Größe D läßt sich mit Hilfe der Hullschen Tabelle die Art der reflektierenden Netzebene feststellen.

Ferner erhält man für den Winkel ϱ , den die Normale der fraglichen Netzebene mit der Drehungsachse einschließt,

$$\cos \varrho = \frac{\cos \mu_0}{2 \cos \frac{\vartheta}{2}}, \quad (2)$$

worin μ_0 durch $\cotg \mu_0 = \frac{m}{r}$ und $\frac{\vartheta}{2}$ nach Gleichung (1) gegeben sind.

Für unsere Zwecke genügt es, wie sich zeigen wird, den innersten und den darauffolgenden „Debye-Scherrer-Kreis“ in Betracht zu ziehen. Auf ersterem muß (nach der Hullschen Tabelle) die Reflexion der Basisfläche erscheinen, auf dem nächsten die Reflexionen der Prismenflächen erster Art. Allerdings kann man sich nur dann so einschränken, wenn die Basis überhaupt reflektiert, was nur bei $90 - \varrho < 71^\circ 50'$ der Fall ist. Da letzteres aber bei den Drähten, die wir untersucht haben, stets erfüllt war, so wollen wir auf das andere Verfahren, das bei $90 - \varrho > 71^\circ 50'$ einzuschlagen ist, hier nicht weiter eingehen.

Man bestimmt also zunächst die Größen m und n für die Reflexion der Basis (m_B und n_B), dann bestimmt man von den (im allgemeinen drei) Reflexionen der Prismenflächen die Größen m und n , für jene Reflexion, die das kleinste m hat (m_P und n_P). Aus diesen vier Größen erhält man nach Gleichung (2) einerseits den Winkel zwischen hexagonaler Achse und Drehachse ϱ_B , andererseits von den (im allgemeinen drei) Winkeln, die die Flächennormalen der Prismenflächen mit der Drehachse einschließen, den größten (ϱ_P).

Der Winkel ϱ_B ist die Größe, die wir oben mit δ bezeichnet haben. Aus ϱ_B und ϱ_P berechnet sich der oben mit π bezeichnete Winkel nach nebenstehendem Konstruktionsschema (Fig. 8). Man leitet aus demselben die Beziehung ab:

$$\sin \pi = \frac{\cos \varrho_P}{\sin \varrho_B}. \quad (3)$$

Das ist die Art, wie man aus den Röntgenogrammen die Bestimmungsstücke δ und π (bzw. δ^* und π^*) der Gitterorientierung gewinnt.

Ist die Gitterorientierung einmal festgelegt, so muß man daraus das ganze Röntgendiagramm berechnen können. Die Voraussetzungen,

die dabei verwendet und geprüft werden, sind die Richtigkeit der angenommenen Gitterstruktur und die Einkristallnatur des Drahtes. Man verwendet bei dieser Ausrechnung folgendes Verfahren.

Aus den Größen ϱ_B und ϱ_F , deren Bestimmung oben gezeigt wurde, berechnet man der Reihe nach die ϱ Winkel aller übrigen Netzebenen, also zunächst etwa die Winkel $\varrho_{F'}$ und $\varrho_{P''}$ der noch nicht berücksichtigten zwei Prismenflächen, dann die sechs Winkel $\varrho_{Py}^{(1)}, \varrho_{Py'}^{(1)}, \dots, \varrho_{Py}^{(V)}$ der Pyramidenflächen von der Miller-Formel (10 $\bar{1}0$),

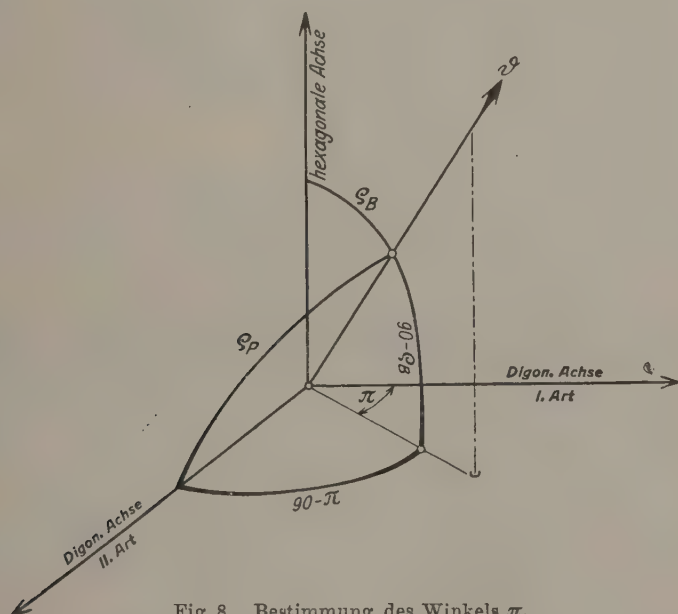


Fig. 8. Bestimmung des Winkels π .

ferner die 12 Winkel der darauffolgenden zwei Arten von Pyramidenflächen $\varrho_{Py}^{(2)}, \varrho_{Py'}^{(2)}, \dots, \varrho_{Py}^{(2)(V)}$; $\varrho_{Py}^{(3)}, \varrho_{Py'}^{(3)}, \dots, \varrho_{Py}^{(3)(V)}$ und schließlich etwa noch die drei Winkel der Prismenflächen zweiter Art.

Man kann sich diese Winkel der Reihe nach berechnen unter Annahme des Hullschen Achsenverhältnisses 1,866, indem man ausrechnet, welche Winkel die Normalen der fraglichen Flächen mit der durch δ und π festgelegten Richtung einschließen.

Aus den so erhaltenen ϱ -Werten erhält man die Parameter m und n der entsprechenden Reflexionen durch Umkehrung der obigen Formeln (1) und (2) — wobei sich zunächst auch ergibt, ob die Netzebenen überhaupt reflektieren.

Die Rechnung ist im allgemeinen sehr weitläufig und wurde daher nur in einzelnen Fällen vollständig ausgeführt. Die hierbei gefundene Übereinstimmung des berechneten Diagrammes mit dem beobachteten ist natürlich ein sicherer Beweis dafür, daß 1. die Hullsche Struktur richtig ist und im gedehnten Kristall erhalten bleibt, und 2. daß das belichtete Stück des Drahtes tatsächlich ein Kristall war.

Man ist aber durchaus nicht auf so weitläufige Rechnungen angewiesen, um festzustellen, daß ein etwa vorliegendes Diagramm nicht von einem, sondern von zweien oder mehreren Kristallen herrührt. Es muß schon ein ziemlich unwahrscheinlicher Zufall eintreten, damit sich dies nicht darin äußert, daß mehr als eine Reflexion der Basisfläche auftritt. Noch unwahrscheinlicher ist es, daß zufällig auch keine überzählige Prismenreflexion erzeugt wird, keine überzähligen Reflexionen der Pyramidenflächen usw.

Es ist also zu verstehen, daß in allen Fällen, wo wir aus anderen Befunden auf eine Zwei- oder Mehrkristallstruktur des Drahtes zu schließen hatten¹⁾, sich dies stets auch zuvor bereits aus dem Röntgenogramm leicht hat erkennen lassen.

7. Metallographische Untersuchungen. Es wurden sowohl spröde als auch dehbare und gedehnte Drähte angeschliffen und mit verdünnter Salpetersäure geätzt. Das Verfahren ist zuvor an einem Gußstück aus Kahlbaum-Zink erprobt worden, dessen geätzter Schliff, wie aus Tafel III, Fig. 17 ersichtlich, deutliche Korngrenzen ergab. Dagegen sieht man in den geätzten Schliffen der spröden, dehbaren und gedehnten Drähte, wie sie der Reihe nach in Tafel III bzw. IV, Fig. 18, 19 und 20 dargestellt sind, keine Korngrenzen²⁾. Man sieht dagegen Streifungen, die aus parallelen Scharen bestehen. Der gedehnte Draht in Tafel IV, Fig. 20 ist gekrümmt, die Streifungen krümmen sich mit.

Von solchen Scharen paralleler Streifungen (Ätzfiguren) ist in der Metallographie bekannt, daß sie stets nur das Feld eines Kornes bedecken. Unsere Drähte verhalten sich also in jeder Beziehung wie ein einziges Korn.

Eine ins einzelne gehende Deutung der Streifungen ist nicht versucht worden, weil es schwierig ist, die Schlißflächen rationell zu orientieren und die Rechnung sonst sehr umständlich wird.

¹⁾ Bei spröden Drähten kommt es oft vor, daß der Strang aus einigen der Länge nach zusammengewachsenen Kristallen besteht, was man schon an der Reißfläche sieht. So bestand z. B. ein Draht (nach röntgenographischem Befund) aus zwei Kristallen, deren einer mit der hexagonalen Achse, deren anderer mit der digonalen Achse erster Art parallel der Drahtachse stand.

²⁾ Die Umrissse der Drähte sind stellenweise zerfranst, weil sich das Zink beim Schleifen auf die einbettende Masse (Woodsches Metall) hinübergeschmiert hat.

Rückblick. Belege für die Einkristallnatur.

Wir wollen hier die gemachten Beobachtungen von dem Standpunkte aus zusammenfassen, der sie als geeignete Kriterien für die Einkristallnatur der Drähte erscheinen läßt. Solche Kriterien sind:

1. Die glatten, glänzenden Reißebenen (Kristallflächen);
2. das Fehlen der Korngrenzen und parallele Ätztstreifung im metallographischen Schlift;
3. die Tatsache, daß das Drehdiagramm alle und nur solche Reflexionen liefert, auf die man aus dem Vorhandensein eines Kristalles schließen muß.

Hervorzuheben ist noch, daß

4. sowohl die elliptischen wie die schrägen Gleitlinien parallele Scharen bilden;

5. ein Draht sich bei der Dehnung seiner ganzen Länge nach in ein einziges ungebrochenes und untordiertes Band umwandelt. Dies ist auch dann der Fall, wenn die Dehnung so vor sich geht, daß verschiedene Stellen desselben Drahtes sich unabhängig voneinander zu flachen Bändern einschüren. Eine Reihe solcher gleichorientierter Flachdehnungen sieht man in Tafel V, Fig. 26 photographisch dargestellt.

Auch andere Methoden sind noch angewendet worden, um die Einkristallnatur zu prüfen und haben die nachfolgenden weiteren Punkte ergeben:

6. Es wurden lange Drähte in kleine Stücke zerissen und die relative Lage der beiden Endflächen goniometrisch festgestellt. Die vorstehende Versuchsreihe zeigt, daß diese Endflächen merklich parallel gelegen waren.

7. In einigen Fällen wurden die zwei Enden eines langen Drahtes röntgenographisch untersucht. Die Aufnahmen der beiden Enden sind in Tafel III als Fig. 15 und 16 dargestellt; man sieht, daß die beiden Aufnahmen übereinstimmen.

Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie. Phys.-Chem. Abt.

Tabelle 5.
Parallelität der Reißflächen.

Winkel zwischen Flächen- normale und Drahtachse		Neigungs- winkel der beiden End- flächen
ψ_1	ψ_2	
4° 14'	8° 55'	6°
4	4 18	2
3 5	1 50	1
20	4 38	5
1 30	2 22	4
6 22	5 29	3
2 55	2 6	1
		Mittelwert = 3°

Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen.

II. Mitteilung.

Quantitative Festlegung des Dehnungsmechanismus.

Von **H. Mark**, **M. Polanyi** und **E. Schmid** in Berlin-Dahlem.

Mit 22 Abbildungen und 6 Tafeln (Tafel I—VI). (Eingegangen am 30. Sept. 1922.)

Einteilung. I. Geometrisch-kristallographische Deutung der Flachdehnung: 1. Die Flachdehnung als Kombination von Gleitung und Drehung; 2. Die Basisfläche als Gleitebene; 3. Bedingungen der Dehnbarkeit; 4. Gleitrichtung in der Basisfläche. — II. Der Vorgang der Dehnung: 1. Einsetzen der Flachdehnung; 2. Stoßstellen zwischen gedehntem und ungedehntem Kristall; 3. Die Dehnung als Biegegleitung. — III. Nachdehnung: 1. Nachdehnung als Biegegleitung; 2. Die Gleitfläche der Nachdehnung; 3. Orientierung des Gitters im Nachdehnungsfaden. — Zusammenfassung.

I. Geometrisch-kristallographische Deutung der Flachdehnung.

Wir wollen hier untersuchen, auf welche Weise sich das Gitter bei der Dehnung umstellt und wie aus den dabei maßgebenden geometrisch-kristallographischen Beziehungen die verschiedenen, den Dehnungsvorgang begleitenden Erscheinungen (Flachdehnung, Gleitlinien usw.) verständlich werden.

1. Die Flachdehnung als Kombination von Gleitung und Drehung. Einen guten Einblick in den Mechanismus der Flachdehnung gewährt folgender Versuch: Man reißt einen dehnbaren

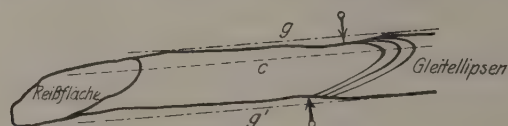


Fig. 1. Nachzeichnung eines in der Kälte gerissenen und hierauf bei erhöhter Temperatur gedehnten Drahtes. Identität von Reißfläche und Gleitellipsen. (Vgl. Taf. IV, Fig. 22.)

Draht in der Kälte, erzeugt dabei eine Reißebene, dehnt nun ein Bruchstück (womöglich bei erhöhter Temperatur) und achtet darauf, die Reißfläche und den unmittelbar angrenzenden Endteil des Drahtes zu schonen. Das Endprodukt hat dann die in Fig. 21 und 22 der Tafel IV in zwei Ansichten dargestellte Form.

Vergleicht man die Umriss der Reißebene mit den Gleitellipsen am flachgedehnten Teil, so sieht man, daß diese mit jener übereinstimmen. Noch deutlicher tritt dies durch die Nachzeichnung in Fig. 1 hervor.

Man wird also schließen, daß die Reißfläche des dehnbaren Drahtes und die zur elliptischen Zeichnung gehörigen Gleitebenen identische Gitterebenen sind.

Die Auffassung, die man so vom Dehnungsvorgang gewinnt, soll an einem Modell, bzw. dessen Photographien erläutert werden. Fig. 2 zeigt einen Holzzylinder als Modell des ungedehnten Ausgangsdrahtes,

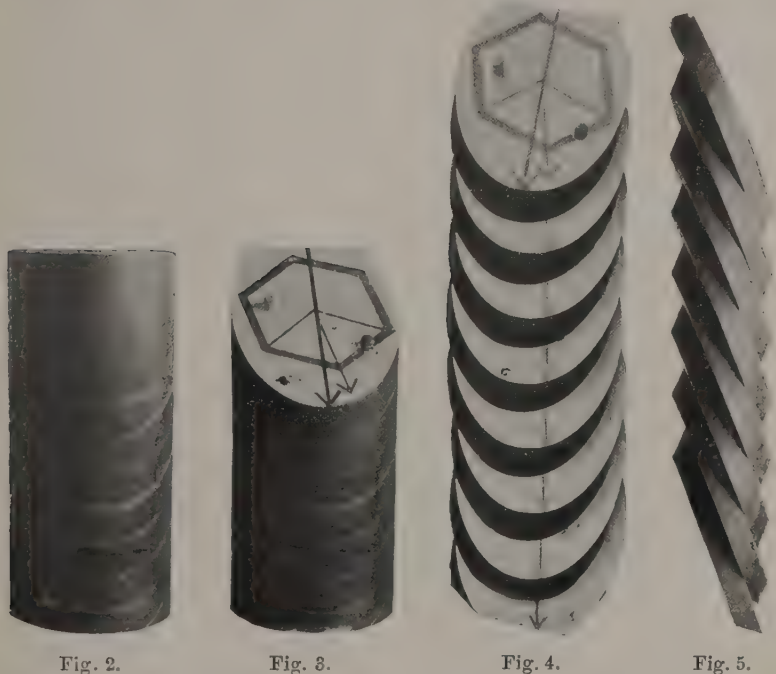


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Modell der Dehnung.

Fig. 2. Dehnbarer Draht im Ausgangszustand. An der Mantelfläche die elliptischen Spuren der Gitterebene (Basisfläche), entlang der die Gleitung erfolgen wird. — Fig. 3. Nachahmung des Reißens in der Kälte. Die Gitterebene (Basisfläche), entlang der das Gleiten erfolgen wird, als Reißfläche freigelegt. Großer Pfeil = große Achse der Gleitellipse (Richtung größter Scherungskraft bei Anspannung des Drahtes). Kleiner Pfeil = diagonale Achse 1. Art, die sich als Gleitrichtung erweist. — Fig. 4 u. 5. Vorder- und Seitenansicht des gedehnten Modells. Bandform, Gleitellipsen, exzentrische Lage der Ellipsenscheitel, Verbreiterung. Kleine Pfeile nahezu in der Mittelebene des Bandes, großer Pfeil stark aus derselben herausgedreht.

Fig. 3 den Effekt des Reißens. (Die mit dem Sechseck versehene Fläche soll die Reißfläche andeuten.)

Man erkennt, daß der Zylinder parallel zur Reißfläche in gleich dicke Schichten geteilt ist, welche sich nun, um die Dehnung nach-

zuwachsen, in einer bestimmten Richtung um einen bestimmten Betrag gegeneinander verschieben sollen. Dabei sieht man [vgl. Fig. 4 und 5¹⁾] ein „Band“ entstehen, das genau wie der Kristall in Fig. 24 der Tafel IV parallele, elliptische Gleitlinien trägt, die mit den Umrissen der Reißfläche übereinstimmen.

Man erkennt in Fig. 4 und 5, daß die Schichten im gedehnten Modell einen anderen, und zwar kleineren Winkel mit der Drahtachse einschließen als im ungedehnten: sie haben sich also relativ zur Drahtachse gedreht.

Auf die Bedeutung des Sechsecks wird später zurückgekommen, hier sei nur gesagt, daß die (acht) kurzen Pfeile die Gleitrichtung angeben, der lange Pfeil auf der Reißfläche die Richtung der großen Ellipsenachse. Man ersieht aus dem Modell ohne weiteres, daß die von der Mittellinie abweichende Lage der Ellipsenscheitel der Gleitellipsen darauf beruht, daß diese beiden Pfeilrichtungen voneinander abweichen; sie verschwindet, wenn sie übereinstimmen.

Um dieses Schema zu prüfen, haben wir zunächst die aus der Photographie bereits erkannte Übereinstimmung von Reißellipsen und Gleitellipsen auch noch zahlenmäßig zu kontrollieren.

Es wurden also Drähte in der Kälte ($T = 191,5^\circ$ oder $T = 80^\circ$) gerissen, die Reißellipsen ausgemessen, dann die Drähte in der Hitze (T etwa $= 450^\circ$) gedehnt und die entstandenen Zeichnungsellipsen vermessen. Es ergab sich, wie die Tabelle 1 zeigt, Übereinstimmung der beiden Ellipsenarten.

Tabelle 1. Identität von Reiß- und Gleitellipse.
2 A große, 2 B kleine Achse.

Reißellipse		Gleitellipse	
2 A in mm	2 B in mm	2 A in mm	2 B in mm
1,56	1,21	1,58	1,22
1,78	1,38	1,67	1,37
1,39	0,56	1,43	0,58

Natürlich kann dieser Dehnungsmechanismus nur die Entstehung der „elliptischen“ Gleitlinien erklären und sagt über die „schrägen“ nichts aus. Man erkennt aber leicht, daß die Gleitung entlang der Ebenen der schrägen Gleitlinien für die Flachdehnung ohne Bedeutung sein muß, denn es gibt ja, wie man in Tafel I, Fig. 3 der ersten Mit-

¹⁾ Der Gleichförmigkeit halber ist auch das untere Ende des Modelles entlang einer parallelen Reißfläche abgetrennt worden.

teilung gesehen hat, auch fertig gedehnte Kristallbänder fast ohne schräge Zeichnung. Wir können daher von dieser Gleitungsart bei Behandlung der Flachdehnung ganz absehen.

Unter dieser Annahme kann man nun unser Gleitungsschema zur Diskussion folgender Fragen heranziehen:

a) Wie ergibt sich die Dehnung aus der Anfangs- und Endlage der Ellipsen?

b) Wie kann man aus Anfangslage und Gleitrichtung die Querschnittsform des entstehenden Bandes für eine vorgegebene Dehnung berechnen und die Lage der Gleitellipse im Band bestimmen?

Wir denken uns hierzu die Anfangslage der Gleitellipsen gegeben durch den Winkel $\bar{\delta}$, den ihre Flächennormale mit der Drahtachse einschließt. Ferner sei die Lage der Gleitrichtung in bezug auf die große Ellipsenachse durch den Winkel $\bar{\pi}$ gegeben. Die Endlage sei bestimmt durch den Winkel $\bar{\delta}'$, den die neue Drahtachse mit der Gleitellipsennormalen einschließt. Dann ergeben sich folgende Beziehungen:

Ad a) Unsere durch das Modell (Fig. 2 bis 5) charakterisierte Auffassung der Dehnung gestattet es, den Endzustand als durch eine reine Gleitung aus dem Anfangszustand entstanden anzusehen. Wir wollen diese Anschauung den folgenden geometrischen Erörterungen zugrunde legen, ohne hierdurch der Frage vorzugreifen, ob sich die Dehnung auch wirklich so abspielt.

In Fig. 6 ist links ein zylindrischer Draht mit der Achse $DABD$ dargestellt. Zwei Gleitebenen, die die Achse in A und B schneiden, sind durch ihre Schnitte hervorgehoben.

Wir denken uns nun alle zwischen A und B gelegenen Gleitschichten parallel zu der durch den Pfeil angedeuteten Gleitrichtung verschoben, und zwar jede Schicht um den gleichen Betrag relativ zur Nachbarschicht, so daß das Drahtstück AB in das Kristallband AB' übergeht. Auf die merkwürdige Form des dabei entstehenden Körpers mit der doppelt geknickten Achse $DAB'D'$ kommen wir später (S. 103) zurück, vorläufig sollen uns nur die Beziehungen des ungedehnten, kreiszylindrischen Drahtstücks AB zum elliptisch-zylindrischen Dehnungsprodukt AB' beschäftigen.

Der Abstand AM der beiden, das betrachtete Drahtstück begrenzenden Gleitebenen ist ein festes Vielfaches (nD) des Netzebenenabstandes, bleibt also konstant. Dagegen wächst die Länge des Drahtes mit der Entfernung der Mittelpunkte dieser Gleitebenen von $AB = l$ auf $AB' = l'$.

Aus dem $\triangle AMB$ folgt

$$nD = l \cos \bar{\delta}$$

und aus dem $\triangle AMB'$

$$nD = l' \cos \bar{\delta}',$$

also die Dehnung

$$d = \frac{l'}{l} = \frac{\cos \bar{\delta}}{\cos \bar{\delta}'} \quad (1)$$

Andererseits folgt aus dem $\triangle ANB$ bzw. $\triangle ANB'$, in denen $AN \perp NB$ steht,

$$AN = l \sin \lambda$$

$$AN = l' \sin \lambda'$$

$$d = \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'} \quad (2)$$

λ und λ' sind, wie man aus der Figur erkennt, die Winkel, die die Gleitrichtung mit der Drahtachse im ungedehnten und gedehnten Zustande einschließt.

Die Dehnungsformel (1) gibt somit eine Antwort auf die unter a) gestellte Frage; ihre experimentelle Prüfung enthält der nächste Abschnitt.

Ad b) Aus dem Schema Fig. 6 sieht man, daß sich beim Dehnungsvorgang die Drahtachse immer mehr der Gleitellipse zuneigt, wobei sie stets in der Ebene bleibt, die durch ihre Anfangslage und die Gleitrichtung gegeben ist.

Diese Auffassung liegt der Konstruktion Fig. 7 zugrunde. Als Äquatorebene der gezeichneten Halbkugel ist die Ebene der im Raume festgehaltenen Gleitellipse gewählt. Die Drahtachse in der Ausgangslage \mathfrak{D} und die Gleitrichtung \mathfrak{G} definieren eine Ebene, die den Kreis DG aus der Kugel herauschneidet. Entlang dieses Kreises bewegt sich der Durchstoßpunkt D' der Achse (\mathfrak{D}') des gedehnten Drahtes. Aus der Kreiszyylinderform des Ausgangsdrahtes folgt, daß die durch Flächennormale (\mathfrak{N}) der Gleitellipse und Drahtachse gelegte Ebene die Gleitebene in Richtung der großen Gleitellipsenachse schneidet.

Es ist leicht zu sehen, daß die gestellte Frage nach Form und Lage der Querschnittsellipse im wesentlichen beantwortet ist, wenn man die Orientierung der Gleitellipse in ihrer Endlage in bezug auf das Band (Bandebeine und hierauf senkrechte Symmetrieebene) angeben kann, denn man weiß dann, welche (konjugierten) Durchmesser der Gleitellipse sich als Querschnittsachsen projizieren und kennt die die Projektion vermittelnden Winkel. Zu dieser Orientierung gelangt man etwa auf folgendem Wege:

Band- und Symmetrieebene müssen einerseits aus der Gleitellipse zwei konjugierte Durchmesser heraus schneiden, weil sie die Achsen der Querschnittsellipse projizieren, sie müssen andererseits aber auch jene Ellipse in zwei konjugierten Durchmessern schneiden, welche sich

$$\begin{aligned}\angle MAB &= \delta \\ \angle MAB' &= \delta' \\ \angle NBA &= \lambda \\ \angle NBA' &= \lambda'\end{aligned}$$

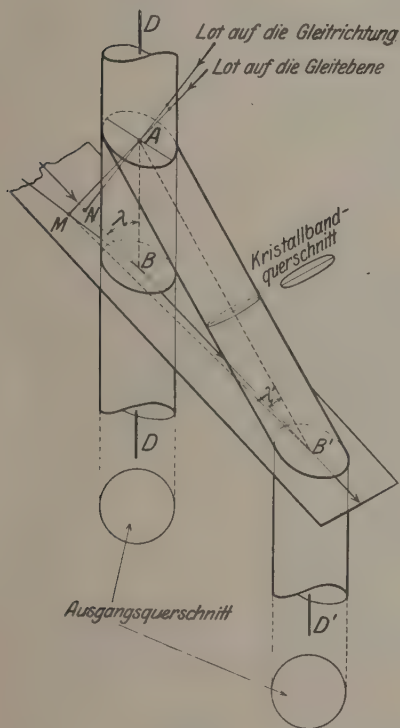


Fig. 6.

Fig. 6. Geometrische Darstellung des Dehnungsmodells. Alle Gleitschichten zwischen A und B werden parallel der Gleitrichtung um den gleichen Betrag gegenüber der Nachbarschicht verschoben. Führt zur Konfiguration mit der Achse $DAB'D'$, wobei das kreisrunde Stück AB zum flachen Band AB' geworden ist.

als Schnitt der Gleitebene mit einem dem Bande coaxialen Kreiszylinder ergibt, weil sie aufeinander senkrecht stehen. Man hat also die gemeinsamen konjugierten Durchmesser dieser beiden komplanaren Ellipsen aufzusuchen.

Fig. 8 zeigt die beiden Ellipsen in der Zeichenebene (die Gleitellipse ausgezogen, die Schnittellipse punktiert). Ihre großen Achsen

$$\begin{aligned}\widehat{ND} &= \delta; \quad \widehat{ND'} = \delta' \\ \widehat{DG} &= \lambda; \quad \widehat{D'G} = \lambda' \\ \widehat{AO} &= \angle DND' = \eta \\ \widehat{AG} &= \pi; \quad \widehat{AK} = \beta \\ \widehat{D'K} &= 90 - \omega\end{aligned}$$

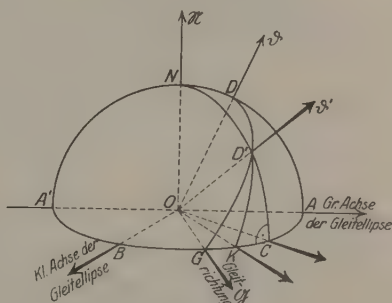


Fig. 7.

$$\begin{aligned}\angle AOK &= \beta \\ \angle AOK' &= \beta' \\ \angle A'O K &= \beta + \eta \\ \angle A'O K' &= \beta' + \eta\end{aligned}$$

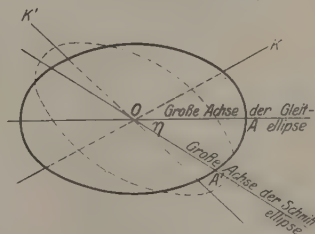


Fig. 8.

bilden den Winkel η , der sich in Fig. 7 als Winkel zwischen großer Gleitellipsenachse und Projektion von \mathfrak{D} in der Gleitebene wiederfindet. Die Winkel der gesuchten konjugierten Durchmesser mit der großen Achse der Gleitellipse β und β' verbindet die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta' = -\cos^2 \bar{\delta}, \quad (3)$$

weil das Achsenverhältnis der Gleitellipse als Schnitt eines Kreiszylinders unter dem Winkel $90 - \delta$ gleich $\cos \delta$ ist.

Ähnlicherweise hat man zwischen den Winkeln $(\beta - \eta)$ und $(\beta' - \eta)$, welche die gesuchten konjugierten Richtungen mit der großen Achse der Schnittelellipse bilden, die Beziehung

$$\operatorname{tg} (\beta - \eta) \operatorname{tg} (\beta' - \eta) = -\cos^2 \bar{\delta}'. \quad (4)$$

Aus Fig. 7 gewinnt man außerdem die Beziehungen

$$\cos (\lambda - \lambda') = \cos \bar{\delta} \cos \bar{\delta}' + \sin \bar{\delta} \sin \bar{\delta}' \cos \eta \quad (5)$$

und

$$\cos \lambda = \cos \pi \sin \bar{\delta}. \quad (6)$$

Die Gleichungen (1) bis (6) enthalten die neun Größen $\alpha, \delta, \bar{\delta}', \lambda, \lambda', \beta, \beta', \eta$ und π . Da wir $\bar{\delta}$ und π als bekannt annehmen, können wir für ein gegebenes d die übrigen sechs Größen berechnen. Die konjugierten Durchmesser der Gleitellipse, die sich als Querschnittsachsen projizieren, sind dann durch β und β' gegeben, während die beiden die Projektion vermittelnden Winkel (ω und ω'), wie aus der Fig. 7 ersichtlich, durch

$$\sin \omega = \cos (\beta - \eta) \cdot \sin \bar{\delta}' \quad (7)$$

$$\sin \omega' = \cos (\beta' - \eta) \cdot \sin \bar{\delta}' \quad (8)$$

gegeben sind.

Die explizite Ausführung der Rechnung kann hier unterbleiben, da die Ergebnisse in dieser Form bei den bisherigen Untersuchungen keine Rolle gespielt haben.

Nur auf eine Merkwürdigkeit des Bandquerschnittes sei hier noch kurz an Hand der Fig. 9 hingewiesen. Man sieht dort den Grenzfall angedeutet, der entsteht, wenn man sich die Gleitschichten schon ganz in der Banebene liegend denkt und erkennt aus dem Bilde leicht, daß das Band breiter ist als der Ausgangsdraht, denn der Durchmesser des Ausgangsdrahtes ist die kleine Ellipsenachse (NN'), dagegen ist die Bandbreite gleich dem Abstand der die Ellipsen einschließenden Geraden (Bandkanten) g und g' . Die Verbreiterung verschwindet im Falle $\pi = 0$.

Daß das Auftreten der Verbreiterung nicht an die speziellen Voraussetzungen der Fig. 9 gebunden, sondern eine allgemeine Erscheinung

ist, die stets auftritt, sobald $\pi > 0$, erkennt man aus dem Vergleich der Breite des gedehnten Modells (Fig. 4) mit dem Durchmesser des ungedehnten (Fig. 2).

Diese aus dem Dehnungsschema erschlossene Verbreiterung tritt auch wirklich auf, was die Betrachtung des Bildes Fig. 22, Tafel IV und besonders deren Nachzeichnung (Fig. 1) deutlich zeigt. Die beiden Pfeile weisen auf die Stellen hin, an welchen die Flachdehnung einsetzt. Um die Verbreiterung augenfällig hervortreten zu lassen, sind die Bandkanten verlängert; man sieht, daß der Abstand dieser punktiert gezeichneten Verlängerungen g und g' größer ist als der Durchmesser des Ausgangsdrabtes. Die für das Zustandekommen der Verbreiterung notwendige Bedingung, nämlich exzentrische Lage der Gleitellipsenscheitel ist in dem dargestellten Falle erfüllt und durch Einzeichnung der Scheitelgeraden c klar hervorgehoben.

Man kann auf Fig. 9 auch eine zahlenmäßige Berechnung der Verbreiterung gründen. Die Formeln, die man erhält, gelten zwar nur für den Grenzfall maximaler Dehnung; doch war bei den untersuchten Fällen die Dehnung so ausgiebig, daß die Anwendung dieser Formeln erlaubt schien.

Die gesuchte Bandbreite h erhält man aus den Halbachsen (A und B) der Gleitellipse und dem Winkel π (um welchen die Gleitrichtung von der großen Ellipsenachse abweicht) nach der Formel

$$h = 2 \sqrt{A^2 \sin^2 \pi + B^2 \cos^2 \pi}$$

und daraus ergibt sich die Verbreiterung $v = \frac{h}{2B}$ zu:

$$v = \sqrt{\frac{A^2}{B^2} \sin^2 \pi + \cos^2 \pi}. \quad (9)$$

Daß die Beziehung (9) die Größenverhältnisse richtig wiedergibt, zeigt folgende Zusammenstellung:

Tabelle 2.

Verbreiterung in Prozenten	
gemessen	nach (9) berechnet
13	10
6	10
4	6

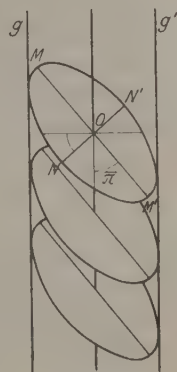


Fig. 9.

An Hand unseres Gleitungsschemas läßt sich nun auch das Verhalten der in der ersten Mitteilung besprochenen atypischen Streifung gut verstehen.

Es ist dort gesagt worden, daß diese als eine durch die Dehnung verzerrte Querstreifung des Ausgangsdrahtes zu betrachten ist, und es ist ein dies beweisender Versuch beschrieben worden, wo ein Draht kreisförmig geritzt und dann gedehnt wurde (vgl. Taf. I, Fig. 7 und Taf. II, Fig. 8).

Mit Hilfe des Gleitungsschemas kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Punkte eines derartigen Ritzers bei der Dehnung so wandern, daß sie stets ebene Ellipsen bilden, und zwar so, daß die Scheitel der Ellipsen stets mit dem Scheitel einer Gleitellipse zusammenfallen, wie dies auch in Fig. 5 der ersten Mitteilung zum Ausdruck gebracht ist.

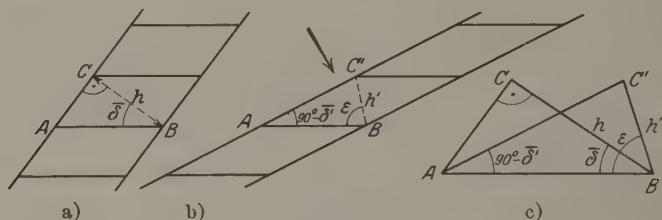


Fig. 10.

Man gewinnt auch leicht folgende quantitative Beziehungen, die eigentlich nur für den Fall gelten, daß die Gleitellipsenscheitel in der Mittelebene des Bandes liegen, aber doch wohl für die meisten Zwecke genau genug sind.

Fig. 10a stellt den Ausgangsdraht in der Schnittebene der großen Gleitellipsenachsen dar. Die Lage der Gleitellipsen ist durch parallele Strecken angedeutet und die Spur der Ebene des kreisförmigen Ritzers gestrichelt eingezeichnet (CB). Fig. 10b zeigt die Lage dieser Ebene im gedehnten Draht [$C'B^1$].

In Fig. 10c sind die beiden vergrößerten Dreiecke ABC und ABC' übereinandergelegt. h ist der Durchmesser des Ausgangsdrahtes und hiermit auch des ursprünglichen Ritzers, und h' ist die in der Zeichenebene liegende Achse des durch die Dehnung elliptisch gewordenen Ritzers. $\bar{\delta}$ und ϵ sind Anfangs- und Endwinkel der Ebene des Ritzers mit der Gleitfläche, und $90 - \delta'$ ist der Winkel zwischen Gleitellipse und Drahtachse im Bande.

¹⁾ Der Pfeil stellt die Blickrichtung senkrecht zur Bandfläche dar.

Man hat dann

$$h' = h \frac{\sin \bar{\delta}}{\sin \varepsilon}, \quad (10)$$

worin ε durch

$$\cotg \varepsilon = \frac{2}{\sin 2 \bar{\delta}} - \tg \delta' \quad (11)$$

gegeben ist.

$90 - \varepsilon + \bar{\delta}'$ ist der Winkel, den die Ritzerebene mit der Drahtachse bildet.

Aus den Fig. 10a, b und c ist auch ablesbar, daß die oben gefundene entgegengesetzte Neigung von Gleitellipsen und atypischen Zeichnungsellipsen nur dann notwendig zustande kommt, wenn die Neigung der Gleitellipse zur Drahtachse kleiner als 45° ist. Liegt die Gleitebene ursprünglich steiler im Draht (wie etwa auch bei dem in Fig. 10a bis c gezeichneten Beispiel), so wird der Winkel $AC'B$ zunächst stumpf, d. h. es folgt die atypische Zeichnung zuerst dem Sinn der Gleitschichtenzeichnung. Im Augenblick, wo dieser Winkel wieder 90° erreicht, steht die atypische Zeichnung wieder quer. Und erst indem bei weiterer Dehnung der Winkel $AC'B$ spitz wird, verläuft sie dann in entgegengesetztem Sinn zur Gleitschichtenzeichnung.

Daß wir trotzdem nur solche Orientierung der beiden Ellipsenarten fanden, beruht darauf, daß eben bei unseren Ausgangsdrahten der Winkel $(90 - \bar{\delta})$ meist kleiner als 45° , bzw. in den wenigen Ausnahmen die Dehnung weit genug gediehen war.

Die obigen Beziehungen (10) und (11) sind im Falle unseres Ritzversuches geprüft worden und fanden sich dabei bestätigt. Das Achsenverhältnis $\left(\frac{h'}{h}\right)$ des verzerrten Ritzers ergab sich aus der Dehnung berechnet zu 1,90, gemessen wurde 1,87.

Um das obige Dehnungsschema auch analytisch zu kennzeichnen, schreiben wir hier noch die Gleichungen an, die in seinem Sinne die Koordinaten eines beliebigen Drahtpunktes nach der Dehnung angeben. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß die XY -Ebene in die Gleitebene und die X -Achse in die Gleitrichtung fällt. Liegt der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt jener Gleitellipse, von welcher ab Dehnung erfolgt, so wird die erste Phase derselben, die reine Gleitung, durch die Koordinatentransformation

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{z}{\cos \bar{\delta}} \left(\sqrt{d^2 + \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \pi} - 1 - \sin \bar{\delta} \cos \pi \right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

beschrieben. Der Tatsache, daß die Drahtachse im gedehnten Band einen anderen (kleineren) Winkel mit der Gleitellipse einschließt als im Ausgangsdraht, werden wir durch eine Drehung gerecht, welche um eine Achse erfolgt, die senkrecht zu ursprünglicher Drahtachse und Gleitrichtung steht. Die Winkel, welche sie mit unseren drei Koordinatenachsen einschließt, sind gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 90^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \sin \bar{\pi} \operatorname{tg} \bar{\delta} \\ \alpha_3 &= 90^\circ + \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

der Drehungswinkel beträgt $(\lambda - \lambda')$ und ist durch die Gleichungen (6) und (2) ebenfalls durch $\bar{\delta}$, $\bar{\pi}$ und \bar{d} ausdrückbar.

Schließlich sei hier nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß diese Kombination von Drehung und Gleitung, wie sie sich namentlich auch im Modell scharf hervorhebt, nur zur Charakterisierung der Anfangs- und Endlage des Dehnungsprozesses dienen soll. Der Vorgang, der aus dem Anfangszustand in den Endzustand führt, ist wesentlich anders, als es das Modell zeigt, und soll nachfolgend noch eingehend erörtert werden.

2. Die Basisfläche als Gleitebene. Nachfolgende zwei Methoden erlaubten festzustellen, daß die Gleitebene, die sich bei der Flachdehnung betätigt, die hexagonale Basisfläche ist. Es waren dies:

a) die Untersuchung der Streifung der Reißebenen dehnbarer Drähte;

b) die röntgenographische Untersuchung der Gitterorientierung vor und nach der Dehnung.

Ad a) Die in Tafel II, Fig. 11 gezeigten Streifungen der Reißfläche dehnbarer Drähte wird man wohl ohne weiteres als Spuren von Gleitebenen auffassen, und es läßt sich dies auch dadurch noch

Tabelle 3.

Winkel zwischen der stärksten Streifung und der	
nächst starken	schwächsten
59°	—
59 ¹⁾	63°
59	—
57	—
58	—
56	62° 30'

¹⁾ Die Einzelwerte dieser Bestimmung waren: 56°, 56° 30', 56°, 57°, 60°, 66° 62°, 57° und 61°.

beweisen, daß man diese Streifungen durch seitlichen Druck künstlich erzeugen kann.

Wie schon in der ersten Mitteilung erwähnt, laufen die Streifungen den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes merklich parallel. Vorstehende Tabelle liefert hierfür zahlenmäßige Belege durch Angabe der Winkel zwischen der stärksten Streifung einerseits und den beiden weniger starken andererseits.

Auffällig ist die erhebliche Streuung der gemessenen Mittelwerte, die bei Betrachtung der Einzelwerte noch stärker hervortritt (vgl. Anm. zur Tab.). Die Abweichungen beruhen nicht auf Ablesungsfehlern, sondern rühren daher, daß die Streifen zufolge der Krümmungen der Gleitschichten wirklich von der Parallelität abweichen¹⁾.

Die Zahlen genügen aber, um festzustellen, daß in der Reißebene drei wichtige Kanten ein, zumindest annähernd, gleichseitiges Dreieck bilden. Keine der in Betracht kommenden Netzebenen enthält aber drei auch nur einigermaßen ähnlich verlaufende Kanten, außer eben der Basisfläche²⁾, in der alle Kanten gleichseitige Dreiecke bilden.

Ganz unabhängig davon konnte übrigens bewiesen werden, daß die fraglichen Streifungen gerade die Kante zwischen Basisfläche und Prismenfläche darstellen. Es ist öfters vorgekommen, daß die Reißebene eines dehnbaren Drahtes aus zwei Kristallflächen bestand, die in einer Kante zusammentrafen. Diese Kante war parallel zu der einen (am stärksten ausgeprägten) Streifungsschar der Reißebene orientiert. Durch mikroskopische und goniometrische Ausmessung konnte festgestellt werden, daß die beiden Ebenen rechtwinklig zueinander standen. In rechtwinkliger Stellung zueinander stehen aber im Zinkgitter (von den kristallographisch wichtigen Ebenen) nur Basis- und Prismenflächen.

In Tafel IV, Fig. 23 sieht man einen solchen Fall, wo sich die Reißfläche aus Basis- und Prismenfläche zusammensetzt, die sich in einer Hohlkante schneiden; die schematische Nachzeichnung, Fig. 11, hebt dies deutlich hervor³⁾.

¹⁾ Man sieht auch ein, daß bei Aufeinanderfolge zweier verschieden gerichteter Gleitungen die Gleitlinien treppenförmig werden, was bei kleiner Treppenhöhe den Winkel zwischen den entsprechenden Streifen verzerrt. Streifen mit sichtbaren Treppenstücken haben wir oft beobachtet. — Vgl. auch das nachfolgend in der dritten Mitteilung zur Tafel VI, Fig. 33 Gesagte.

²⁾ Die Netzebenen nach ihrer Belegungsdichte geordnet, haben die Reihenfolge: Basis (0001), Prisma erster Art (1010), Pyramiden (1011), (1012), (1013), Prisma zweiter Art (1210).

³⁾ Die sehr steil stehende Basisfläche ist stark gekrümmt, was öfters vorkommt. Vgl. erste Mitteilung S. 69 und Schluß der dritten Mitteilung S. 114.

Es sei gleich betont, daß von den Prismenflächen hier nur die Prismenfläche erster Art in Betracht kommt, da sie die zweit-dichtest belegte Ebene ist, während die Prismenfläche zweiter Art an sechster Stelle steht.

Ad b) wurde die röntgenographische Identifizierung der Reißfläche bzw. der Gleitellipse vorgenommen durch Vergleich der Basisorientierung mit der Stellung dieser Flächen. Es genügte dabei völlig, die Übereinstimmung der Lagen innerhalb der Fehlergrenzen von 1 bis 3° festzustellen, da dies bereits jede andere Möglichkeit eindeutig ausschließt.

In zwei Fällen wurde die Gitterorientierung im ungedehnten Drahte, insbesondere die Stellung der Basisfläche zur Drahtachse be-

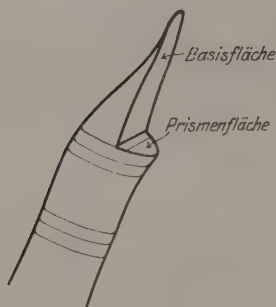


Fig. 11.

Nachzeichnung eines dehnbaren
Drahtes, dessen Reißfläche aus Basis
und Prismenfläche besteht.
(Vgl. Taf. IV, Fig. 23.)

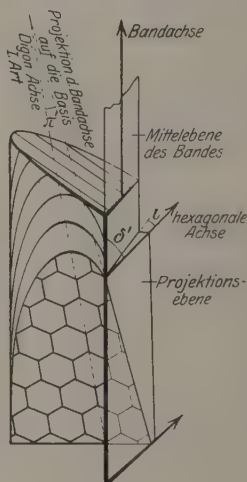


Fig. 12.

Schema der Gitterorientierung im
flachgezogenen Bande.

stimmt. Der gleiche Draht wurde in der Kälte gerissen und die Reißebene relativ zur Drahtachse goniometriert. Es erwies sich, daß

Tabelle 4.

Winkel zwischen Basisfläche und Drahtachse im ungedehnten Draht	
röntgenographisch	goniometrisch
16°	17° 30'
20° 30'	21° 30'

die Stellung der Basisfläche und Reißebene relativ zur Drahtachse dieselbe war (s. Tabelle 4).

In anderen Fällen wurde die Orientierung von Gleitellipsen von Kristallbändern relativ zur Drahtachse und Bandfläche ausgemessen, dann die Gitterorientierung ebenfalls relativ zur Drahtachse und Bandfläche röntgenographisch festgelegt. Es erwies sich, wie nachfolgende Zahlen zeigen, daß die Lage der Basisfläche mit jener der Gleitellipsen übereinstimmend war. Einerseits war der Neigungswinkel der Basisebene innerhalb der Fehlergrenzen gleich dem der Gleitellipse (vgl. Tabelle 5), andererseits zeigte sich auch, daß die hexagonale Achse merklich in der Mittelebene des Bandes lag, von der auch die Gleitellipsennormalen nur sehr wenig abweichen¹⁾.

Tabelle 5.

Winkel zwischen Basisfläche und Drahtachse im gedehnten Draht	
röntgenographisch	mikroskopisch
8°	9° 30'
20	16
18	21

Diese Gitterorientierung im Bande zeigt Fig. 12. Das Gitter ist durch einen Schnitt parallel zur Basis freigelegt. Dieser entspricht also einer Gleitebene, was durch die parallele Lage der Schnittkurve zu den Gleitellipsen hervortritt. Auf die Bedeutung der oberen Begrenzung des Bandes wird später zurückgekommen. Seitlich ist es im oberen Teil durch die Mittelebene, im unteren durch diejenige Ebene begrenzt, welche die Bandachse auf die Basis projiziert, somit die hexagonale Achse enthält und um den kleinen Winkel ι aus der Mittelebene herausgedreht ist. Ferner sind die Winkel δ' zwischen hexagonaler Achse und Bandachse (mit dem δ' nun identisch wird) und π' zwischen der Projektion der Bandachse auf die Basis und nächster diagonalen Achse erster Art eingezeichnet²⁾.

¹⁾ Wie in der ersten Mitteilung S. 67 erwähnt, ist die jetzt als hexagonale Achse erkannte Flächennormale der Gleitellipsen bei exzentrischer Lage derselben um höchstens $\iota = 1 - 2^\circ$ aus der Mittelebene des Bandes herausgedreht.

²⁾ Eine angenäherte Darstellung der Gitterlage im flachgedehnten Band hat M. Polanyi — Die Naturwissensch. 16, 411, 1922 — gegeben. Es sind dort die Winkel π' und ι gleich 0 gewählt, was — wie später S. 101 erklärt — dem Grenzfall unendlicher Dehnung entspricht. Obige Figur stellt also eine Präzisierung der Verhältnisse in diesem Sinne dar.

Daß die von der elliptischen Zeichnung umrahmte Gleitebene eine Basisfläche ist, erkennt man auch, wenn man einen bei $T = 190^\circ$ mäßig gedehnten Kristall bei dieser Temperatur reißt. Ein solcher Draht verhält sich wie ein gewöhnlicher „dehnbarer“, gibt also die (durch Dreieckstreifung kenntliche) Basis als Reißfläche. Man sieht in solchem Falle, daß die Umrandung der Reißfläche genau in die Schar der durch die Dehnung erzeugten Gleitellipsen hineinpaßt (vgl. Tafel IV, Fig. 24).

Ein weiterer Beweis ergibt sich durch Anwendung der Dehnungsformel

$$d = \frac{\cos \bar{\delta}}{\cos \delta'} \quad (1)$$

unter Einsetzen des röntgenographisch beobachteten Anfangs- und Endwinkels (ϱ_B und ϱ'_B) der Basisfläche zur Drahtachse:

$$d = \frac{\cos \varrho_B}{\cos \varrho'_B}.$$

Tabelle 6 zeigt das Ergebnis zweier Versuche. Die Übereinstimmung ist gut.

Tabelle 6.

Dehnung	
nach Formel (1)	am Draht gemessen
2,4 fach	2,4 fach
2,2 fach	2,5 fach

In einigen Fällen, wo die elliptische Streifung nicht deutlich hervortrat, konnte nur festgestellt werden, daß die Gitterorientierung des Kristallbandes (insbesondere auch in bezug auf die Größe von δ') in typischer Weise mit den übrigen Fällen übereinstimmte. Dies wird aus den im nachfolgenden Abschnitt mitgeteilten Daten ersichtlich sein.

Aus diesem Kapitel ist nun wohl auch hervorgegangen, warum in dem in den Fig. 2 bis 5 dargestellten Modell die Reißfläche mit einem Sechseck versehen ist. Sie soll dadurch eben als Basisfläche des hexagonalen Gitters gekennzeichnet sein.

3. Bedingungen der Dehnbarkeit. Unsere bisherigen Feststellungen geben noch keine Antwort auf die Frage, warum der eine Kristall dehnbar ist, der andere nicht, bzw. warum die Dehnung, wenn sie einmal begonnen hat, nicht unbegrenzt fortschreitet.

Einen Anhaltspunkt gewinnt man jedoch, wenn man die Endlagen betrachtet, in welche die Basisfläche bei vollendeter Dehnung

gelangt. Man sieht dann, daß die Endlagen für eine bestimmte Temperatur in einem ziemlich engen Winkelbereich liegen (vgl. Tabelle 7) und wird also schließen, daß ein Zn-Kristall nur dann dehnbar ist, wenn die Neigung der Basisfläche zur Drahtachse größer ist als die obigen Winkel.

Tabelle 7. Endlagen des Winkels zwischen Basisfläche und Drahtachse ($90 - \varrho'_B = \chi$).

Endwinkel	Temperatur in Celsiusgraden	Art der Feststellung
17°	20°	röntgeno- graphisch
10	20	
8	20	
20	20	
18	20	
10	20	
10	20	
8° 30'	120°	mikroskopisch oder goniometrisch ¹⁾
8 30	120	
10°	180°	
9	180	
10	180	
10	180	
7	180	
4°	200°	
2 30'	200	

Es ist auch sofort ersichtlich, warum ein Zn-Kristall bei Zimmertemperatur etwa auf das Sechsfache dehnbar sein kann. Aus $d = \frac{\sin(90 - \varrho_B)}{\sin(90 - \varrho'_B)}$ ergibt sich, da $\sin(90 - \varrho_B)$ höchstens gleich Eins werden kann (Querlage der Basis im Ausgangsdraht) und $90 - \varrho'_B$ nicht kleiner als 8° bis 20° sein soll:

$$d \leq 7 \text{ fach.}$$

Setzt man dagegen die $(90 - \varrho'_B)$ Werte ein, die für 200° gefunden wurden, so ergibt sich

$$d \leq 23 \text{ fach.}$$

Natürlich läßt sich dieses Ergebnis auch auf andere Anfangsorientierung, als Querlage der Basisfläche, übertragen. Man hat nur in der Dehnungsformel an Stelle von Eins den der jeweiligen Anfangsorientierung entsprechenden Wert von $\sin(90 - \varrho_B)$ einzuführen.

¹⁾ Wie der Endwinkel zwischen Basisfläche und Drahtachse goniometrisch bestimmt wird, kann erst später bei Besprechung der Reißflächen flachgezogener Bänder dargelegt werden.

Man kann also aus einer röntgenographischen Aufnahme eines Kristalldrahtes oder durch Reißen bei tiefer Temperatur und Ausmessen der Reißebene die Dehnbarkeit für eine bestimmte Temperatur annähernd voraussagen.

Warum der Winkel ($90 - \varphi'_B$) bei der Dehnung nicht beliebig klein wird, wissen wir nicht. Es zeigt sich nämlich, daß die Normalkomponente der Spannung, von der man wohl einen Einfluß auf die Reibung entlang der Gleitflächen erwarten muß und welche durch die Neigung der Gleitflächen kleiner wird, durch die gleichzeitige Steigerung der Last, welche bis auf das 50fache der Elastizitätsgrenze steigt (während das Verhältnis der Sinusse höchstens 7 erreicht), in Wirklichkeit erhöht wird¹⁾.

Wenn auch die Gitterorientierung feststeht, die für das Einsetzen von Flachdehnung notwendig ist, so möchten wir sie doch nicht als hinreichend für die Dehnbarkeit betrachten. Die strikte Beantwortung der Frage nach den hinreichenden Bedingungen liegt außerhalb des Rahmens der gegenwärtigen Untersuchung, doch sei so viel gesagt, daß es uns bisher nicht gelungen ist, einen Fall sicherzustellen, wo ein Einkristalldraht mit dehnbarer Orientierung sich als undehnbar erwies. Insbesondere fand sich in einer langen Reihe von gewöhnlichen spröden, also von Haus aus undehnbaren Einkristalldrähten, daß sie alle tatsächlich undehnbar orientiert waren; d. h. also, daß bei diesen Drähten die Basisfläche stets nahezu parallel zur Drahtachse stand und höchstens etwa 10° mit dieser, einschloß.

Dies wurde an einigen Drähten röntgenographisch festgestellt an vielen anderen durch Identifizierung der Reißfläche als Prismenfläche erster Art und Bestimmung ihrer (nahezu queren) Lage relativ zur Drahtachse²⁾. (Vgl. I. Mitteilung, Abschnitt „Reißstellen“ und die Zahlen auf S. 77.)

4. Gleitrichtung in der Basisfläche. Die Kristallographie stellt die Forderung nach einer kristallographisch bestimmten Richtung der Gleitung, und zwar müßte dies eine rationale Gitterrichtung sein.

¹⁾ Es wäre denkbar, daß der Dehnbarkeit dadurch eine Grenze gesetzt wird, daß (bei einer bestimmten Temperatur) eine gewisse Dicke der Gleitschichten nicht unterschritten werden kann. Tatsächlich sieht man, daß die Gleitschichtendicke mit steigender Temperatur abnimmt.

²⁾ Wie später (S. 96) gezeigt wird, ist auch die Reißfläche des fertig gedehnten Bandes eine Prismenfläche erster Art. Der Umstand, daß sie etwas schiefer (unter etwa 60°) zur Drahtachse steht, erklärt vielleicht die verschiedenen kleinen Unterschiede im Verhalten der von Haus aus spröden Drähte und der flachgedehnten Bänder.

Fällt die Krafrichtung nicht mit dieser kristallographischen Richtung zusammen, so müßte die Ausgleitung von der Krafrichtung abweichen.

Daß es solche Fälle in der Tat gibt, wo die Gleitung nicht der Krafrichtung folgt, zeigt bereits die oft vorkommende exzentrische Lage der Ellipsenscheitel (vgl. etwa Tafel I, Fig. 3), denn eine solche hat ihren Grund in dem Nichtübereinstimmen dieser beiden Richtungen, worauf bereits bei Erläuterung des Modelles hingewiesen wurde.

Wir werden also:

a) die Krafrichtung in der Ausgangslage in bezug auf das Gitter orientieren und

b) auch die Gleitrichtung kristallographisch festlegen.

Hieraus wird sich ergeben, in welcher Richtung eine an ein gegebenes Gitter angelegte Kraft eine Abgleitung verursacht.

Vorerst müssen wir uns aber noch mit den Reißflächen flachgedehnter Bänder beschäftigen, da die Identifizierung derselben zur kristallographischen Bestimmung der Gleitrichtung nötig ist.

Zur kristallographischen Identifizierung dieser Reißfläche haben wir ihre Orientierung zur Gleitellipse vorgenommen; es zeigt sich auch, daß dies ausreichend ist.

Legen wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß die Z-Achse in die Bandachse fällt, die Y-Achse senkrecht dazu in der Bandfläche liegt und die X-Achse senkrecht zu beiden steht, so ist die Festlegung des Lotes auf die Reißfläche in diesem System aus ihrer goniometrischen Vermessung ohne weiteres gegeben. Die nachfolgenden Gleichungen zeigen, wie aus den bei vertikal justierter Bandfläche im Goniometer erhaltenen Winkeln α und φ ¹⁾ die Winkel ϱ_1 , σ_1 und τ_1 gegen die drei Koordinatenachsen berechnet werden:

$$\cos \varrho_1 = \sin \alpha \cos \varphi,$$

$$\cos \sigma_1 = \sin \varphi,$$

$$\cos \tau_1 = \cos \alpha \cos \varphi.$$

Andererseits ist in der ersten Mitteilung gezeigt worden, wie der Winkel χ zwischen Ebene der elliptischen Streifung und Bandfläche bestimmt wird. Die dabei auftretenden Winkel ϱ_0 und σ sind, wie man leicht einsieht, die Winkel, welche das Lot auf die Gleitellipse mit der X- und Y-Achse einschließt. Den Winkel gegen die Z-Achse findet man daraus zu: $\sin \tau = \sqrt{\cos^2 \varrho_0 + \cos^2 \sigma}$ und man kann nun nach Festlegung beider Flächenlote den Winkel zwischen Streifung und Reißfläche nach

$\cos \Sigma = \cos \varrho_0 \cos \varrho_1 + \cos \sigma \cos \sigma_1 + \cos \tau \cos \tau_1$
berechnen.

¹⁾ Vgl. erste Mitteilung, S. 70.

Die in fünf Fällen ausgeführte Rechnung führte auf die Zahlen in der dritten Spalte der Tabelle 8, welche sich nur wenig von 90° unterscheiden.

Tabelle 8.

χ	α'	Σ
7°	60°	91°
10	8	90
8 $30'$	—	90
8 30	11 $30'$	87
10	12	91

Mittelwert von $\Sigma = 90^\circ$.

Wir finden also das Ergebnis, daß die Reißfläche des Bandes senkrecht auf der Basis steht, also eine Prismenfläche ist. In Fig. 12 ist das Kristallband oben entlang einer Prismenfläche (erster Art) abgeschnitten, um die Lage einer solchen Ebene zu veranschaulichen¹⁾.

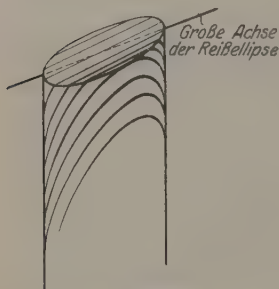


Fig. 13.

Die Streifung der Reißfläche ist die Spur der Basis in der Prismenfläche erster Art.

Dieses Resultat können wir auch noch auf eine andere Weise prüfen. Es führt uns zu dieser die Betrachtung der bereits in der ersten Mitteilung beschriebenen Streifung der Bandreißflächen (vgl. Tafel II, Fig. 13), welche aus einer Schar paralleler Linien besteht, die einen meist sehr kleinen Winkel mit der großen Achse einschließt.

Im Mikroskop sieht man nun durchweg; daß diese Streifung als Spur der Basisebene in der Reißfläche anzusehen ist, wie es das perspektivische Schema (Fig. 13)

andeutet: bei zentrisch liegenden Gleitellipsen läuft die Reißflächenstreifung parallel der großen Achse und im Falle exzentrisch liegender Ellipsen verläuft sie parallel zur Tangente in jenem Punkt

¹⁾ Da der Winkel π' (Fig. 12) sich — wie aus dem Folgenden hervorgehen wird — mit fortschreitender Dehnung dem Wert 0 nähert, nähert sich der Winkel der Reißfläche gegen die Bandachse dabei dem Wert 60° . (Vgl. erste Mitteilung, S. 69.) Dementsprechend gibt es immer zwei Prismenflächen erster Art, welche ähnlich zur Bandachse gelegen sind und als Reißfläche in Betracht kommen. Die Erfahrung zeigt, daß immer jene Fläche wirklich als Reißfläche auftritt, welche mit der Bandachse den größeren Winkel einschließt. — Ferner folgt nun unter Berücksichtigung des in der ersten Mitteilung auf S. 68 Gesagten, daß die schrägen Gleitlinien am Bande durch Gleitungen entlang Prismenflächen erster Art entstehen. Man sieht auch ein, daß nur zwei Scharen solcher Gleitlinien auftreten können, die gegen das Band ungefähr gleich gelegen sind und miteinander etwa 60° einschließen.

der Reißellipse, in dem diese von der Gleitellipse berührt wird (vgl. auch die Streifung der Prismenfläche in Fig. 12).

Diese Beobachtungstatsache läßt sich auch noch zahlenmäßig festlegen. Man bestimmt rechnerisch die Neigung der Tangente der Reißellipse gegen ihre große Achse in dem Berührungspunkt mit der Gleitellipse, dessen Lage (in bezug auf die Reißellipsenachsen) mikroskopisch gemessen werden kann. In dem durchgerechneten Fall ergab sich der direkt am Drehtisch gemessene Winkel ξ zu 5° , während die Berechnung aus der Lage des Berührungspunktes von Reißfläche und Streifungsellipsen zu $5^\circ 20'$ führte.

Da nun feststeht, daß die Längsstreifung der Bandreißfläche die Spur der Basis darstellt, so kann auch in folgender Weise überprüft werden, ob Reißfläche und Basis aufeinander senkrecht stehen. Man justiert das Band im Goniometer derart, daß die Bandachse horizontal liegt und die Streifung der Reißfläche vertikal steht. Bestimmt man nun von dieser Stellung ausgehend die Winkel α' und φ' für eintretende Reflexion, so müßte, falls die Basis senkrecht zur Reißfläche steht, erstere mit der Reflexionsebene zusammenfallen, d. h. $\chi = \alpha'$ sein. Da es jedoch häufig, besonders bei kleinem Bandquerschnitt, schwierig ist, die Streifung in den Vertikalfaden des Goniometers einzustellen, so wurden auch die Formeln aufgestellt, nach denen sich aus den bei Vertikalstellung der Bandfläche beobachteten Winkeln α und φ und dem mikroskopisch leicht meßbaren Winkel ξ der Winkel α' (und aus $\cos \alpha \cos \varphi = \cos \psi = \cos \alpha' \cos \varphi'$ auch φ') berechnen läßt¹⁾.

¹⁾ Man hat dabei die Aufgabe: Wie ändert sich der Winkel α , wenn das Band um seine Achse um den Winkel ξ^* gedreht wird?

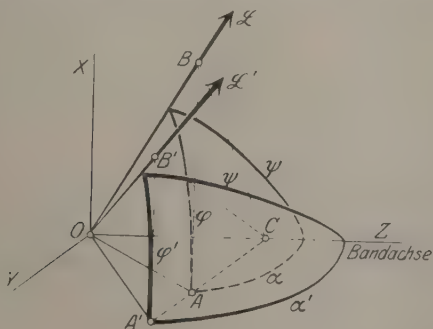


Fig. 14 a.

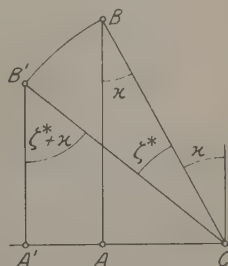


Fig. 14 b.

Wir legen wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der Z-Achse in die Bandachse. Zunächst liegt das Band so, daß die Bandebene in die XZ-Ebene fällt. \mathcal{L} , das Lot auf die Reißfläche, ist dann durch die Winkel α und φ

Tabelle 8 enthält in Spalte 2 den (teils durch direkte Messung im Goniometer, teils durch Rechnung aus den gemessenen Winkeln α , φ und ξ bestimmten) Winkel α' , dem in Spalte 1 der aus mikroskopischen Messungen berechnete Winkel χ gegenübergestellt ist. Die Übereinstimmung beider bestätigt uns aufs neue, daß Basis und Bandreißfläche aufeinander senkrecht stehen, daß also die Reißfläche eine Prismenfläche ist.

Man erkennt auch ohne weiteres, daß es sich hier nur um die Prismenfläche erster Art handeln kann, da diese die zweitdichteste belegte Netzebene darstellt, während die Prismenfläche zweiter Art

bestimmt (Fig. 14a). Bei der nun folgenden Drehung des Bandes um seine Achse um den Winkel ξ^* gelangt das Lot nach \mathcal{L} , dessen Orientierung durch die Winkel α' und φ' gegeben ist.

In Fig. 14b ist die Ebene, in welcher der Punkt B gedreht wird, in der Aufsicht dargestellt. Aus Fig. 14a folgt zunächst $\frac{\text{tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha} = \frac{A'C}{AC}$. Führen wir nun den Winkel κ bei B ein, welcher aus Fig. 14a durch $\text{tg } \kappa = \sin \alpha \cotg \varphi$ gegeben ist, so lesen wir aus Fig. 14b die Beziehung

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{\sin(\xi^* + \kappa)}{\sin \kappa}$$

ab. Somit erhalten wir:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\sin(\xi^* + \kappa)}{\sin \kappa} \text{tg } \alpha.$$

Der Winkel ξ^* ist nun nicht identisch mit dem mikroskopisch gemessenen Winkel ξ zwischen Streifung der Reißfläche und großer Achse. Er ist vielmehr dessen Projektion auf den Drahtquerschnitt. Man kann aber ξ^* aus ξ und den goniometrisch bestimmten Winkel α und φ folgendermaßen berechnen.

In Fig. 15 liegt die Bandfläche in der Zeichenebene. Der Durchstoßpunkt L des Lotes \mathcal{L} auf die Reißfläche ist durch seine Horizontalkoordinaten α und φ bestimmt. Bekannt ist ferner der in der Reißfläche liegende Winkel ξ . (Der Fehler, der dadurch entsteht, daß der Winkel ξ zwischen Streifung und großer Achse der Reißellipse und nicht zwischen Streifung und dem Durchmesser, in welchem die Bandebene die Reißfläche schneidet, vermessen wird, liegt innerhalb der experimentell erreichbaren Genauigkeit.)

Durch Auflösung der beiden sphärischen Dreiecke CPL und ABC erhält man ξ^* durch den Ausdruck:

$$\cotg \xi^* = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} (\cotg \xi \cos \alpha - \sin \alpha \sin \varphi).$$

Diesen Wert von ξ^* hat man also in die obige Gleichung für $\text{tg } \alpha'$ einzusetzen

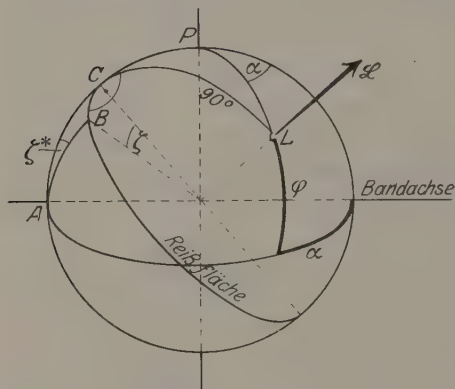


Fig. 15.

erst an sechster Stelle kommt und nicht einzusehen wäre, warum die drei dazwischen liegenden Pyramidenflächen übersprungen werden sollten.

Wir schreiten nun zur kristallographischen Festlegung von Kraft- und Gleitrichtung. Die kristallographische Orientierung einer Richtung in der Basisfläche geschieht zweckmäßigerweise durch Angabe des Winkels, den sie mit einer digonalen Achse erster Art, $(10\bar{1}0)$ -Richtung, einschließt. Dies ist, wie bereits erwähnt, die Kante, in der die Basis von den vier nächst dicht belegten Ebenen (Prismenfläche erster Art und Pyramidenflächen erster Art) geschnitten wird. Wie man aus obigem erkennt und in Fig. 6 der ersten Mitteilung direkt sieht, ist sie die dichtest belegte Kante des Zn-Gitters.

Diese Kante ist auch dadurch ausgezeichnet, daß sie sich in den Reißflächen als Streifungen sichtbar einzeichnet. Sowohl die Dreieckstreifung der Basis, als auch die Streifung der Prismenfläche rühren von ihr her.

Um nun ad a) die Kraftrichtung kristallographisch zu orientieren, haben wir den Winkel zu bestimmen, welchen die große Achse der freigelegten Basisreißfläche (welche bei kreiszylindrischem Ausgangsdraht die Richtung größter Schubkraft darstellt) mit einer digonalen Achse erster Art einschließt. Diese Bestimmung erfolgt mikroskopisch mit Drehtisch¹⁾.

Die nun nach b) nötige kristallographische Orientierung der Gleitrichtung führen wir in der folgenden Weise durch. Nach unserem Gleitungsschema ist die Gleitrichtung gegeben durch den Schnitt der Basis mit derjenigen Ebene, in welcher sich die Drahtachse bei der Dehnung gegen sie neigt. Legen wir nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß die hexagonale Achse in der Z-Achse liegt und in der Basisfläche eine digonale Achse erster Art mit der X-Achse zusammenfällt (in die Y-Achse fällt dann eine digonale Achse zweiter Art), so gewinnen wir aus Fig. 16²⁾ leicht folgende Beziehung:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \pi' \operatorname{tg} \delta' - \sin \pi \operatorname{tg} \delta}{\cos \pi' \operatorname{tg} \delta' - \cos \pi \operatorname{tg} \delta}, \quad (14)$$

worin x den gesuchten Winkel zwischen $(10\bar{1}0)$ -Richtung und Gleitrichtung darstellt. δ und δ' sind Anfangs- und Endwinkel der Drahtachse gegen die hexagonale Achse und können goniometrisch und

¹⁾ Derselbe Winkel ist auch am gedehnten Band bestimmbar als Winkel zwischen großer Achse der Gleitellipsen und der sich — beim Blick senkrecht auf das Band — als Strecke abzeichnenden Prismenreißfläche. Doch ist diese Bestimmungsmethode minder genau, da die Fixierung der Achse in der freiliegenden Fläche leichter möglich ist.

²⁾ Anm. b. d. Korr.: In der Figur sollte die durch A' gehende Drahtachse mit \mathfrak{D}' bezeichnet sein.

mikroskopisch bestimmt werden. π ist — kreisförmigen Ausgangs-
draht vorausgesetzt — der Winkel zwischen großer Achse der Basis-
reißfläche und digonaler Achse erster Art und wird, wie bereits
erwähnt, mikroskopisch gemessen, und π' ist der Winkel zwischen der
Projektion der Drahtachse auf die Basis und der $(10\bar{1}0)$ -Richtung im
Bande. Seine Bestimmung erfolgt aus dem Winkel φ' , den man bei
goniometrischer Vermessung der Prismenreißfläche erhält, wenn das
Band so justiert ist, daß die Streifung vertikal steht (vgl. S. 97).
Die Horizontale ist dann offenbar die Projektion der Bandachse auf

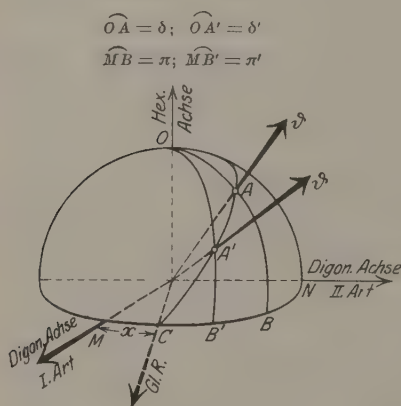


Fig. 16.

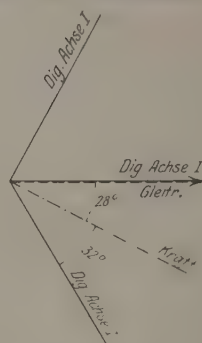


Fig. 17.

Typische Konfiguration zwischen Kraft-
richtung, Gleit-
richtung und digonaler Achse
erster Art.

die Basis und φ' ist der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen
Dreiecks, dessen zweiter $60 + \pi'$ ist. Also $\pi' = 30 - \varphi'$ ¹⁾.

Bei einer Reihe von Drähten wurde nun auf die angegebene
Weise Kraft- und Gleitrichtung relativ zum Gitter orientiert. In Ta-
belle 9 ist das Ergebnis von sechs Bestimmungen enthalten:

Tabelle 9.

Winkel zwischen Kraft- richtung und digonaler Achse erster Art	Winkel zwischen Gleit- richtung und digonaler Achse erster Art
27°	— 2°
28	— 1
25	— 2
30	0
8	+ 3
30	+ 4
	Mittelwert: + 1/3°

¹⁾ Wie sämtliche vier Winkel auf röntgenographischem Wege erhalten werden
können, ist in der ersten Mitteilung dargelegt.

In der ersten Spalte ist der Winkel zwischen der Kraftrichtung und jener digonalen Achse erster Art enthalten, welche der berechneten Gleitrichtung zunächst liegt, während die zweite Spalte eben jene Abweichung der Gleitrichtung von der (1010)-Richtung angibt, welche dann positiv gezählt wird, wenn die Gleitrichtung zur Kraftrichtung hin abweicht. Wie man sieht, verteilen sich die an und für sich kleinen Abweichungen gleichmäßig zu beiden Seiten der digonalen Achse erster Art, ferner ist der Winkel in Spalte 1 stets kleiner oder gleich 30° , d. h. also, es bildet sich als Gleitrichtung jene digonale Achse erster Art aus, welche der Kraft zunächst liegt¹⁾. Das Schema, Fig. 17, soll die Verhältnisse auch graphisch erläutern. Die drei vollgezeichneten Linien stellen die drei digonalen Achsen erster Art dar, strichpunktirt ist die Kraft und strichliert (mit der der Kraft nächsten digonalen Achse erster Art zusammenfallend gezeichnet) ist die Gleitrichtung.

Das Ergebnis dieser Messungen läßt sich also dahin zusammenfassen, daß die Gleitrichtung in der Basis eine digonale Achse erster Art (dichtest belegte Kante) ist. Die Kraftrichtung wirkt nur insofern mitbestimmend, als sich die ihr nächst liegende (1010)-Richtung als Gleitrichtung betätigt.

Es ist nun auch unser in der nachfolgenden Tabelle 10 verzeichneter Befund verständlich, daß der röntgenographisch an Kristallbändern bestimmte Winkel π' meistens von 0 wenig abweichende Werte hatte. Im Grenzfall unendlicher Dehnung, in welchem die Basisfläche mit der Bandedebene zusammenfällt, wird der Winkel π' ja exakt 0 und er nähert sich diesem Wert um so mehr, je weiter die Dehnung fortgeschritten ist. (Aus diesem Grunde ist auch in Fig. 12 π' als sehr spitzer Winkel gezeichnet.)

Tabelle 10.

π'	π'
0°	8°
0	17 ²⁾
0	19 ²⁾
5	—

¹⁾ Zu achten ist bei diesen Messungen darauf, daß Kraft und Gleitrichtung stets in bezug auf dieselbe digonale Achse erster Art orientiert werden. Dies ist jedoch leicht möglich, da man im Bande den Winkel zwischen großer Gleitellipsenachse und Prismenreißfläche immer innerhalb der erlaubten Streuung von 30° bestimmen kann und dadurch dieselbe (1010)-Richtung in der Basisreißfläche eindeutig wiederfindet.

²⁾ In diesen beiden Fällen, in denen π' von 0 stark abweicht, wird wohl die Dehnung keine sehr beträchtliche gewesen sein. Da die röntgenographischen

In unserem Modell (Fig. 2 bis 5) ist dem obigen Resultat dadurch Rechnung getragen, daß, wie aus der Lage der Gleitrichtung zum Sechseck hervorgeht, jene mit einer digonalen Achse erster Art zusammenfällt.

Durch die Erkennung der Gleitrichtung als digonaler Achse erster Art wird nun der bei der Beschreibung des Gleitungsschemas in den Gleichungen (1) bis (6) verwendete Winkel π mit π identisch.

II. Der Vorgang der Dehnung.

Wir haben bisher nur den Anfangs- und Endzustand der Dehnung diskutiert und wollen jetzt die einzelnen Phasen untersuchen, die der Kristall während ihres Verlaufes durchmacht.

1. Einsetzen der Flachdehnung. Wenn die Dehnung, die ein Draht erleidet, nicht sehr erheblich ist, so ist es schwer zu entscheiden, ob sie stellenweise beginnt oder gleichmäßig entlang des ganzen Drahtes einsetzt. Dagegen kann man bei gut dehnbaren Drähten (besonders bei erhöhter Temperatur) die Art des Einsetzens der Flachdehnung deutlich verfolgen. Man sieht dann, daß sich zuerst Einschnürungen bilden, die sich immer mehr verlängern und schließlich den ganzen Draht in sich aufnehmen.

Die in der frühesten Phase einer Dehnung in der Wärme auftretenden Einschnürungen zeigt Tafel IV, Fig. 25.

Die darauffolgenden Figg. 26 und 27 der Tafel V zeigen, wie bei weiterer Dehnung noch ausgeprägtere Einschnürungen entstehen. In Fig. 26 blickt man in Richtung der Bandfläche auf das (zur Ermöglichung stärkerer Vergrößerung krumm gelegte) Kristallband. Die sieben Flachschnürungen sind trotz fünfzehnfacher Vergrößerung nur als feine Fäden sichtbar, was auf das hohe Maß der Dehnung hinweist. Die parallele Lage ihrer Bandebenen ist ein schöner Beweis der Einkristallnatur¹⁾. In Richtung senkrecht zur Bandfläche wurde Fig. 27 (sechsfache Vergrößerung) erhalten. Die ungedehnten Stellen deuten sich als schwache Einschnürungen an, da das Band breiter ist als der Ausgangsdraht²⁾.

Dehnt man einen solchen eingeschnürten Draht zu Ende, so verschwinden schließlich alle „Knoten“ und man kommt zu einem gleichmäßigen Kristallband.

Messungen schon vor der Entwicklung der Methode, die zur Bestimmung der Gleitrichtung führt, angestellt wurden und diese Präparate nicht mehr zur Verfügung stehen, kann eine genaue Angabe nicht gemacht werden.

¹⁾ Vgl. erste Mitteilung, S. 77.

²⁾ Vgl. oben S. 84.

2. Stoßstellen zwischen gedehntem und ungedehntem Kristall. Aus dem Gesagten geht hervor, daß, nachdem einmal das Anfangsstadium der Dehnung durch Ausbildung der Flachschnürungen überschritten ist, ihr weiterer Verlauf in einer stetigen Ausbreitung dieser Einschnürungen auf Kosten der noch ungedehnten Drahtteile besteht. Wir haben demnach die Vorgänge dieser Ausbreitung zu untersuchen und wollen daher zunächst die Stellen betrachten, an denen sie vor sich geht, also die Stoßstellen zwischen den gedehnten und ungedehnt gebliebenen Teilen eines Kristalles.

Die zu erwartende Konfiguration solcher Stellen läßt sich aus unserem Dehnungsmechanismus folgendermaßen ableiten: Fig. 18a sei ein durch Drahtachse und Gleitrichtung geführter Schnitt durch einen dehnbaren Draht; die schrägen Striche seien die Spuren der Gleitebenen. Unter Wirkung des Zuges Z dehne sich nun der Draht entlang der Strecke l , und zwar wollen wir uns hierbei die Gleitung und die Drehung nacheinander ausgeführt denken (was natürlich in Wirklichkeit nicht zutrifft). Dann gelangen wir zunächst durch eine Gleitung zur Konfiguration Fig. 18b, wo die Strecke l auf l' verlängert worden ist ($\frac{l'}{l} = \text{Dehnung}$).

Auf die Gleitung muß nun als weitere Wirkung des Zuges eine Drehung des gedehnten Drahtteiles folgen, wobei die beiden

Knickstellen der Fig. 18b ausgerichtet werden. Man sieht ohne weiteres, daß die Form des dabei entstehenden Drahtes der Fig. 18c entsprechen muß.

Die Lage der Gleitebenen ist nur in den beiden ungedehnten Endstücken und in der Mitte des gedehnten Bandes exakt ableitbar, da die Gleitschichten nur hier eben bleiben. In den dazwischen liegenden Stoßstellen müssen, wie in der Zeichnung angedeutet, krumme Gleitflächen liegen, die den Übergang der Gleitschichten aus der Ausgangslage in die Endlage vermitteln. Die Form ihrer Krümmung läßt sich des Näheren nicht angeben. Sie ist in der Zeichnung durch

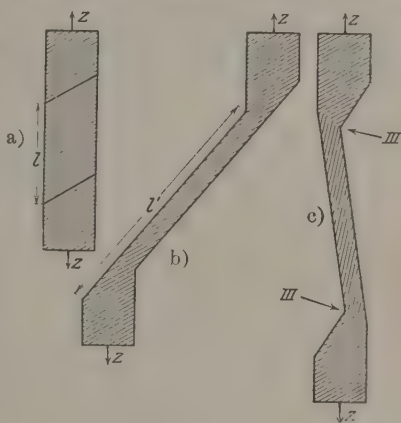


Fig. 18. Ableitung der typischen Konfiguration der Stoßstellen aus dem Gleitungsschema. a) Ausgangsdraht, b) Dehnung durch reine Gleitung, c) Einstellung des gedehnten Teiles in die Krafrichtung.

eine Knickung approximiert worden, was insofern besondere Berechtigung hat, als sich der (in 18c mit Pfeil bezeichnete) Knick an den Stoßstellen zwischen gedehntem und ungedehntem Kristall tatsächlich wiederfindet und in einzelnen Fällen auch die knickförmige Krümmung der Gleitflächen direkt beobachtet worden ist (vgl. Fig. 19).

Die allgemeine Richtigkeit des Schemas 18c läßt sich zunächst schon aus den Fig. 28 und 29 der Tafel V erkennen. Sie zeigen (in zwei Ansichten) ein Kristallband, das an zwei ungedehnte Drahtstücke angrenzt. An den durch Pfeile bezeichneten Korngrenzen erkennt man, daß diese Drahtstücke nicht aus demselben Kristall bestehen wie das Kristallband, sondern andere, ungedehnt gebliebene Kristalle sind. Für die Konfiguration der Stoßstellen ist dies natürlich ohne Bedeutung; sie entsprechen in ihren Umrissen durchaus dem Schema Fig. 18c. Weitere Bestätigungen dieses Schemas werden sich später bei Untersuchung der Nachdehnung ergeben.

3. Die Dehnung als Biegegleitung. Um die Vorgänge, die sich an den Stoßstellen bei Fortschreiten der Dehnung abspielen, genau kennzeichnen zu können, müßte ein klares Bild der oben angedeuteten Krümmungen der Gleitschichten vorliegen. Daß diese Krümmungen nicht ganz einfacher Natur sind, zeigt der aus Fig. 6 leicht ablesbare Umstand, daß die Drehachse, die die Gleitebenen aus ihrer Ausgangslage in die Endlage überführt, im allgemeinen nicht in dieser Ebene gelegen ist. Hieraus folgt, daß die gekrümmten Gleitflächen im allgemeinen nicht durch Zylinderflächen, sondern nur durch Kegelmäntel darstellbar sein können.

Wie dem auch sei, so viel steht jedenfalls fest, daß jede Gleitung, die an einer Stoßstelle einsetzt, von einer gleichzeitigen Umbiegung begleitet sein muß, und zwar — wie man leicht ersehen kann — nicht nur der gleitenden Schichten selbst, sondern auch der benachbarten Schichten, denn die Gleitung entlang einer Schicht bringt die benachbarten Schichten in eine neue, instabile Lage zur wirkenden Kraft, wodurch ihre Umbiegung bedingt wird. Eine jede Gleitschicht nimmt dabei nacheinander alle Konfigurationen an, die in einer Stoßstelle nebeneinander vorkommen: es entsprechen den einzelnen Formen, die dort den Übergang aus dem ungedehnten in den gedehnten Draht räumlich vermitteln, ebenso viele Phasen, die die einzelnen Gleitschichten bei ihrem Übergang aus dem ungedehnten Kristall in das Kristallband zu durchlaufen haben.

Der Grundvorgang der Kristalldehnung ist also eine Biegegleitung, d. h. eine Gleitung entlang gekrümmter Gleit-

flächen unter gleichzeitiger Umbiegung der gleitenden und der benachbarten Gleitschichten¹⁾.

Solche Kombinationen von Gleitungen mit elastischen Biegungen der entstehenden Gleitschichten sind wohl durch die Arbeiten von O. Mügge (1895) u. a. längst allgemein bekannt²⁾, doch ist dieser Vorgang unseres Wissens bisher für die Erklärung plastischer Deformationen an Metallen nicht herangezogen worden.

III. Nachdehnung.

1. Nachdehnung als Biegegleitung. Es bleibt noch übrig, die schon mehrfach erwähnte Nachdehnung zu diskutieren.

Eine genaue Untersuchung, die sich hier wegen der Kleinheit der Objekte (Nachdehnungsfäden) sehr schwierig gestalten würde, erübrigte sich, da wir weitgehend auf die Analogie der Flachdehnung bauen konnten.

Der Nachweis, daß auch die Nachdehnung durch gleichzeitige Gleitung und Biegung von Gleitschichten zustande kommt, läßt sich

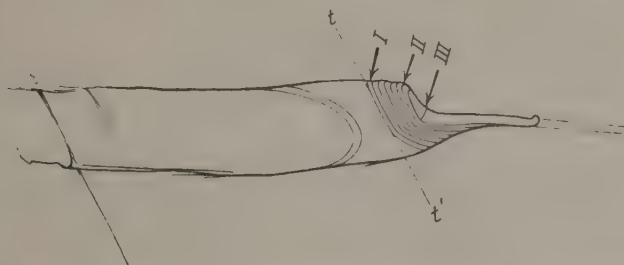


Fig. 19. Stoßstelle zwischen einem flachen Bande und einem Nachdehnungsfaden. Die aus Fig. 18c folgende Krümmung der Gleitschichten und der hier wie dort mit Pfeil III bezeichnete Knick treten deutlicher hervor.

(Nachzeichnung von Taf. VI, Fig. 30.)

durch Betrachtung der Stellen führen, wo der Nachdehnungsfaden an das Kristallband stößt.

Eine solche Stelle ist z. B. das zugespitzte Ende des in Tafel VI, Fig. 30, gezeigten Kristallbandes. Um das Gesamtbild zu erhalten, hat man sich den (abgerissenen) Nachdehnungsfaden über die Spitze

¹⁾ Die elastischen Spannungen, die sich durch diese Umbiegungen aufspeichern, haben zur Folge, daß beim Anätzen deformierter Zn-Kristalle an deren Oberfläche Risse entstehen.

²⁾ Vgl. z. B. Niggli, Lehrb. d. Mineralogie (Berlin, Bornträger, 1920), S. 174 oder den Bericht von Johnsen in Jahrb. d. Rad. u. Elektronik 11, 226, 1914.

hinaus fortgesetzt zu denken, etwa wie dies in der Nachzeichnung der Photographie in Fig. 19 durch die gestrichelten Linien angedeutet ist.

Daß diese Stoßstellen einem Biegegleitungsvorgang entsprechen, geht aus folgendem hervor:

a) Die Umrissse von Fig. 19 weisen die charakteristische in Fig. 18 abgeleitete Form solcher Stoßstellen auf: man erkennt deutlich die in Fig. 18c mit Pfeil III bezeichnete Einbuchtung (auch in Fig. 19 mit Pfeil III bezeichnet).

Die gegenseitige Stellung zweier zusammengehöriger Stoßstellen war nach unseren Beobachtungen so, wie es Fig. 20 schematisch zeigt,



Fig. 20. Typische gegenseitige Lage zweier zusammengehöriger Stoßstellen. Entspricht der Fig. 18c.

entsprach also auch der Konstruktion 18c. Man erkennt dies z. B. bei genauer Betrachtung der Fig. 1 der Tafel I.

b) Weitere Beweise liefert das Studium der Gleitungen, welche die Nachdehnung verursachen, bzw. die Beobachtung der entsprechenden Gleitlinien.

Eine genaue Untersuchung des Nachdehnungsfadens weist an diesem Gleitlinien auf, deren Ebenen so liegen, wie die Gleitebenen in Fig. 18c im mittleren Teil des Kristallbandes. Man erkennt diese



Fig. 21. Nachzeichnung der in Taf. II, Fig. 14 abgebildeten Nachdehnung. Man sieht im Nachdehnungsfaden die Gleitebenen so liegen, wie im mittleren Teil des Bandes der Fig. 18c.

Linien bei sorgfältiger Betrachtung des Nachdehnungsfadens in Fig. 14 der Tafel II, der in Fig. 21 nachgezeichnet ist.

Entlang der Ebenen, deren Spuren diese Linien sind, ist die Gleitung erfolgt, die zur Entstehung des Nachdehnungsfadens geführt hat. Sie spielen hier dieselbe Rolle wie die Gleitellipsen beim Kristallbande.

Verfolgt man den Verlauf der Gleitlinien des Nachdehnungsfadens an der Stoßstelle im Mikroskop, so sieht man, daß sie sich umkrümmen und um die Einbuchtung herumziehen, genau, wie dies aus Fig. 18 c folgen muß.

So gekrümmte Gleitlinien sind an der Stoßstelle in Tafel VI, Fig. 30, bei genauer Betrachtung zu sehen und sind in Fig. 19 noch hervorgehoben.

Die Photographie in Tafel VI, Fig. 31, soll dies Bild noch vollständigen durch einen Blick in die Einbuchtung der Stoßstelle. (Die Vergrößerung ist 1,6 mal so stark, wie in Fig. 30 der Tafel.)

Man sieht zwischen Pfeil I und II die dicht zusammengedrängten Scheitel jener Gleitschichten, deren gekrümmter Verlauf in Fig. 19 hervorgehoben ist (vgl. dort Pfeil I und II).

Bei Pfeil II beginnt die Einbuchtung. Hier liegt die in der Seitenansicht (Fig. 19) ebenfalls durch Pfeil II hervorgehobene Stelle.

Von dieser ab folgen die Gleitlinien in viel größeren Abständen aufeinander, was daran liegt, daß die Gleitung erst hier in vollem

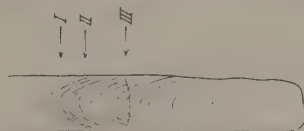


Fig. 22. Nachzeichnung der Fig. 31 der Taf. VI. Blick in die Einbuchtung der Stoßstelle zwischen Nachdehnungsfaden und Kristallband. Zwischen den Pfeilen I und II liegen die Scheitel der gekrümmten Gleitflächen. Bei II beginnt die Einbuchtung, deren Knickstelle bei Pfeil III liegt.

Maße einsetzt, und zwar durch erheblich gesteigerte Verschiebungen entlang der einzelnen Schichten¹⁾.

Es ist merkwürdig, wie diese Gleitschichten die mit Pfeil III bezeichnete Knickstelle der Einbuchtung durchziehen. Sie durchqueren ungestört den feinen, hellen Querstreifen, der diese Stelle andeutet. (Eine Nachzeichnung der Fig. 31 der Tafel VI zeigt Fig. 22.)

2. Die Gleitfläche der Nachdehnung. Die Methoden, mit Hilfe deren wir die Gleitfläche der Flachdehnung festgestellt haben, lassen sich zur Untersuchung der Nachdehnung nicht anwenden. Dagegen gelangt man hier auf folgende Weise zum Ziel.

Man erkennt leicht, daß man die Richtung der Spur der Gleitebenen, die die Nachdehnung verursachen, in der Ausgangslage erhält,

¹⁾ Dementsprechend gelangt man zur eigentümlichen Folgerung, daß das Fortschreiten der Dehnung nicht durch Ausbildung neuer Gleitschichten erfolgt, sondern durch weitere Abgleitung an bereits ausgebildeten Gleitebenen.

wenn man an die gekrümmten Gleitlinien eine Tangente anlegt, an der Stelle, wo sie an die Kante des Kristallbandes stoßen. Eine solche Konstruktion führt etwa im Falle von Fig. 19 zur punktierten Geraden tt' .

Welche Kristallebene dieser Geraden als Spur folgt, erkennt man daran, daß sie parallel zu den „schrägen“ Gleitlinien läuft, was in Fig. 19 deutlich hervortritt.

Sehr gut sieht man diese Verhältnisse auch ohne geometrische Hilfsmittel an Fig. 32 der Tafel VI. Man erkennt ohne weiteres, daß die gekrümmte Gleitlinie zwischen den Pfeilen I von gleicher Art ist wie die beiden schrägen Gleitungen, die durch die Pfeilenpaare II und III bezeichnet sind.

Da aber vorhin (S. 68 u. 96) gezeigt worden war, daß die schrägen Gleitlinien durch die Prismenfläche erster Art hervorgerufen werden, ist somit erwiesen, daß der Nachdehnung eine Gleitung entlang dieser Ebene zugrunde liegt.

Die kristallographische Richtung, nach der die Gleitung in dieser Ebene erfolgt, konnten wir nicht mit Sicherheit feststellen. Die Schwierigkeit, die dies behinderte, bestand darin, daß die Kraftrichtung von vornherein sehr nahe mit der wichtigsten kristallographischen Richtung der Gleitebene zusammenfiel. Es ist dies nämlich die als Parallelstreifung auftretende Kante der Basisfläche, von der wir gesehen haben (vgl. oben Fig. 13 und Fig. 13 der Tafel II), daß sie sehr nahe mit der großen Ellipsenachse der Gleitebene — also der Kraftrichtung — zusammenfällt.

Beobachtet wurde, daß die Gleitung merklich in Richtung der großen Ellipsenachse eintrat, und es liegt im Hinblick auf die geklärten Verhältnisse bei der Basisgleitung der Schluß nahe, daß die Gleitung auch hier entlang der Schnittkante von Basis- und Prismenfläche erster Art (digonalen Achse erster Art) erfolgt.

3. Orientierung des Gitters im Nachdehnungsfaden. Aus dem Inhalt des vorangehenden Kapitels folgt, daß sich das Gitter bei der Nachdehnung so umstellt, daß eine Prismenfläche erster Art, die ursprünglich etwa 25 bis 30° C mit der Querschnittsebene einschloß, in eine steile Lage zu ihr gerät, die einen kleinen Winkel mit der Drahtachse einschließt. Dieser beträgt z. B. bei Nachdehnung um das Achtfache, wie sich durch Anwendung der Dehnungsformel (1) ergibt, 6 bis 7°.

Die Orientierung der hexagonalen Achse im Nachdehnungsfaden findet man mit ausreichender Annäherung, indem man die Drehachse aufsucht, um die man sich die Gleitebene der Nachdehnung gedreht zu

denken hat, um aus dem Anfangszustand in den Endzustand zu gelangen. Durch Vergleich der Schemen Fig. 12 und Fig. 19 erkennt man, daß sie sehr nahe mit der hexagonalen Achse übereinstimmt.

Die hexagonale Achse muß also im Nachdehnungsfaden ähnlich orientiert sein wie im Kristallbande, also einen spitzen Winkel zur Querebene einschließen.

Nun kommt es bei solcher Lage der Hauptachse so ziemlich auf das gleiche hinaus, ob man der Prismenfläche erster Art vorschreibt, daß sie 25 bis 30° zur Querebene (Kristallband) oder 6 bis 7° zur Drahtachse (Nachdehnungsfaden) einschließen soll.

Es folgt, daß die Gitterorientierung relativ zur Drahtachse von der Nachdehnung nicht merklich berührt werden kann, ein Schluß, den die Röntgenaufnahme eines Nachdehnungsfadens (bei Drehung um die Drahtachse) durchaus bestätigt hat, indem sich die Werte

$$\begin{aligned} 90 - \varrho_B &= 18^\circ \\ \pi &= 3^\circ \end{aligned}$$

ergaben¹⁾, also Zahlen, wie man sie bei Kristallbändern findet. Wir haben die Röntgenaufnahme, aus der wir diese Werte entnehmen, in unsere Tafel aufgenommen (Fig. 34 der Taf. VI), weil sie merkwürdige Anomalien aufweist. Diese bestehen in Abweichungen von der Symmetrie relativ zur horizontalen Mittellinie (wie sie etwa in den Figg. 15 und 16 der Taf. III schön hervortritt). Während links und rechts Länge und Form der Interferenzstreifen genau übereinstimmen, sind sie oben und unten sehr verschieden. Dieses Verhalten ist so, als würden die Netzebenen nach der einen Seite anders reflektieren, als nach der anderen.

Eine ganz ähnliche Merkwürdigkeit zeigt das in Fig. 35 der Taf. VI gezeigte Drehdiagramm eines gedehnten polykristallinen Zn-Drahtes. Die Interferenzstreifen auf dem innersten „Kreise“ sind oben viel intensiver als unten. Die Aufnahme ist zweimal mit gleichem Ergebnis wiederholt worden.

Eine Erklärung für diese ziemlich häufigen Anomalien können wir nicht geben.

Zusammenfassung.

Die Gleitschichten, die sich unter Wirkung der dehnenden Kraft im Einzelkristall ausbilden, erleiden, indem sie sich gegeneinander

¹⁾ ϱ_B ist wieder der Winkel zwischen hexagonaler Achse und Drahtachse und π der Winkel zwischen digonaler Achse erster Art und Projektion der Drahtachse auf die Basis.

verschieben, Umbiegungen, die den Dehnungsvorgang wesentlich mitbedingen.

Durch diese Umbiegungen entsteht eine Umorientierung des Gitters, zufolge deren die Gleitebene aus einer beliebigen Anfangslage in eine bestimmte Endlage relativ zur Drahtachse gelangt, und zwar so, daß sie mit dieser einen mehr oder minder spitzen Winkel (2° bis 15°) einschließt.

Dieser Endwinkel ist eine inverse Funktion der Temperatur. Da die Dehnung um so größer sein kann, je kleiner dieser Winkel ist, so steigt sie mit der Temperatur an.

Ist der Endwinkel, dem die Gleitfläche für eine bestimmte Temperatur zustrebt, einmal bekannt, so läßt sich die Dehnbarkeit aus der Orientierung des Gitters im Ausgangsdraht voraussagen.

Insbesondere kann man so auch erkennen, welche Drähte von Haus aus undehnbar sind: offenbar jene, in denen die Gleitebene keinen größeren Winkel mit der Drahtachse einschließt, als den für die betreffende Temperatur geltenden Endwinkel.

Bei den beiden Dehnungsarten, der Flachdehnung und der Nachdehnung, betätigen sich verschiedene Gitterebenen als Gleitflächen. Im ersten Falle ist es die Basis (dichtest belegte Ebene), im zweiten die Prismenfläche erster Art (zweitdichtest belegte Ebene). Da die erstere Dehnung unvergleichlich ergiebiger ist als die letztere, so folgt, daß die dichter belegte Basis viel besser gleitet, als die etwas weniger dichte Prismenfläche erster Art.

Man versteht also, daß Drähte, in denen die Basisflächen von Haus aus nahezu parallel zur Drahtachse standen, sich als praktisch undehnbar erwiesen. Solcher Art sind die „spröden“ Kristalle.

Bei der Basisgleitung konnte nachgewiesen werden, daß die Verschiebung nicht in Richtung größter Schubkraft, sondern in Richtung derjenigen digonalen Achse erster Art (dichtest belegte Kante des Gitters) erfolgt, welche der Kraftrichtung zunächst liegt.

Das Vorhandensein einer kristallographisch bestimmten Gleitrichtung hat zur Folge, daß die Endorientierung, der das Gitter bei der Kristalldehnung zustrebt, eine ganz bestimmte wird. Sonst könnte man nur sagen, daß eine bestimmte Ebene (die Gleitebene) bestrebt ist, sich möglichst der Dehnungs- (und Draht-) Richtung anzuschmiegen. Nun folgt aber noch, daß sich diese Ebene nicht beliebig, sondern mit einer bestimmten Richtung parallel zur Drahtachse stellen wird, wodurch die Grenzorientierung der Dehnung eine ganz bestimmte wird.

Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie. Phys.-Chem. Abt.

Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen.

III. Mitteilung.

Beziehungen zur Faserstruktur und Verfestigung.

Von **H. Mark, M. Polanyi** und **E. Schmid** in Berlin-Dahlem.

Mit einer Tafel (Tafel VI). (Eingegangen am 30. September 1922.)

1. Andere Metalle als Zn. Bevor wir auf Grund der gewonnenen Ergebnisse auf die eingangs gestellte Frage nach dem Ursprung der Dehnungsstruktur und der Dehnungsverfestigung zurückkehren, wollen wir noch einen Blick auf das Verhalten anderer Metalle als Zn werfen.

Hier liegen zunächst eigene Erfahrungen vor an den bereits von v. Gomperz in Einkristalldrahtform gewonnenen Metallen Sn, Bi, Al, Pb ¹⁾. Die vorläufige Untersuchung von Kristallen dieser Elemente ergab folgendes:

Je nach den Herstellungsbedingungen erhält man bei Sn bis auf das Achtfache dehnbare, oder ganz undehnbare Kristalle. Die Dehnung ist eine reine Flachdehnung.

Ähnliches gilt für Bi: die dehnbaren Kristalle dieses Elementes konnten bei $t = 200^{\circ}$ unter Flachwerden bis auf das Dreifache verlängert werden.

Ebenso zeigten Pb-Kristalle bei gewöhnlicher Temperatur Flachdehnung bis auf das Doppelte. Schließlich gaben auch Al-Kristalle bei erhöhter Temperatur Flachdehnung mit Gleitlinien.

In allen diesen Fällen ist die Entstehung von Gleitlinien beobachtet worden, deren Form und Lage relativ zum entstandenen Kristallbande ähnlich war wie bei Zn.

Flachdehnung ist auch von H. C. H. Carpenter und F. Elam ²⁾ an ihren, nach der Rekristallisationsmethode hergestellten Al-Kristallen beobachtet worden.

Über Flachdehnung von Sn-Kristallen und die dabei entstehenden Gleitlinien berichtet auch Burger ³⁾ in seiner erwähnten Notiz. Er erhielt dehnbare Sn-Kristalle durch Erhitzen von undehnbaren auf 220° C.

¹⁾ E. v. Gomperz, l. c.

²⁾ H. C. H. Carpenter und F. Elam, Proc. Roy. Soc. **100**, 240, 1921.

³⁾ Burger, Physica **2**, 56, 1922. Zitiert nach ZS. f. Metallkunde **14**, 258, 1922.

Diese Angaben genügen wohl, um die Annahme zu stützen, daß die Flachdehnung und hiermit die ihr zugrunde liegende Biegegleitung ein sehr verbreiteter Mechanismus der Dehnung ist.

2. Entstehung der Faserstruktur. Die Erfahrungen über das Verhalten von Einzelkristallen können wir nur dann auf die Frage nach der Entstehung der Faserstruktur anwenden, wenn wir annehmen dürfen, daß bei der Dehnung polykristalliner Drähte die Einzelkristalle mitgedehnt werden.

Daß diese Annahme in der Tat berechtigt ist, läßt schon die Betrachtung der Faserstruktur selbst erkennen. Ihr axialer Charakter zeigt, daß die wesentliche Deformation der Einzelkristalle in die Dehnungsrichtung fällt, was nur als Mitdehnung derselben gedeutet werden kann¹⁾.

Diese Folgerung bestätigte sich bei der Untersuchung von gedehnten polykristallinen Zinkdrähten. Die röntgenographische Untersuchung eines bei 180° C gedehnten Zinkdrahtes ergab ein Maximum der Häufigkeit jener Kristallagen, bei denen die Basisfläche unter etwa 20° zur Drahtachse steht (vgl. das Diagramm Fig. 35 der Tafel VI). Man sieht also, daß bei Dehnung des Zinkdrahtes die Kristallite sich ähnlich verhalten wie einzeln gedehnte Kristalle.

Auf Grund dieser Anschauung gelangt man nun zwanglos zu einer Erklärung der Faserstruktur.

Wir haben nur daran zu erinnern, daß die Basisgleitung von Zn bei erhöhter Temperatur zu einer Endorientierung führt, bei der eine bestimmte kristallographische Richtung (die Richtung $[10\bar{1}0]$) nur um wenige Grade (2 bis 4°) von der Dehnungsrichtung abweicht²⁾. Es liegt dann auf der Hand, anzunehmen, daß die „paratropen“ (sich in die Dehnungsrichtung einstellenden) kristallographischen Richtungen der kubischen Metalle (Flächendiagonale für raumzentrierte, Raumdiagonale und Würfelkante für flächenzentrierte Gitter) hier die Rolle spielen, die bei Zn der $[1010]$ -Richtung zukommt. Es wären also dies entweder die Gleitrichtungen selbst oder von diesen nur wenig abweichende Richtungen.

¹⁾ Bisher ist die Dehnung als Folge von Scherungen (das ganze Haufwerk schief durchsetzende Gleitungen) aufgefaßt worden (vgl. insbesondere P. Ludwik, Grundriß der technologischen Mechanik; Berlin, Verlag J. Springer, 1909) und es muß auch wohl das Auftreten solcher Deformationen in Anbetracht der schiefen „Fließlinien“, die an gedehnten Stäben zu sehen sind, als bewiesen gelten. Als ausschlaggebend müssen wir aber, wie im Text ausgeführt, namentlich für die Reckung von Drähten die Dehnung der Einzelkristalle betrachten.

²⁾ Vgl. II. Mitteilung, S. 93 und 110.

Dieses Ergebnis würde zwar mit der Faserstruktur gedehnter Drähte, wie sie von Ettisch, Polanyi und Weissenberg beschrieben ist, nicht exakt übereinstimmen, doch läßt sich leicht einsehen, daß die Abweichung nicht merkbar wäre. Der Befund lautete dort¹⁾ auf Paratropie der erwähnten Richtungen ([110] bzw. [111] und [100]) mit einer „Verwackelung“ von etwa 5°. Das reale Faserdiagramm, aus dem dieser Befund geschlossen wurde, kann aber nicht unterschieden werden von dem Diagramm, das bei Paratropie einer von [110] bzw. [111] und [100] um 2 bis 3° abweichenden Richtung entstehen würde, wenn eine solche Faserstruktur auch nur etwa 2 bis 3° Verwackelung hätte. Die kleine Abweichung der paratropen Richtung von [110] bzw. [111] und [100] würde nämlich eine Aufspaltung der einzelnen Maxima in 2 bzw. 3 oder 4 Streifen bedingen, welche durch die Verwackelung wieder zusammenfließen würden.

Wir haben diese Erklärung der Faserstruktur gedehnter Drähte hier mitgeteilt, weil die zwanglose Art, wie sie aus dem Bilde der Biegegleitung folgt, ihr einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit verleiht. Bewiesen wird aber diese Erklärung nur sein, wenn sich einerseits durch Untersuchung von Einkristallen ergibt, daß die Gleitrichtungen von kubischen Metallen die [110] bzw. [111] und [100] Richtungen sind und andererseits genaue (photometrische) Untersuchung der Faserdiagramme gedehnter Drähte die oben beschriebene feinere Struktur der Interferenzmaxima bestätigt.

3. Die Verfestigung. Aus der in der zweiten Mitteilung formulierten Bedingung der Dehnbarkeit von Zinkkristallen

$$d = \frac{\sin(90 - \delta)}{\sin(90 - \delta')}$$

läßt sich eine Verfestigung solcher Kristalle ablesen. Denn während der Dehnung nähert sich der Neigungswinkel von Basisfläche zur Drahtachse immer mehr dem bei der betreffenden Temperatur nicht unterschreitbaren Endwerte von $90 - \delta'$, bei dem die Dehnbarkeit aufhört.

Dieser Verfestigungsmechanismus kann aber, wie man leicht ein- sieht, unmöglich die allgemeine Ursache der Verfestigung enthalten, und zwar deswegen nicht, weil er nur für nichtkubische Gitter und auch hier nur ausnahmsweise formuliert werden kann. Sobald nämlich die Gleitebene im Gitter in mehreren Lagen vorkommt, bleibt die Dehnbarkeitsbedingung stets erfüllt, da im Augenblick, wo eine Gleit-

¹⁾ Ettisch, Polanyi, Weissenberg, ZS. f. Phys. 7, 181, 1921.

ebene sich in die Endstellung mit dem Winkel $90 - \delta'$ eingestellt hat, stets andere Ebenen derselben Art vorhanden sein werden mit Neigungswinkeln, die größer als $90 - \delta'$ sind, sich also in einer zur Gleitflächenbildung geeigneten Lage befinden. Bei kubischen Metallen kommt aber jede Ebene mehrfach im Gitter vor.

Der Orientierungswechsel spielt also bei der Verfestigung keine allgemeine und vielleicht überhaupt keine beträchtliche Rolle¹⁾.

Doch scheinen uns die oben mitgeteilten Erfahrungen trotzdem ein gewisses Licht auf die allgemeinen Ursachen der Verfestigung zu werfen. Und zwar ist zunächst einleuchtend, warum Einkristalle so viel dehnbarer sein können, als polykristalline Haufwerke²⁾: Die Biegegleitung ist an ganz bestimmte Änderungen der äußeren Form des Kristalles gebunden. In einer lückenlos zusammengewachsenen Kristallmasse müßten alle Korngrenzen aufplatzen, sollten die zur Dehnung notwendigen Formänderungen der Einzelkristalle frei vor sich gehen können. Da aber dieses Aufplatzen durch die interkristallinen Kräfte verhindert wird, so kann weder die Formänderung, noch die an sie gebundene Dehnung auch nur annähernd in dem Maße vor sich gehen, wie dies bei Einkristallen möglich ist. Je feiner das Korn, um so größer ist die Oberfläche der Körner (im Verhältnis zu ihrer Masse), um so mehr muß die interkristalline Gebundenheit die Dehnung hemmen. So ergibt sich zwanglos der bekannte Parallelismus zwischen Kornfeinheit und Festigkeit [Höhe der Elastizitätsgrenze, Undehnbarkeit]³⁾.

Unsere Erfahrungen bieten auch noch folgenden Anhaltspunkt für das Verständnis der Verfestigung. Verschiedentlich ist von einer Verknüpfung von Gleitflächen gesprochen worden, die sich in einer Wellenform von Kristallflächen⁴⁾ und Nichtparallelität von Streifungen solcher Flächen⁵⁾ äußerte. Wir haben auch gekrümmte Gleitflächen an Stoßstellen zwischen gedehnten und ungedehnten Drahtteilen beobachtet und darauf hingewiesen, daß dieser sichtbaren Krümmung eine

¹⁾ Da Cellulose ein rhombisches Gitter hat, so besteht hierdurch allerdings die Möglichkeit, daß die Faserstruktur der natürlichen Faser ihre hohe Festigkeit bedingt.

²⁾ Es sei hier nochmals betont, daß dieser Unterschied ganz enorm ist. Die Dehnungen, die wir an den Einzelkristallen erzielt haben, übertreffen die normale Dehnbarkeit des Metalles um das 100- bis 1000fache. Man bedenke z. B., daß bei $t = 200^\circ$ erzeugte Nachdehnungsfäden von Zn auf das 150fache der Ausgangslänge gedehnt waren (vgl. S. 93 und 108).

³⁾ Vgl. z. B. Tammann, Metallographie.

⁴⁾ Vgl. I. Mitteilung, S. 63.

⁵⁾ Vgl. II. Mitteilung, S. 89.

recht verwickelte Krümmung der Fläche entsprechen muß¹⁾. Bei dem Bilde des geätzten Schliffes eines gekrümmten Kristallbandes war auf die gekrümmten Ätzlinien aufmerksam gemacht worden²⁾.

Diese Knüllung, die, wie man wohl annehmen darf, die Gleitung wesentlich hemmen muß, ist nochmals in Taf. VI, Fig. 33 dargestellt. Es findet sich dort die Photographie einer Reißfläche eines Kristallbandes (Prismenfläche), an der man die der Basiskante entsprechende Streifung wellenförmig geknüllt sieht. Es bestätigt sich hierin die Ansicht von P. Ludwik³⁾, der auf Grund der Versuche von O. Mügge an Steinsalz annahm, daß die Translation zur Verbiegung der gleitenden Schichten und hierdurch zur „Blockierung“ der Gleitflächen führt.

Einen Beweis für die Rolle, die solche Verknüllungen bei der Verfestigung spielen, erblicken wir darin, daß, wie wir beobachten konnten, dehnbare Kristalle durch seitliche Zusammendrückung sowie Torsion ihre Dehnbarkeit einbüßen.

Zusammenfassung. Flachdehnung und Biegegleitung sind sehr allgemeine Erscheinungen, was durch den Umstand, daß sie außer bei Zn auch bei Sn, Bi, Al und Pb vorkommen, bewiesen wird.

Bei Reckung polykristalliner Drähte werden die Einzelkristalle mitgedehnt.

Diese Feststellungen erlauben uns zu den in der I. Mitteilung gestellten Problemen folgendermaßen Stellung zu nehmen:

Bei Dehnung von Einzelkristallen erfolgt (durch Biegegleitung) eine Umorientierung des Gitters in dem Sinne, daß sich eine bestimmte Kristallrichtung (die Gleitrichtung) nahezu parallel zur Dehnungsrichtung stellt.

Bei Zn findet man, daß bei dieser Umorientierung die Dehnbarkeit im wesentlichen verschwindet, also eine erhebliche Verfestigung erfolgt, die man auch vom Standpunkt des Biegeungsmechanismus (wenigstens geometrisch) verstehen kann.

Dieser Verfestigungsmechanismus wird wohl bei den nicht-regulären Metallen (Zn, Bi, Sn, Cd) eine Rolle spielen, schwerlich aber bei den regulären⁴⁾.

Da aber gerade die technisch wichtigsten Metalle (Fe, Cu, Al, Wo, Mg, Au usw.) der letzteren Gruppe angehören, so muß man sagen,

¹⁾ Vgl. II. Mitteilung, S. 104.

²⁾ Vgl. I. Mitteilung, S. 76.

³⁾ P. Ludwik, ZS. d. V. d. Ingenieure 1919, S. 142.

⁴⁾ Dies wäre allerdings dann möglich, wenn es mehrere getrennte Lagenbereiche der Gleitebene relativ zur Dehnungsrichtung gebe, innerhalb deren sie gleitunfähig wäre. Die Faserstrukturbefunde an gedehnten Drähten machen dies jedoch sehr unwahrscheinlich.

daß die Dehnungsumorientierung kein wesentlicher Faktor der Verfestigung ist, und daß also insbesondere die Faserstruktur gereckter Drähte wenig mit ihrer Verfestigung zu tun hat.

Die Faserstruktur kann man sich so entstanden denken, daß die „paratropen“ Richtungen der Einzelkristalle Gleitrichtungen sind, die sich infolge Biegegleitung nahezu parallel zur Dehnungsrichtung stellen.

Als allgemeine (aber schwerlich ausschließliche) Ursachen der Verfestigung polykristalliner Aggregate können gelten:

Die Behinderung der zur Dehnung der Einzelkristalle nötigen äußeren Formänderungen (Flachdehnungen) durch das Aneinanderhaften der Kriställchen im Haufwerk.

Die durch mechanische Bearbeitung herbeiführbare Verkrümmung (Blockierung) der Gleitschichten.

Herrn Dr. K. Weissenberg, der uns durch verschiedene Anregungen, namentlich im geometrischen Teil, gefördert hat, Herrn Dipl.-Ing. E. v. Gomperz, der einen Teil der Einkristalldrähte geliefert, und Herrn cand. phil. R. Brill, der uns bei den Röntgenuntersuchungen unterstützt hat, sind wir zu wärmstem Dank verpflichtet. Schließlich möchten wir noch dem Materialprüfungsamt in Berlin-Lichterfelde W für Überlassung der photographischen Einrichtungen verbindlichsten Dank sagen.

Kaiser Wilhelm-Institut f. Faserstoffchemie. Phys.-Chem. Abt.

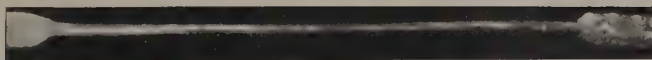


Fig. 1. Kristallband mit Nachdehnungsfaden. Senkrecht zur Bandfläche gesehen. Die Dehnung relativ zum Ausgangsdraht ist etwa 25fach, Vergr. = 15.

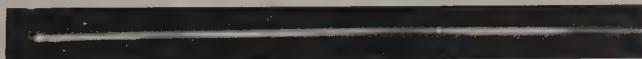


Fig. 2. Dasselbe Kristallband wie in Fig. 1. In Richtung der Bandfläche gesehen. Vergr. = 15.



Fig. 3. Kristallband mit elliptischen Gleitlinien. Blick senkrecht zur Bandfläche. Vergr. = 8.



Fig. 4.
Schräge Gleitlinien am Kristallband (neben
Gleitellipsen).
Vergr. = 8.

Fig. 5. Neben
der besonders
starken Aus-
gleitung am
linken Ende



des Bandes findet man entlang desselben feinere schräge Gleitlinien anderer Richtung, denen die Endflächen parallel sind. Vergr. = 8.



Fig. 6. Kristallband mit
Gleitellipsen (regelmäßig
und dicht gelagert) und
„atypischen“ Ellipsen (ein-
zeln, langgestreckt, ent-
gegengesetzt verlaufend).
Vergr. = 10.

Fig. 7. Dehnbarer, kreisrunder
Ausgangsdraht, mit drei kreis-
förmigen Ritzern (siehe Pfeile).
Vergr. = 10.

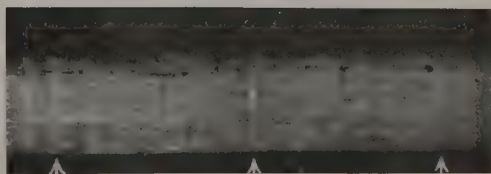




Fig. 8.
Der in Taf. I, Fig. 7
dargestellte Draht
nach der Dehnung.
Die drei Ritzter zeich-
nen sich als, den
elliptischen Gleitlinien
entgegengesetzt lau-
fende, „atypische“ El-
lipsen ein. Vergr. = 10.

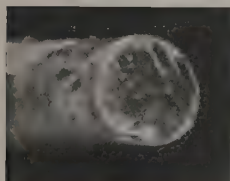


Fig. 9. Reißfläche eines sprö-
den Drahtes, nahezu quer-
stehend (Prismenfläche I. Art).
Vergr. = 15.

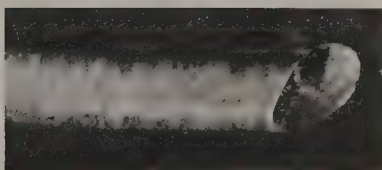


Fig. 10. Dehnbarer Draht mit bei 191,50
absolut erzeugter Reißfläche (Basisfläche).
Schräge Stellung. Vergr. = 10.

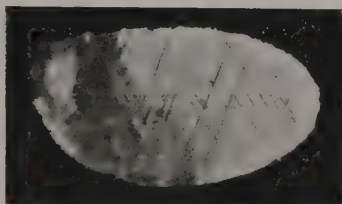


Fig. 11.
Reißfläche eines dehn-
baren Drahtes, welche
zwei Scharen paral-
leler Streifungen (die
sich unter etwa 60°
schneiden) und an-

gedeutet auch noch
eine dritte Streifung
(wieder unter 60° mit
den beiden anderen)
zeigt. Die Fläche ist
leicht gewellt.
Vergr. = 15.

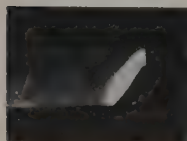


Fig. 12. Flachgedehntes Band mit
Reißfläche (Prismenfläche I. Art).
Vergr. = 15.

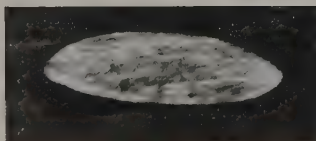


Fig. 13. Reißfläche eines flachgedehnten Bandes mit
der für diese Fläche typischen, aus einer Parallelen-
schar bestehenden Streifung. Vergr. = 25.

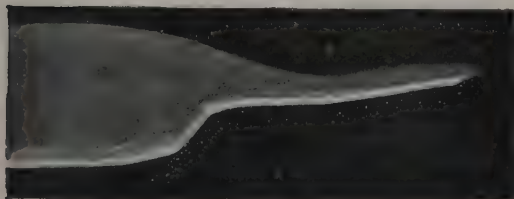


Fig. 14. Reißstück eines
flachgedehnten Bandes bei
gewöhnlicher Temperatur
(Blick senkrecht zur Band-
fläche). Abreißen in dem
sich ausbildenden Nach-
dehnungsfaden.
(Vgl. Fig. 21 auf S. 106.)
Vergr. = 16.

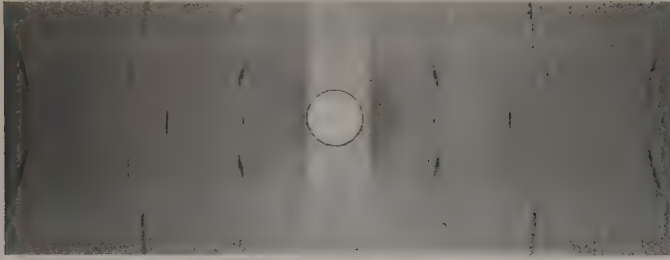


Fig. 15. Drehdiagramm (Zylinderfilm), aufgenommen an dem einen Ende eines langen Kristalldrahtes.

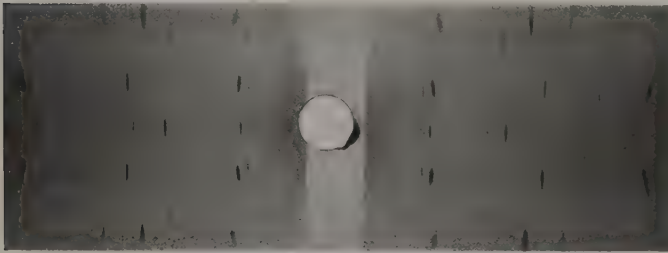


Fig. 16. Desgleichen mit dem anderen Ende desselben Kristalles aufgenommen.

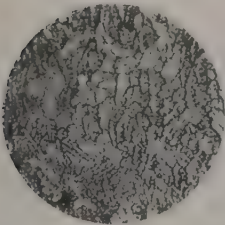


Fig. 17. Geätzter Schliff eines Gußstückes aus Kahlbaum-Zink.
Vergr. = 10.

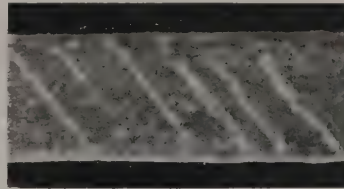


Fig. 18. Geätzter Schliff eines spröden Einkristalldrahtes. Keine Korngrenzen und eine Schar paralleler Ätzlinien.
Vergr. = 10.

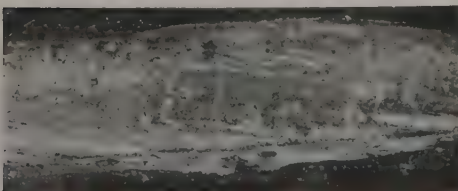


Fig. 19.
Geätzter Schliff eines dehnbaren Einkristalles.
Vergr. = 10.

Fig. 20.

Geätzter Schliff eines gedehnten Einkristalldrahtes mit Scharen paralleler Ätzzlinien. Diese krümmen sich mit bei der Krümmung des Drahtes.

Vergr. = 10.

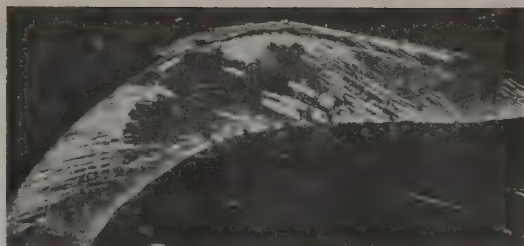


Fig. 21. In der Kälte gerissener und sodann unter Schonung des Endteiles gedehnter Draht. (Blick in Richtung des entstandenen Bandes.) Vergr. = 10.

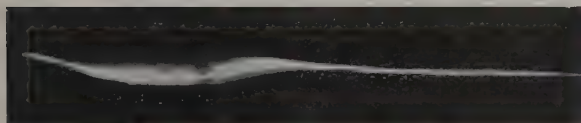


Fig. 22. Derselbe Draht senkrecht zur Baudebene. Identität der Reißellipse mit den Gleitellipsen. (Vgl. Fig. 1 auf S. 78.) Vergr. = 10.



Fig. 23. Reißstelle eines dehnbaren Drahtes, die sich aus Basis und Prismenfläche I. Art zusammensetzt. (Vgl. Fig. 11 auf S. 90.) Querrillen am Drahte. Vergr. = 15.

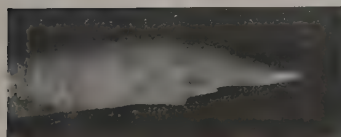


Fig. 24. Schwach gedehnter Draht mit Reißfläche, die sich identisch mit den Gleitellipsen zeigt. Vergr. = 16.

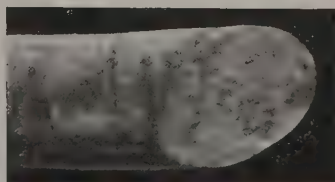


Fig. 25.

Flache Einschnürungen, die sich in der ersten Phase der Dehnung bilden. Vergr. = 15.



Fig. 27.
Dasselbe
Band
wie Fig. 26
senkrecht
z. Bandebene
gesehen. Die
ungedehnten
Stellen deut-
en sich d.
schwache
Einschnü-
rungen an.
Vergr. = 6.



Fig. 26. Kristallband mit mehreren noch ungedehnten Stellen. Blick parallel zur Bandfläche. (Zur Erzielung stärkerer Vergrößerung bogenförmig gekrümmt.)
Vergr. = 15.

Fig. 28. Konfigura-
tion der Stoßstellen.
Kristallband zwisch.
ungedehnten Draht-
stücken. Die Pfeile
zeigen Korngrenzen
an. Vergr. = 8.

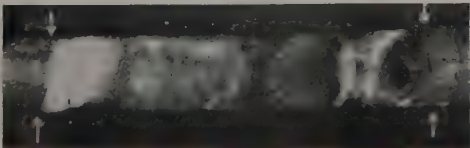
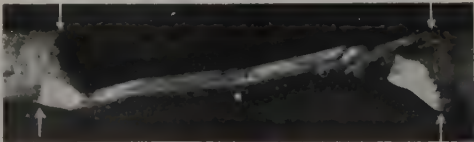


Fig. 29.
Derselbe Draht
senkrecht zur Band-
fläche gesehen.
Vergr. = 8.

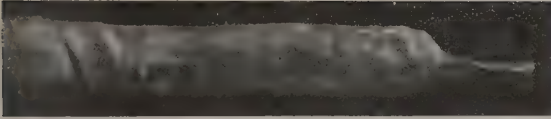


Fig. 30. Kristallband mit Ansatz z. Nachdehnung. In der Nähe der Stoßstelle geknickte Gleitlinien. (Vgl. Nachzeichnung Fig. 19 auf S. 106.) Vergr. = 10.

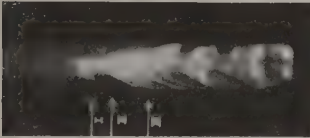


Fig. 31. Blick in die Einbuchtung dieser Stoßstelle. Zwischen den Pfeilen I und II liegen die Scheitel der gekrümmten Gleitflächen. Bei II beginnt die Einbuchtung, deren Knicke bei Pfeil III liegt. (Vgl. Nachzeichnung Fig. 22 auf S. 107.) Vergr. = 16.

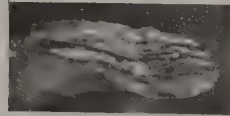


Fig. 33. Reißfläche eines Kristallbandes mit geknüllter Streifung. Vergr. = 15.

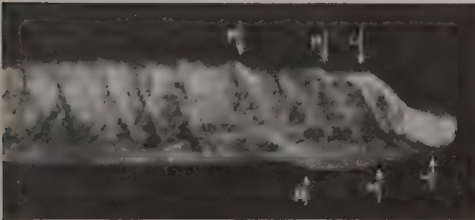


Fig. 32.

Kristallband (Blick senkrecht zur Bandebene). Die gekrümmte Gleitlinie I—I und die geraden II—I und III—III gehören einer gemeinsamen Scher an.

Vergr. = 16.

Fig. 34.

Drehdiagramm eines gedehnten Einkristalldrahtes.

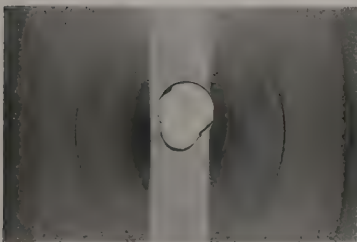
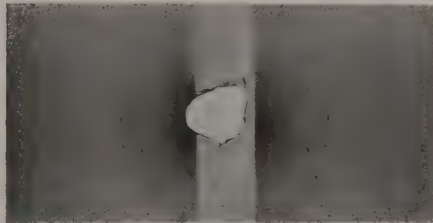


Fig. 35.

Drehdiagramm eines gedehnten, polykristallinen Zn-Drahtes.

Untersuchungen an β -Strahlenbahnen.

Von W. Bothe in Charlottenburg.

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Mit einer Abbildung und einer Tafel (Tafel VII). (Eingegangen am 23. Okt. 1922.)

Bisher sind statistische Untersuchungen an β -Strahlenbahnen nach der Wilsonschen Nebelmethode¹⁾, wie sie an α -Strahlenbahnen unter den verschiedensten Bedingungen gemacht wurden²⁾, nicht ausgeführt worden. Die β -Strahlenbahnen geben sich bei dieser Methode bekanntlich als Reihen sehr feiner Nebeltröpfchen zu erkennen, welche um so dichter liegen, je langsamer der Strahl ist. Wegen der außerordentlich zarten Struktur dieser Nebelbildungen ist bei der von Wilson angegebenen Beleuchtung mit dem Quecksilberfunken die Ausbeute an gut ausgebildeten Strahlenbahnen nur eine geringe; dagegen werden die Bedingungen wesentlich günstiger, wenn man eine kontinuierliche Lichtquelle von genügender Intensität benutzt, vorausgesetzt allerdings, daß die Expansion, durch welche der übersättigte Wasserdampf erzeugt wird, wirbelfrei erfolgt. Eine größere Zahl primärer und sekundärer (durch γ -Strahlen ausgelöster) β -Strahlenbahnen konnte auf die im folgenden beschriebene Weise photographiert werden.

Der Nebelapparat war bis auf Unwesentliches nach den Vorschriften Wilsons konstruiert; die Nebelkammer hatte 15 cm Durchmesser. Zur Beleuchtung diente ein Bogen zwischen Beckkohlen (von C. P. Goerz), welcher mit etwa 30 Amp. gespeist wurde. Die sehr große Flächenhelligkeit des positiven Kraters dieser Lampe ermöglichte es, in die Nebelkammer ein horizontales, sehr intensives paralleles Lichtband zu senden, welches bei einer Tiefe von etwa 1 cm scharf genug begrenzt war, um Boden und Decke der Kammer vollkommen im Dunkeln zu lassen. Die Ausblendung geschah durch eine auf den Kondensor von 9 cm Brennweite aufgesetzte horizontale Spaltblende, welche durch eine Klappe rasch geöffnet und geschlossen werden konnte. Die Expansion wurde, wo es nicht auf äußerste Schärfe ankam, so eingestellt, daß ein leichter allgemeiner Nebel auftrat; dadurch wurde erreicht, daß die an den Ionen kondensierten Nebeltröpfchen beträchtliche Größe annahmen und auch dann noch

¹⁾ C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. (A) **85**, 285, 1911.

²⁾ D. Bose, Phys. ZS. **17**, 388, 1916. — Bumstead, Phys. Rev. **8**, 715, 1916. — T. Shimizu, Proc. Roy. Soc. (A) **99**, 432, 1921.

deutlich erkennbar waren, wenn sie nicht genau im Fokus waren. Photographiert wurde senkrecht von oben, so daß das Lichtband in seiner ganzen Ausdehnung abgebildet wurde. Die Aufnahmen wurden stereoskopisch in 2,4facher Verkleinerung auf Agfa-Extrarapidplatten gemacht; die beiden Objektive (Petzval-Kino) hatten eine Brennweite von 10 cm und eine Öffnung von 1:3,2, wurden aber meist zur Erreichung einer größeren Tiefenschärfe auf etwa 1:7 abgeblendet. Der Abstand der Objektivmittelpunkte betrug 8 cm. Die Belichtungszeiten wurden mit $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ Sekunde bemessen. Selbst bei längeren Belichtungszeiten erhielt man oft noch scharfe Bilder, wenn bei der Expansion keine turbulenten Strömungen auftraten. Letzteres konnte bisweilen nur durch mehrmaliges Erneuern der Gelatineschichten erreicht werden. Worin eigentlich der Einfluß der Gelatineschicht auf die Gasbewegung bestand, konnte nicht festgestellt werden. Zur Betrachtung der Bilder diente ein Leitzsches Prismenstereoskop mit drei- bis zehnfacher Vergrößerung.

Die Untersuchung der erhaltenen Aufnahmen erstreckte sich auf drei Punkte, nämlich 1. ob Verzweigungen der Bahnen auftreten; 2. ob auch an schnelleren β -Strahlen große Einzelablenkungen auftreten, wie sie an α -Strahlen und langsameren Kathodenstrahlen von Wilson beobachtet wurden; 3. ob die Form der Bahnen sich aus der Annahme aufeinanderfolgender, voneinander unabhängiger Einzelablenkungen erklären läßt, oder ob etwa eine Tendenz besteht, einen einmal angenommenen Krümmungssinn beizubehalten.

1. Die bisher elektrometrisch nachgewiesenen sekundären Elektronenstrahlen, welche von α - und β -Strahlen erzeugt werden, die sogenannten δ -Strahlen, bewegen sich in dem Geschwindigkeitsbereich $<$ etwa 40 Volt¹⁾. Es unterliegt nun wohl kaum einem Zweifel, daß der Vorgang der δ -Strahlenauslösung identisch ist mit dem der Ionisation. Dies rechtfertigt aber den Schluß, daß gelegentlich eines besonders wirksamen Zusammenstoßes zwischen einem β -Teilchen und einem Atomelektron letzteres auch eine erheblich größere Geschwindigkeit wird erreichen können, theoretisch (bei vollkommen zentralem Stoß) bis ungefähr zur Geschwindigkeit des β -Teilchens selbst. In der Tat konnte experimentell nachgewiesen werden, daß gelegentlich, wenn auch nicht sehr häufig, eine Strahlenbahn sich in zwei Äste spaltet. Insgesamt wurden an 20 Aufnahmen auf einer totalen Bahnlänge von rund 10 m acht zweifelsfreie Verzweigungsstellen gezählt, von denen einige in den Fig. 1 bis 5 wieder-

¹⁾ Vgl. den Bericht von F. Hauser, *Jahrb. d. Rad.* **10**, 445, 1913.

gegeben sind (vgl. die Beschreibung). Bei einer einfachen Aufnahme konnte eine solche Verzweigung unter Umständen dadurch vorgetäuscht werden, daß ein wirkliches oder scheinbares Bahnende sich zufällig in der Projektion einer zweiten Bahn abbildete; dagegen wird bei stereoskopischer Betrachtung der Doppelaufnahmen der Eindruck der Verzweigung zwingend (Fig. 4 und 5). Drei weitere Fälle waren zweifelhaft. Allgemein läßt sich über die beobachteten Fälle folgendes sagen:

a) Die beiden Zweigbahnen zeigen, wo sie scharf und deutlich ausgebildet sind, nach Länge, Krümmung und Dichte den Typus der Elektronenbahnen. Die Geschwindigkeiten sind, nach der Dichte zu schließen, niemals größer als die der Stammbahn.

b) Die drei Bahnrichtungen liegen im Verzweigungspunkt in einer Ebene.

c) Beide Zweige bilden spitze Winkel mit der Stammrichtung.

d) Eine Zweigbahn ist um so dichter, verglichen mit der Stammbahn, je größer ihr Winkel mit der Stammbahn ist, insbesondere bildet der kürzere (und zugleich dichtere) der beiden Zweige stets den größeren Winkel mit der Stammrichtung.

e) Der Winkel zwischen den Zweigbahnen liegt in allen Fällen nicht weit von 90° . Durch eine Probeaufnahme von einem Oktaeder, auf dessen Oberfläche geometrische Figuren gezeichnet waren, konnte festgestellt werden, daß bei Benutzung der zehnfachen Vergrößerung im Stereoskop das Verhältnis der Quer- und Tiefendimensionen annähernd richtig aufgefaßt wurde, und daß eine Schätzung beliebig im Raume orientierter Winkel auf einige Grade möglich war.

Diese Verhältnisse weisen wohl zwingend darauf hin, daß es sich hier in der Tat um die vermutete Auslösung schneller, sekundärer Elektronenstrahlen aus der Elektronenhülle der Luftmolekeln handelt. Wenn die kinetische Energie des aus dem Atomverbände hinausgeworfenen Elektrons groß gegen seine Ablösungsarbeit ist¹⁾, kann man den Vorgang in erster Näherung in Analogie setzen zu dem elastischen Stoß zwischen einem bewegten Körper und einem anfänglich ruhenden von gleicher Masse. Die Erhaltung der Energie und des Impulses fordern dann gerade die gefundenen Verhältnisse zwischen den drei Bahnrichtungen und Geschwindigkeiten; insbesondere lehrt eine elementare Betrachtung, daß nach dem Stoß die beiden

¹⁾ Nach Mohler und Foote, *Scient. Pap. Bur. of Stand.* Nr. 425, S. 492, 1922, liegt die K -Absorptionsgrenze für N_2 , welche der maximalen Austrittsarbeit entspricht, bei 374 Volt.

Bewegungsrichtungen senkrecht aufeinander stehen müssen. Diese einfache Beziehung hört allerdings auf, streng zu gelten, wenn man die Massenveränderlichkeit des Elektrons in Betracht zieht; z. B. findet man für den speziellen Fall, daß die beiden Zweigrichtungen symmetrisch liegen, daß also die Energie des stoßenden Elektrons gerade halbiert wird, für den Winkel α zwischen den Zweigrichtungen die Gleichung:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta^2}{2\sqrt{1-\beta^2}-2+3\beta^2},$$

wo β die ursprüngliche Geschwindigkeit des β -Strahles in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit ist. Dies gibt für

$\beta = 0$	$\alpha = 90^\circ$
0,5	87,9
0,7	84,8
0,9	75,8
1	0

Die kleine Tabelle zeigt, daß etwa für $\beta < 0,7$ immer noch eine rohe Gültigkeit der erwähnten Beziehung zu erwarten ist. Es ist vielleicht bezeichnend, daß in dem Falle der Fig. 5 (rechts unten), wo der Stammstrahl so schnell ist, daß er nur schwach zu erkennen ist, der Winkel α beträchtlich kleiner als 90° geschätzt wurde. Eine Abschätzung der Geschwindigkeiten kann man da, wo beide Zweige so deutlich ausgebildet sind wie in Fig. 5 (links), auf folgende Weise vornehmen. Nach Whiddington¹⁾ ist die Reichweite d eines Kathodenstrahles von der Geschwindigkeit v in Luft angenähert wiedergegeben durch

$$v^4 = 2 \cdot 10^{40} d.$$

Nimmt man an, daß der Strahl bei einem Druck von $\frac{3}{4}$ Atm. entstanden ist, so sind die Längen der beiden Zweige, umgerechnet auf Atmosphärendruck, 0,23 bzw. 0,46 cm, die entsprechenden Geschwindigkeiten sind $0,825 \cdot 10^{10}$ und $0,98 \cdot 10^{10}$, woraus durch Addition der Energien für die Geschwindigkeit in der Stammbahn $1,25 \cdot 10^{10}$ folgt. In Ziffer 3 soll gezeigt werden, wie auch der Krümmungsverlauf ein Mittel zur rohen Schätzung der Geschwindigkeiten bietet.

Man kann an den hier abgedruckten Aufnahmen recht gut den allmählichen Übergang erkennen von den ohne merkliche Energie austretenden Elektronen, welche die normale Bahn des β -Strahles bezeichnen, über die schon von Wilson beobachteten knötchenartigen einseitigen Verdickungen (vgl. den in Fig. 5 in der Mitte auf den

¹⁾ Whiddington, Proc. Roy. Soc. 86, 360, 1912.

Betrachter zukommenden Strahl) bis zur symmetrischen Gabelung (Fig. 4). Dabei sei darauf hingewiesen, daß ein Fall, wo das β -Teilchen wesentlich mehr als die Hälfte seiner Energie abgibt, an sich nicht zu unterscheiden wäre von einem anderen, wo es ebensoviel weniger als die Hälfte überträgt; das Bild wäre genau das gleiche, nur daß der langsamere Zweig das erstemal dem auslösenden β -Teilchen, das zweitemal dem ausgelösten Elektron entspricht. Man kann jedoch bei starker Unsymmetrie stets mit einiger Sicherheit annehmen, daß der zweite Fall vorliegt, da er bei weitem der wahrscheinlichere ist.

Die bisher besprochenen Verhältnisse folgen allein aus dem Energie- und Impulssatz. Will man Einzelheiten über den Stoßvorgang selbst erfahren, so ist dies nur durch statistische Untersuchungen über die Häufigkeit der Verzweigungen verschiedenen Grades möglich. Hierzu reicht natürlich die Zahl der bisher gemachten Aufnahmen, wie auch die Genauigkeit der Ausmessung der geometrischen Verhältnisse und der Geschwindigkeiten bei weitem nicht aus. Immerhin ist ein erster roher Vergleich mit der Theorie bereits möglich. Denkt man sich die beiden Elektronen als Punktladungen, welche nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken, so ist unter der Annahme, daß die Bewegung des β -Teilchens beim Zusammenstoß nur wenig geändert wird, die Geschwindigkeit des ausgelösten Elektrons:

$$v' = \frac{2e^2}{m_0 v q},$$

wo v die Geschwindigkeit des β -Teilchens, e die Ladung, m_0 die Ruhemasse des Elektrons und q der ursprüngliche Abstand des Atomelektrons von der β -Strahlenbahn ist. Die magnetische Kraft kommt gegen die elektrostatische nicht in Betracht, solange v' klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist. Bezeichnet n die Anzahl Elektronen im cm^3 Luft, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein β -Strahl von der Geschwindigkeit v auf 1 cm seiner Bahn einen Sekundärstrahl von einer Geschwindigkeit $> v'$ auslöst:

$$n q^2 \pi = n \pi \left(\frac{2e^2}{m_0 v v'} \right)^2.$$

In allen beobachteten Fällen waren beide Zweige länger als 2 mm, dies entspricht nach der Whiddingtonschen Formel einer Minimalgeschwindigkeit $v' = 0,8 \cdot 10^{10}$. Für v kann man als Mittelwert etwa $1,8 \cdot 10^{10}$ einsetzen, für n das Siebenfache der Atomzahl im cm^3 . Damit wird dieser Ausdruck gleich 0,015, d. h. auf 10 m Bahnlänge bei einem Druck von $\frac{3}{4}$ Atm. müßten im Mittel etwa zwölf Verzweigungen kommen; die Übereinstimmung mit der gefundenen Zahl

(8 bis 11) ist befriedigend in Anbetracht der geringen Zahl beobachteter Fälle.

Man sieht, daß die durch β -Strahlen erregten Sekundärstrahlen vom β -Strahlentypus nur geringe Intensität besitzen, so daß sie bei Erregung in nicht sehr dünnen Schichten durch die gestreute Primärstrahlung vollkommen verdeckt werden. Deshalb kann auch in der Absorptionstheorie und bei der zusammengesetzten Streuung der β -Strahlen von dieser Sekundärstrahlung ganz abgesehen werden; vgl. jedoch Ziffer 2.

2. Scharfe Knicke wurden auch an schnelleren β -Strahlen in größerer Zahl beobachtet; ein charakteristisches Beispiel zeigt Fig. 1. Diese Knicke hat man, in Analogie zu den an α -Strahlen bereits bekannten, als große Einzelablenkungen aufzufassen, welche das β -Teilchen erfährt, wenn es in unmittelbare Nähe eines Atomkernes gerät. Die viel kleinere Masse der β -Teilchen bedingt aber folgende Unterschiede gegen die α -Strahlenknicke. Das β -Teilchen verliert beim Zusammenstoß mit dem Atomkern nicht wesentlich an Energie, während ein α -Teilchen nach einer großen Ablenkung in Luft sehr bald vollständig gebremst wird. Ferner fehlen bei den β -Strahlenknicken die kleinen Ansätze, welche bei den α -Strahlen in Luft anzeigen, daß auch das gestoßene Atom eine merkliche Geschwindigkeit erreicht. Schließlich ist die Häufigkeit der Einzelablenkungen um einen bestimmten Winkel für β -Strahlen mittlerer Geschwindigkeit eine erheblich größere als für α -Strahlen. Die von Rutherford ¹⁾ aufgestellte Theorie der Einzelstreuung ist zwar nicht ohne weiteres auf β -Strahlen übertragbar, da das β -Teilchen sich wegen seiner Massenveränderlichkeit nicht in einer strengen Hyperbel bewegt ²⁾, doch kann man für eine Überschlagsrechnung von dieser Komplikation absehen, wenn die Ablenkungswinkel nicht zu groß sind. Man findet für die Wahrscheinlichkeit, daß ein β -Teilchen von der Geschwindigkeit v und der Masse m auf 1 cm seiner Bahn eine Ablenkung $> \Phi$ erfährt, den Ausdruck:

$$N\pi \left(\frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \cot^2 \frac{\Phi}{2},$$

wo N die Zahl der Atome im cm^3 , Z die Ordnungszahl der ablenkenden Atome ist. Nimmt man wie oben eine mittlere Geschwindigkeit $v = 1,8 \cdot 10^{10}$, ferner $Z = 7$ an, so wird die Zahl der pro 10 m Bahn bei $\frac{3}{4}$ Atm. im Mittel zu erwartenden Ablenkungen $> 45^\circ$ gleich 14,4, die der Ablenkungen $> 90^\circ$ gleich 2,5; gefunden wurden 17 Knicke

¹⁾ E. Rutherford, Phil. Mag. **21**, 669, 1911.

²⁾ G. C. Darwin, ebenda **25**, 201, 1913.

mit Winkeln $> 45^\circ$, davon 6, bei welchen der Winkel $> 90^\circ$ war. Die Übereinstimmung ist nicht schlechter und nicht besser als zu erwarten, besonders wenn man berücksichtigt, daß es bei den langsameren Strahlen oft schwer zu entscheiden ist, ob man einen echten Knick oder nur eine sehr starke Krümmung vor sich hat. Aus diesem Grunde wurden auch die im allerletzten Ende einer Bahn häufiger auftretenden scharfen Biegungen (vgl. Fig. 3 in der Mitte, wie auch die Wilsonschen Röntgenstrahlen-Aufnahmen) nicht mitgezählt.

Die Gegenüberstellung von Ziffern 2 und 3 gibt das interessante Resultat, daß die Zahl der Sekundärstrahlen von merklichem Durchdringungsvermögen von derselben Größenordnung ist wie die Zahl der Einzelablenkungen um große Winkel; daher sind bei Messungen der Einzelstreuung der β -Strahlen die sekundären Elektronenstrahlen wohl zu beachten, besonders wenn die Meßanordnung auf die langsamen Strahlen leicht anspricht.

3. Bei der Betrachtung der β -Strahlenbahnen drängt sich oft der Eindruck auf, daß die Strahlen die Tendenz haben, einen einmal angenommenen Krümmungssinn über eine längere Strecke beizubehalten (vgl. den in Fig. 3 abgebildeten langen Strahl). Es ist von einiger Wichtigkeit, zu entscheiden, ob das Vorkommen solcher in großen Zügen kontinuierlicher Krümmungen gegen die Annahme verstößt, daß der Verlauf eines Strahles durch Summation kleiner, voneinander unabhängiger Einzelablenkungen bestimmt ist. Zu diesem Zwecke wurden von allen Aufnahmen die acht bestausgebildeten Strahlen (I bis VIII) ausgewählt und einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Analyse unterworfen. Als neunter wurde der von Wilson (a. a. O., Taf. 7, Fig. 2) aufgenommene Strahl (W) hinzugenommen, welcher ebenfalls in besonders markanter Weise den Eindruck der kontinuierlichen Krümmung erweckt. Die betreffenden Aufnahmen wurden stark vergrößert, zwischen je zwei um 1 mm (Originalgröße) entfernten Bahnpunkten die Sehnen gezogen und die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Sehnen nach Größe und Sinn bestimmt. Die so erhaltene Reihe von Winkelgrößen wurde auf eine etwaige Abhängigkeit aufeinanderfolgender Glieder geprüft. Da die Bahn nur durch einzelne Punkte (Nebeltröpfchen) angedeutet ist, deren oft nur wenige auf 1 mm kamen, mußten diese Punkte durch eine Kurve verbunden werden, welche immer möglichst glatt gewählt wurde; dadurch wird offenbar das Auftreten von Abhängigkeiten noch etwas begünstigt. Die Sehnenrichtungen konnten in so kleinen Abständen nicht mit sehr großer Genauigkeit festgelegt werden, doch war der Ablenkungssinn fast stets mit Sicherheit erkennbar; war dies aus-

nahmsweise nicht der Fall, so wurde der Ablenkung die Größe 0 und das Vorzeichen der vorhergehenden Ablenkung zugeschrieben: ebenfalls eine kleine Konzession zugunsten einer Abhängigkeit in dem angegebenen Sinne. Die Abstände größer zu nehmen, um die Winkel genauer zu erhalten, war nicht zweckmäßig, da dann wegen der beschränkten Länge der deutlichen Bahnen das Zahlenmaterial zu klein für einigermaßen sichere statistische Schlüsse geworden wäre. Jedenfalls gibt die auf die angegebene Weise erhaltene Zahlenreihe eine Beschreibung des Verlaufs eines Strahles, so genau wie dieser überhaupt aus der Aufnahme irgend erkennbar ist.

	1. Zahl der δ	2. A_1	3. A_2	4. p_2		5. p_3		6. p_4		7. p_5	
				ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
I	62	1,94	0,25	30,5	30	15	15	7,4	7	3,6	3
II	43	0,62	0,15	21	21	10,3	11	5	4	2,4	1
III	42	1,02	1,54	20,5	23	10	13	4,9	5	2,4	2
IV	19	0,16	0,46	9	7	4,3	2	2	0	0,9	0
V	42	0,75	0,00	20,5	20	10	10	4,9	6	2,4	2
VI	32	1,58	2,48	15,5	17	7,5	9	3,6	6	1,8	3
VII	23	0,69	0,21	11	12	5,3	8	2,5	5	1,2	3
VIII	21	0,67	0,43	10	11	4,7	6	2,3	2	1,1	1
W	29	2,40	1,67	14	14	6,8	7	3,3	3	1,6	2

$\sqrt{A_1^2}$	$\sqrt{A_2^2}$	Σp_v									
1,29	1,14	152,0	155	73,9	81	35,9	38	17,4	17		

Ein entscheidender Beweis der Unabhängigkeit der Elementarablenkungen δ könnte so geführt werden, daß man an Hand einer großen Zahl gleichartiger Strahlen das Verteilungsgesetz sowohl der Elementarablenkungen δ als auch der Gesamtablenkungen $\Sigma \delta$ bestimmt. Stimmt letzteres mit dem aus dem allgemeinen Fehlergesetz für unabhängige Elementarfehler¹⁾ folgenden überein, so ist der Nachweis erbracht. Für den vorliegenden Zweck ist dies Verfahren zu kompliziert, es genügt ein einfacheres Kriterium. Aus der Fehlertheorie ist bekannt, daß beim Zusammenwirken unabhängiger symmetrischer Fehlerquellen die mittleren Fehlerquadrate sich additiv verhalten. Bildet man also für jeden der zu untersuchenden Strahlen die Ausdrücke $\Sigma \delta^2$ und $(\Sigma \delta)^2$, so müssen diese im Mittel gleich sein. Setzt man

$$A_1 = \frac{\Sigma \delta}{\sqrt{\Sigma \delta^2}},$$

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. 5, 63, 1921.

so müssen die \mathcal{A}_1 von der Größenordnung 1 und ihr quadratisch genommener Mittelwert ($\sqrt{\mathcal{A}_1^2}$) bei genügend großer Zahl $= 1$ sein. Die zweite Kolumne der Tabelle zeigt, daß dies soweit zutrifft, daß eine Abhängigkeit der δ voneinander nicht gemutmaßt werden kann. Es ist bemerkenswert, daß die theoretischen Verhältnisse noch besser erreicht werden, wenn man den Wilsonschen Strahl fortläßt; es konnte kein Strahl gefunden werden, welcher die kontinuierliche Krümmung so stark vortäuscht wie dieser. Die Erklärung dafür ist vielleicht, daß der Wilsonsche Strahl zufällig an leicht erkennbarer Stelle eine größere Einzelablenkung aufweist (vielleicht sogar zwei in gleichem Sinne), die so selten ist, daß sie nicht durch eine entgegengesetzte kompensiert wird.

Dem Einwand, daß die Winkel δ nicht genau genug ausmeßbar sind, kann damit begegnet werden, daß man nur den Sinn der Elementarablenkungen in Betracht zieht. Bezeichnen n_+ und n_- bezüglich die Zahl positiver und negativer δ , $N = n_+ + n_-$ die Gesamtzahl der δ , so muß bei unabhängigen δ der Ausdruck

$$\mathcal{A}_2 = \frac{|n_+ - n_-|}{\sqrt{N}}$$

im Mittel $= 1$ sein. Die dritte Kolumne der Tabelle zeigt, daß auch diese Bedingung befriedigend erfüllt ist.

Hiergegen könnte nun wieder eingewandt werden, daß eine Abhängigkeit möglicherweise nur über kleine Strecken besteht. Dies müßte sich zeigen, wenn man die Häufigkeit von Aufeinanderfolgen gleicher Vorzeichen bestimmt. In einer Reihe von N willkürlich zusammengesetzten $+$ - und $-$ -Zeichen ist die mittlere Zahl der Gruppen von ν aufeinanderfolgenden gleichartigen Zeichen mit Übereinandergreifen der Gruppen:

$$p_\nu = \frac{N - \nu + 1}{2^{\nu-1}}.$$

Die theoretischen und beobachteten Werte für $\nu = 2$ bis 5 sind in die letzten Kolumnen der Tabelle eingetragen. Die Summe der berechneten und die der beobachteten Werte stimmen in jeder Kolumne so gut überein, wie man nur erwarten kann.

Selbstverständlich beweisen diese Betrachtungen nicht, daß nicht Abhängigkeiten zwischen den Elementarablenkungen bestehen, welche erst zutage treten würden, wenn es gelänge, die Bahnen genauer zu verfolgen, doch liegt einstweilen kein Grund vor, etwas Derartiges anzunehmen. Man kann die Ursache für den Eindruck der kontinuierlichen Krümmung auf psychologischem Gebiet suchen, etwa in

einer Tendenz des Sehapparates, eine Reihe nebeneinanderliegender Punkte als glatte Kurve aufzufassen. Die Möglichkeit derartiger Täuschungen zeigt deutlich die Fig. 6, in welcher Strecken gleicher Länge mit willkürlichen Richtungsunterschieden aneinandergesetzt sind. Die Reihe der Winkel aufeinanderfolgender Strecken wurde durch Quadrieren der 11. Dezimale der natürlichen Logarithmen der ersten 60 Primzahlen gewonnen (nach Augusts Logarithmentafeln), das Vorzeichen wurde $-$ oder $+$ gewählt, je nachdem die 12. Dezimale der gleichen Zahl \geq oder < 5 war. Der allgemeine Verlauf dieses „Strahles“ ist keineswegs „unregelmäßiger“ als der eines natürlichen β -Strahles.

In einer kürzlich erschienenen Notiz teilt A. H. Compton¹⁾ eine Beobachtung mit, welche mit der in Frage stehenden eng zusammenhängt. Compton findet, daß die Endbahnen der Elektronen in der

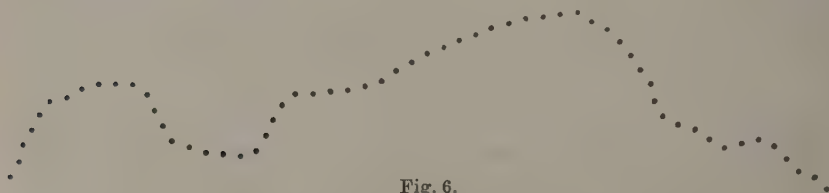


Fig. 6.

überwiegenden Mehrzahl schraubenförmig aussehen, also konstanten Raumkrümmungssinn zu haben scheinen. Die Entscheidung dieser Frage ist beträchtlich schwieriger als die der hier behandelten, da mit abnehmender Geschwindigkeit die Schwierigkeiten, die Nebeltröpfchen scharf und getrennt zur Abbildung zu bringen, beträchtlich wachsen, und überhaupt die Zahl der ausmeßbaren Elementarablenkungen naturgemäß nur klein sein kann; doch spricht das hier gefundene Resultat sehr zugunsten der Annahme, daß auch diese Gesetzmäßigkeit nur scheinbar ist.

Die zahlenmäßige Festlegung des Verlaufes eines β -Strahles in der angegebenen Weise gibt ein Mittel an die Hand, die Geschwindigkeit des Strahles abzuschätzen, wie an dem Strahl I (Fig. 3) kurz erläutert werden soll. Es wurde gefunden:

$$\Sigma \delta^2 = 1453 \text{ Quadratgrade,}$$

daraus

$$\delta^2 = 23,4.$$

¹⁾ A. H. Compton, Phil. Mag. 41, 279, 1921.

Fig. 1. Schwaches Radiumpräparat, unmittelbar auf der Deckplatte der Nebelkammer liegend (links außerhalb des Bildfeldes). Vergr.: 2,8. Oben: langer, schleifenförmiger Strahl mit Einzelablenkung von etwa 130° (rechts). Darunter: Verzweigung ($\alpha \sim 100^\circ$); die Stammbahn läuft von links oben nach rechts unten, aus der Lage des Präparates zu schließen.

Fig. 2. Ra-Präparat 0,5 m über dem Apparat. Vergr.: 2,8. Verzweigung ($\alpha \cong 90^\circ$); Stammbahn von unten nach oben, Zweigbahnen deutlich als „Endbahnen“ kenntlich.

Fig. 3. Wie 2. Vergr.: 1,8. Von links nach rechts langer β -Strahl mit scheinbar kontinuierlicher Krümmung. Darunter in der Mitte Verzweigung ($\alpha \cong 95^\circ$); Stammbahn von unten nach oben, Zweigbahnen zeigen Endbahnen-typus; der rechte Zweig ist unscharf, da er sogleich nach oben umbiegt; stereoskopisch einwandfrei.

Fig. 4 a und b, für stereoskopische Betrachtung. Wie 2. Vergr.: 1,0. Symmetrische Verzweigung ($\alpha \cong 95^\circ$).

Fig. 5 a und b, für stereoskopische Betrachtung. Wie 2. Vergr.: 1,3. In der linken Hälfte Verzweigung ($\alpha \sim 90^\circ$); Stammbahn von links nach rechts, Zweigbahnen typische Endbahnen. Rechts daneben möglicherweise weitere Verzweigung. Rechts unten Verzweigung an sehr schnellem Strahl ($\alpha \sim 75^\circ$); Stammbahn und eine Zweigbahn wegen der großen Geschwindigkeit nur schwach zu erkennen (am besten in Fig. 5b); die zweite Zweigbahn ist Endbahn.



Fig. 1.



Fig. 2.

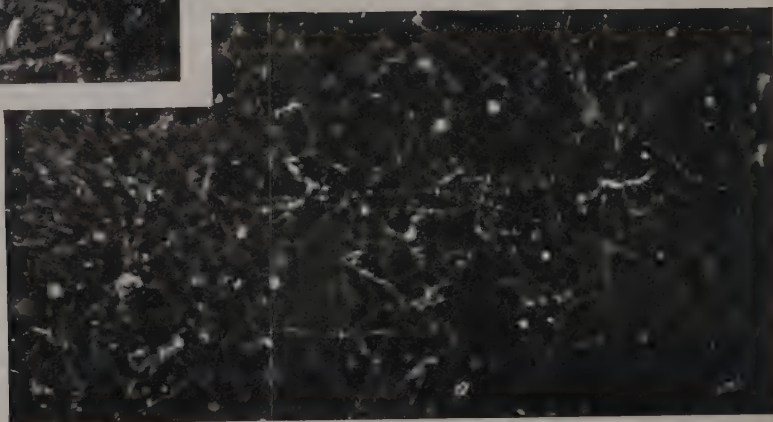


Fig. 3.



Fig. 4 a.



Fig. 5 a.



Fig. 4 b.

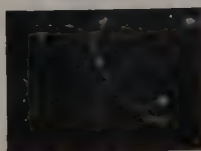


Fig. 5 b.

Diese Größe $\overline{\delta^2}$ ist für nicht zu kleine Schichtdicken identisch mit dem Quadrat der wahrscheinlichsten Ablenkung λ . Für eine Schicht von $6,4 \cdot 10^{-4}$ cm Aluminium wurde näherungsweise gefunden¹⁾

$$\frac{m v^2}{e} \cdot \lambda = 60 \cdot 10^{13} \text{ EME. Grad.}$$

Die Schicht Luft, welche bei $3\frac{3}{4}$ Atm. die gleiche Anzahl Atome pro cm^2 enthält, ist 1,0 cm dick, während die Elementarstrecke bei der Ausmessung unseres Strahles 0,08 cm betrug. Da δ^2 proportional der Schichtdicke und ferner bei gleicher Atomzahl pro cm^2 angenähert proportional dem Quadrat der Ordnungszahl des zerstreuen Elementes ist, gilt für unseren Strahl:

$$\frac{m v^2}{e} = \frac{60 \cdot 10^{13}}{\sqrt{23,4}} \cdot \frac{Z_N}{Z_{Al}} \sqrt{\frac{0,08}{1,0}} = 1,9 \cdot 10^{13}; v = 1,7 \cdot 10^{10}.$$

Dies ist natürlich nur ein Mittelwert für die beständig abnehmende Geschwindigkeit des Strahles. Da dieser Strahl nach seiner Dichte schon zu den schnelleren beobachteten zählt, andererseits aber das Durchdringungsvermögen der von den γ -Strahlen des Ra C ausgelösten sekundären β -Strahlen ein ganz beträchtliches ist, so ist dieser niedrige Wert etwas überraschend. Man muß offenbar schließen, daß ein β -Strahl, dessen Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nahekommmt, nach der Wilsonschen Methode nicht oder nur sehr schwer zu erkennen ist. Damit rechtfertigt sich auch der oben verhältnismäßig niedrig angesetzte Wert für die mittlere Geschwindigkeit der zur Beobachtung gelangenden β -Strahlen.

Zusammenfassung. An β -Strahlenbahnen, welche nach der Wilsonschen Methode unter verbesserten Beleuchtungsbedingungen aufgenommen wurden, wurden Verzweigungen beobachtet. Diese werden in der Weise gedeutet, daß ein β -Teilchen bei einem besonders wirksamen Zusammenstoß mit einem Atomelektron letzterem eine so große Geschwindigkeit erteilen kann, daß es einen sekundären β -Strahl bildet, während das primäre β -Teilchen mit verminderter Energie weiterfliegt.

Ferner wurden scharfe Knicke (Einzelablenkungen durch einen Atomkern) auch an schnelleren β -Strahlen beobachtet.

Der Krümmungsverlauf eines Strahles entspricht seiner Zusammensetzung aus unabhängigen Einzelablenkungen.

Charlottenburg, September 1922.

¹⁾ H. Geiger und W. Bothe, ZS. f. Phys. 6, 209, 1921.

Magnetische Anfangspermeabilität, scheinbare Remanenz und Verhalten bei Erschütterungen.

Von **Joseph Würschmidt** in Essen.

Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 2. Oktober 1922.)

Die Frage nach dem magnetischen Verhalten verschiedener Eisensorten unter dem Einfluß sehr kleiner Feldstärken, d. h. nach dem Werte der magnetischen Anfangspermeabilität, tritt in neuerer Zeit in verstärktem Maße auf, indem die Praxis Material mit möglichst hoher Anfangspermeabilität, das zugleich einen hohen spezifischen Widerstand besitzen soll, für verschiedene Anwendungszwecke sucht, gleichzeitig begegnet diese Frage im Zusammenhang mit den Arbeiten von Gumlich, Gans, Steinhaus u. a. auch erheblichem theoretischen Interesse.

Auf mannigfache Schwierigkeiten, die bei der Bestimmung der Anfangspermeabilität auftraten, hat E. Gumlich bereits im Jahre 1911¹⁾ aufmerksam gemacht, insbesondere hat er untersucht, in welcher Weise eine von einem früheren Magnetisierungszyklus herührende remanente Magnetisierung den Wert der A.-P. beeinflussen kann, und einen Apparat zur vollkommenen Entmagnetisierung im Verein mit W. Rogowski angegeben. Für eine Reihe von Eisensorten gibt er in der genannten Arbeit sowie in einer früheren Arbeit²⁾ die für die A.-P. gemessenen Werte im Zusammenhang mit den sonstigen magnetischen Zahlen. Aus der Übersicht geht folgendes hervor:

1. Kleiner Maximalpermeabilität entspricht auch kleine Anfangspermeabilität.

2. Die A.-P. ist klein bei Material mit großer Koerzitivkraft und kleiner Remanenz.

3. Hoher Maximalpermeabilität entspricht nicht immer hohe A.-P.

4. Durch Ausglühen wird die A.-P. in den meisten Fällen vergrößert.

5. Siliciumzusatz vergrößert die A.-P. beträchtlich (Größenordnung $\mu_0 = 500$ bei 1,45 Proz. Si).

Im Jahre 1908 hat Gumlich³⁾ im Zusammenhang mit den sonstigen magnetischen Eigenschaften von einer großen Reihe von Eisen-

¹⁾ Ann. d. Phys. (4) **34**, 235—257, 1911.

²⁾ Elektrot. ZS. **30**, 1098, 1909.

³⁾ Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt **4**, Heft 3, S. 360, 1918.

sorten die A.-P. bestimmt, nämlich außer von Kohlenstoff- und Siliciumlegierungen auch von Flußstählen, Aluminium- und Manganlegierungen. Auch hier zeigten die Si-Legierungen die größten Werte für μ_0 .

Bei den Messungen der A.-P. hatte sich ferner ergeben, daß „in diesem Magnetisierungsbereich manche Eisensorten sehr stark altern, d. h. daß sich die A.-P. schon bei bloßem Lagern sehr verschlechtert“.

Zweck der vorliegenden Arbeit war es nun, einmal die möglichen Veränderungen der A.-P. näher zu untersuchen, dann aber die A.-P. für einige bisher noch nicht in dieser Richtung untersuchte Eisensorten zu messen.

1. Versuchsanordnung und Berechnung der A.-P.

Benutzt wurde die ballistische Methode, indem die Stäbe in einer Magnetisierungsspule von etwa 50 cm Länge magnetisiert wurden, und der Zuwachs der Induktionslinien mittels einer Induktionsspule von bekannter Windungszahl und des ballistischen Galvanometers gemessen wurde. Da es sich bei den orientierenden Versuchen nicht um große Genauigkeit handelte, sondern zunächst nur um die Größenordnung der A.-P., so wurde von der Untersuchung von Ellipsoiden abgesehen, und wurden die Stäbe als Zylinder von etwa 27 cm Länge und etwa 0,6 cm Durchmesser untersucht. Die Entmagnetisierungsfaktoren für zylindrische Stäbe wurden der Dissertation von C. R. Mann¹⁾ (vgl. auch E. Gumlich, Leitfaden der magnetischen Messungen) entnommen.

Bezeichnet man die beobachtete Induktion bzw. den Induktionszuwachs mit \mathcal{B}' , so ist²⁾, wenn β den am Galvanometer gemessenen Ausschlag in Millimetern, $\frac{J}{\alpha} = k$ eine Konstante, n die Windungszahl der Induktionsspule und q den Querschnitt des Stabes bezeichnet,

$$\mathcal{B}'q = \frac{1000}{n} \cdot k \cdot \beta \quad (1)$$

oder, da k sich aus mehreren Ablesungen zu 1,78 bestimmte und $n = 2000$ war:

$$\mathcal{B}' = \frac{0,89}{q} \cdot \beta.$$

Aus der Windungszahl pro Zentimeter der Magnetisierungsspule ergab sich für die äußere Feldstärke \mathcal{H}'

$$\mathcal{H}' = 16,62 \cdot i, \quad (2)$$

wobei i die Stärke des Magnetisierungsgstromes in Ampere ist.

¹⁾ Universität Berlin 1895.

²⁾ Vgl. J. Würschmidt, ZS. f. Phys. 10, 96, 1922.

Da die Induktionsspule nicht direkt an der Staboberfläche anliegt, messen wir nicht die wahre Induktion \mathfrak{B} , sondern einen zu großen Wert \mathfrak{B}' . Ist q' der mittlere Spulenquerschnitt und \mathfrak{H} die wahre (in dem Stab vorhandene) Feldstärke, so ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' - \left(\frac{q'}{q} - 1\right) \mathfrak{H}. \quad (3)$$

Ferner gilt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' - \frac{N}{4\pi} (\mathfrak{B} - \mathfrak{H}), \quad (4)$$

wobei N der sogenannte Entmagnetisierungsfaktor des Stabes ist. Aus Gl. (3) und (4) folgt

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}' - \frac{N}{4\pi} \mathfrak{B}'}{1 - \frac{N}{4\pi} \frac{q'}{q}}. \quad (4a)$$

Hieraus berechnet sich also \mathfrak{H} , wenn \mathfrak{H}' und \mathfrak{B}' bekannt sind, sodann aus Gl. (3) \mathfrak{B} .

Zur Bestimmung der A.-P. ist es jedoch nicht nötig, alle gemessenen \mathfrak{H}' und \mathfrak{B}' in \mathfrak{H} und \mathfrak{B} umzurechnen. Bezeichnen wir den Ausdruck $\frac{\Delta \mathfrak{B}'}{\Delta \mathfrak{H}'}$ mit μ' und $\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}}$ mit μ , so ist, da

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{\Delta \mathfrak{H}' - \frac{N}{4\pi} \Delta \mathfrak{B}'}{1 - \frac{N}{4\pi} \frac{q'}{q}}$$

und

$$\mu = \left. \begin{aligned} \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} &= \frac{\Delta \mathfrak{B}'}{\Delta \mathfrak{H}'} - \left(\frac{q'}{q} - 1\right) \\ \frac{\Delta \mathfrak{B}'}{\Delta \mathfrak{H}' - \frac{N}{4\pi} \Delta \mathfrak{B}'} &\left(1 - \frac{N}{4\pi} \frac{q'}{q}\right) - \left(\frac{q'}{q} - 1\right) \\ &= \frac{\mu' \left(1 - \frac{N}{4\pi} \frac{q'}{q}\right)}{1 - \frac{N}{4\pi} \mu'} - \left(\frac{q'}{q} - 1\right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Kennt man also die Werte von \mathfrak{H}' und \mathfrak{B}' , so kann man für jede Stelle der Magnetisierungskurve μ' , die differentielle Permeabilität der ungescherten Kurve, und hieraus μ nach Gl. (5) finden; für den praktischen Gebrauch können wir Gl. (5) in der Form schreiben:

$$\mu - 1 = \frac{\mu' - \frac{q'}{q}}{1 - \frac{N}{4\pi} \mu'}. \quad (5a)$$

Die A.-P. ist der Wert, den $\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} = \mu$ für $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ hat, d. h. für den Fall, daß die Magnetisierungskurve durch den Nullpunkt geht. In diesem Fall ($\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$) ist nach Gl. (3) und (4) auch \mathfrak{H}' und $\mathfrak{B}' = 0$, also ist

$$\mu_0 = \lim_{\mathfrak{B}=\mathfrak{H}=0} \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} = \lim_{\mathfrak{B}'=\mathfrak{H}'=0} \left[1 + \frac{\frac{\Delta \mathfrak{B}'}{\Delta \mathfrak{H}'} - \frac{q'}{q}}{1 - \frac{N}{4\pi} \frac{\Delta \mathfrak{B}'}{\Delta \mathfrak{H}'}} \right].$$

Geht die Kurve nicht durch den Nullpunkt, d. h. ist für $\mathfrak{H}' = 0$ eine positive oder negative Induktion \mathfrak{B}' vorhanden, so wird \mathfrak{H} nach Gl. (4) bereits negativ sein; will man also den Wert für $\mathfrak{H} = 0$ wissen, so muß man streng genommen die $\mathfrak{B} \mathfrak{H}$ -Kurve aus der $\mathfrak{B}' \mathfrak{H}'$ -Kurve berechnen [Gl. (4a), und (3)] oder zeichnen, und ihr den Wert für \mathfrak{B} oder für $\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}}$ an der Stelle $\mathfrak{H} = 0$ entnehmen.

Wie sich aber im folgenden ergibt, ist die $\mathfrak{B}' \mathfrak{H}'$ -Kurve häufig innerhalb eines beträchtlichen Intervalles geradlinig, daher auch die $\mathfrak{B} \mathfrak{H}$ -Kurve, und infolgedessen fällt der Wert von μ für $\mathfrak{H} = 0$ mit dem von μ für $\mathfrak{H}' = 0$, den man einfach nach Gl. (5a) aus μ' für $\mathfrak{H}' = 0$ entnimmt, zusammen. Außerdem aber ist gerade auch der Wert an der Stelle $\mathfrak{H}' = 0$ von Interesse.

q' wurde als Mittelwert für den Spulenradius bestimmt und betrug für die benutzte Spule mit $n = 2000$ Wd. $2,36 \text{ cm}^2$.

2. Untersuchungen an Weicheisen.

1. Anfangspermeabilität und Permeabilität bei verschiedener Remanenz. Gumlich hat darauf hingewiesen, wie notwendig es ist, die zu untersuchende Probe sorgfältig zu entmagnetisieren, da ein etwa zurückbleibender remanenter Magnetismus die bei steigendem Feld auftretenden ersten Induktionsausschläge unter Umständen stark beeinflussen kann.

Ich stellte mir daher zunächst die Aufgabe, zu untersuchen inwieweit sich die anfängliche Permeabilität ändert, wenn größerer oder kleinerer positiver oder negativer remanenter Magnetismus vorhanden ist, bzw. wie sehr sie sich von dem Wert der eigentlichen A.-P. für $\mathfrak{B} = 0$ unterscheidet. Zugleich ergab sich hierbei die Aufgabe, den Änderungen der scheinbaren Remanenz nachzugehen, nachdem bereits durch frühere eigene und fremde Versuche nachgewiesen war, daß mehr oder weniger große Veränderungen der Remanenz im

Laufe der Zeit oder auch künstlich durch Erschütterungen vor sich gehen.

Es wurde deshalb auf die vollständige Entmagnetisierung verzichtet, im Gegenteil eine Probe zuerst hochmagnetisiert und dann untersucht.

Zunächst sei ein vollständiges Beispiel einer Messung gegeben. Eine Probe aus Weicheisen (Länge 27,0, Durchmesser 0,596), die vorher im Koepselapparat magnetisiert worden war, zeigte eine scheinbare Remanenz von 210,7 Skt. = 674 absolute Einheiten¹⁾. Nun

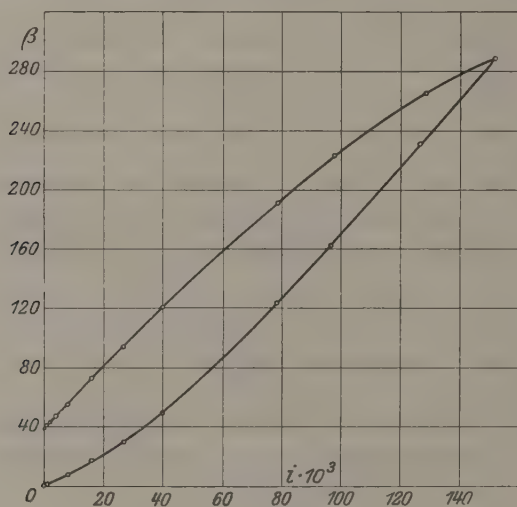


Fig. 1.

erfolgte Magnetisierung in der Spule bis zu einem äußeren Feld von 152,6 mA = 2,54 Gauß und wieder Entmagnetisierung bis $\mathfrak{H}' = 0$. Die abgelesenen Werte sind aus Tabelle 1 ersichtlich (vgl. auch Fig. 1).

Aus Tabelle 1 und Fig. 1 geht hervor, daß die Kurve bei $\mathfrak{H}' = 0$ nahezu geradlinig ansteigt, und zwar ist hier $\frac{\Delta \beta}{\Delta i} = \text{etwa } 1000$; da nun $\Delta \mathfrak{B}' = 3,19$ $\Delta \beta$ und $\Delta \mathfrak{H}' = 16,62 \cdot \Delta i$, so ergibt sich $\mu' = 0,192 \cdot \frac{\Delta \beta}{\Delta i} = \text{etwa } 190$ und aus Gl. (5a) $\mu = 270$. Dieser Wert bezieht sich nun allerdings auf den Punkt $\mathfrak{H}' = 0$ und nicht auf $\mathfrak{H} = 0$. Da die scheinbare Remanenz relativ groß (674) ist, so

¹⁾ Sie wurde durch Abziehen der Spule von der Mitte des Stabes bestimmt.

Tabelle 1.

$\Delta i \cdot 10^3$	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	$\Delta i \cdot 10^3$	$-\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	1,0	1,0	98,0	42,3	222,9
8,1	7,1	8,1	79,1	32,0	190,9
16,2	8,7	16,8	40,2	71,1	119,8
26,9	13,0	29,8	26,9	25,9	93,9
40,1	20,1	49,9	16,2	20,8	73,1
78,5	73,9	123,8	8,1	17,7	55,4
97,0	38,2	162,0	4,0	7,7	47,7
127,2	68,7	230,7	2,0	3,9	43,8
152,6	57,5	288,2	1,0	2,6	41,2
129,2	-23,0	265,2	0	1,6	39,6

ist \mathfrak{H} hier schon eine beträchtliche negative Größe, nämlich wie sich aus Gl. (4a) ergibt, $\mathfrak{H} = -1,16$ Gauß. Da die hier beginnende Magnetisierungskurve ihre Richtung stark ändert, bevor $\mathfrak{H} = 0$ erreicht wird, ja innerhalb des gewählten Intervalls diesen Wert überhaupt nicht erreicht, so trifft hier der oben angeführte Fall nicht zu. Doch können wir die berechnete Größe μ mit Recht als die A.-P. betrachten, die dann vorhanden ist, wenn der untersuchte Weicheisenstab (gegebenes N) von der scheinbaren Remanenz $\mathfrak{B} = 674$ an nach der positiven Seite magnetisiert wird.

Die Figur zeigt, daß bei dem absteigenden Ast $\bar{\mu}'$ für $\mathfrak{H}' = 0$ bedeutend größer ist als vorher, folglich auch $\bar{\mu}$; ($\bar{\mu}$ etwa 1200); zugleich ist jetzt auch die scheinbare Remanenz gewachsen, nämlich auf $674 + 126 = 800$ absolute Einheiten. In der Tat erhält man durch Abziehen des Stabes aus der Spule einen Ausschlag von 247,2 Skt. = 788 absolute Einheiten; die Übereinstimmung ist also eine befriedigende (1,5 Proz.).

Nach 24 Stunden wurde die Messung der Remanenz wiederholt, es ergab sich nur noch 704, so daß der Schluß auf einen zeitlichen Rückgang nahegelegen hätte. Eine Wiederholung der positiven Magnetisierung lieferte für Δi ¹⁾ und $\Delta \beta$ folgende Werte (wir geben nur die anfänglichen Werte wieder).

Tabelle 2.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
0,46	0,4	0,4	1,07	0,5	1,6
1,05	0,5	0,9	4,14	1,7	3,3
1,38	0,2	1,1	8,26	4,0	7,3

¹⁾ Wir geben von jetzt ab Δi in Milliampere.

Bei den kleinen Werten sind naturgemäß die Ablesungsfehler groß, doch ergibt Rechnung und Zeichnung, daß die Kurve sicherlich bis etwa $\Delta i \cdot 10^3 = 4,14$ geradlinig verlaufen wird; hieraus ergibt sich $\frac{\Delta \beta}{\Delta i} = 800$ und hiermit $\mu = 200$; also ein kleinerer Wert als

beim ersten Versuch. Im übrigen aber wurde bei der Magnetisierung bis $\mathfrak{H}' = 152,6$ fast genau der gleiche Wert wie oben erreicht; für $\mathfrak{H}' = 0$ ergab sich $\mathfrak{B} = 789$. $\bar{\mu}$ war gleichfalls, wie oben, von der Größenordnung 1200. Magnetisiert man nun negativ, so gilt natürlich der gleiche Wert; d. h. wir finden: $\mu_- > \mu_+$, wenn wir mit μ_+ die Permeabilität in der aufsteigenden Kurve, mit μ_- die in der absteigenden bezeichnen. Vgl. hierzu meine Ausführungen in ZS. f. Physik 9, 389, 1922. Wenn wir aber die Induktion für $\mathfrak{H}' = 0$ durch Abziehen der Spule bestimmen, so finden wir statt 789 nur

774, d. h. um etwa 2 Proz. weniger; magnetisiert man von diesem Wert nach der negativen Seite, so ist μ_- von der ersten Größenordnung, d. h. 200. Die absteigende Magnetisierungskurve verläuft dann anfangs flach, um später stärker sich nach abwärts zu wenden und etwa den Verlauf der von 789 ohne Unterbrechung erhaltenen Kurve zu erreichen. Kehrt man bei $\mathfrak{H}' = -152,6$ um, so erreicht man $\mathfrak{H}' = 0$ bei 235, jetzt aber mit großem μ , das erhalten

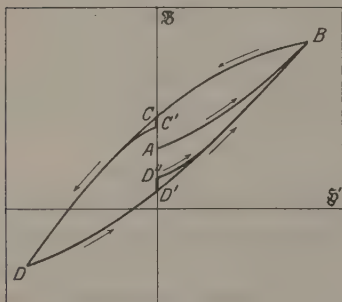


Fig. 2.

bleibt, wenn man gleich nach der positiven Seite weiter magnetisiert. Unterbricht man aber den Versuch bei $\mathfrak{H}' = 0$ durch Abziehen der Spule, so erhält man statt 235 den um 10 Proz. größeren Wert 262,5 und von diesem aus ist μ wieder der kleinere Wert. Wir gelangen also zu dem in Fig. 2 dargestellten Schema: die Magnetisierung läuft von A über B nach C und würde hier stetig weiter laufen, wenn nicht der Rückgang nach C' einträte. Das gleiche gilt für den Verlauf über D. Hier ist das Wachstum nach D' so groß, daß es nicht durch Beobachtungsfehler vorgetäuscht sein kann. Welche Werte von μ auftreten, der größere oder der kleinere, ist aus der Figur zu ersehen.

Die Veränderlichkeit der Remanenz ist also bestimmend für den Wert der Permeabilität, mit anderen Worten: in dem Magnetstab gehen ohne äußeres Feld, sei es im Laufe der Zeit, sei es durch das Abziehen der Spule, Veränderungen in der Magnetisierung vor sich,

die dann eine andere A.-P. bedingen, und zwar kann es sich ebenso gut um eine Zunahme als um eine Abnahme der Remanenz handeln. Bestimmend dafür ist die magnetische Vorgeschichte.

Um die Veränderung der Remanenz genauer zu untersuchen, wurde der Stab nochmals hoch magnetisiert und ergab beim ersten Abziehen der Spule von seiner Mitte 224 Skt. (die Induktion ist 3,19mal so groß). Um im folgenden sicher zu gehen, daß die Verteilung des Magnetismus in dem Stab eine einigermaßen regelmäßige ist, wurde nicht nur von der Mitte des Stabes, sondern von Punkten, die $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ und 2 cm rechts und links von der Mitte lagen, abgezogen. Es ergaben sich folgende Werte, wobei zwischen je zwei Messungen etwa zwei Minuten vergingen. Das +- bzw. ---Zeichen bedeutet die Lage rechts oder links vom Nullpunkt.

Tabelle 3.

Lage	β	Lage	β	Lage	β	Lage	β
0	224,0	— 2	186,8	— 1,5	177,2	— 1	171,5
1	219,8	— 1,5	187,3	— 2	175,8	— 1,5	170,5
2	214,3	— 2,1	187,4	— 1,5	177,0	— 2	169,1
— 1	207,8	— 0,5	187,1	— 1	177,2	— 1,5	170,0
— 0,5	201,5	0	185,5	— 0,5	177,7	— 1	171,1
0	200,6	0,5	184,1	0	177,8	— 0,5	171,2
0,5	195,8	1	182,7	0,5	176,3	0	171,2
1	193,0	1,5	180,3	1	174,8	+ 1	169,7
1,5	191,0	2	178,3	1,5	170,1	+ 2	166,0
2	187,8	1,5	177,0	2	168,3	+ 1	169,3
1,5	187,4	1	178,2	1,5	170,0	0	170,9
1	187,6	0,5	177,0 (?)	1	171,2	— 1	170,5
0,5	188,6	0	178,3	0,5	172,5	— 2	169,0
0	189,3	— 0,5	178,0	0	172,9	— 1	170,1
— 0,5	189,7	— 1	177,9	— 0,5	172,0	0	170,6
— 1	189,1						

Zeichnet man sich die der Tabelle 3 entsprechende Kurve, so sieht man, daß zwar im allgemeinen die regelmäßige Verteilung des Magnetismus gewahrt ist, daß aber die Abnahme unregelmäßig, meist nach der rechten Seite hin schneller erfolgt; für die Nullwerte gilt, daß sie erst rasch, dann langsamer abnehmen, um sich allmählich einem Grenzwert zu nähern. Wiederholte, dem Schluß der Versuchsreihe angefügte Messungen des Nullwertes ergeben kleine Schwankungen nach oben und unten um 168,9.

Wir nehmen somit an, daß dieser Wert von 168,9 Skt. = 541 absolute Einheiten einem Gleichgewichtszustand der vorhergegangenen Hochmagnetisierung entspricht, und zwar mehr entspricht, als der Anfangswert von 224 Skt. = 715 absolute Einheiten.

Es war nun zu untersuchen, welches nach wechselnden Magnetisierungen für $\mathfrak{H}' = 0$ dieser Gleichgewichtszustand sein würde, bzw. zu bestimmen, in welchem Sinne jeweils die zeitlichen Änderungen verliefen, wenn der Endzustand nicht jedesmal abgewartet wurde.

In Tabelle 4 geben wir eine Übersicht über die angestellten Versuche und ihre Resultate; dabei wurde die Magnetisierung wie in Tabelle 1 und 2 stufenweise vorgenommen und wurden die Induktionswerte als Summen aller Zuwächse berechnet. Wir geben in der Übersicht nur die Höchstfeldstärken \mathfrak{H}' und die beim Zurückgehen auf $\mathfrak{H}' = 0$ erreichten Induktionen \mathfrak{B} . Unter \mathfrak{B} geben wir die durch Abziehen der Spule erreichten Werte. Das magnetische Feld wird dabei allmählich verkleinert.

Tabelle 4.

Nr.	Höchst-magnetis. \mathfrak{H}'	Erreichte Induktion \mathfrak{B}'	Zeit	Induktion \mathfrak{B}	Nr.	Höchst-magnetis. \mathfrak{H}'	Erreichte Induktion \mathfrak{B}'	Zeit	Induktion \mathfrak{B}
1	—	—	—	541					
2	+ 2,64	711	—	—	8	— 1,65	190	sofort	191
3	+ 2,64	731	sofort	720				30 ^m (n. 8 Beob.)	239
			18 ^h	505				24 ^h	239
			sofort	104	9	+ 1,41	340	sofort	341
			20 ^m	167				2 ^m	273
4	— 2,67	103	35 ^m	191	10	— 1,38	148	14 ^m (n. 7 Beob.)	255
			55 ^m	199				sofort	137
			70 ^m	204	11	+ 0,693	264	12 ^m (n. 6 Beob.)	223
			46 ^h	216				sofort	264
			sofort	460	12	— 0,688	202	20 ^m (n. 4 Beob.)	235
5	+ 2,19	458	5 ^m	370				sofort	201
			10 ^m	366	13	+ 0,460	253	12 ^m (n. 6 Beob.)	229
			15 ^m	364				sofort	251
			20 ^m	366	14	— 0,460	201	9 ^m (n. 5 Beob.)	218
			sofort	165				sofort	198
			3 ^m	235	15	+ 0,278	225	5 ^m (n. 3 Beob.)	216
			6 ^m	243				sofort	224
			9 ^m	273	16	— 0,278	211	3,5 ^m (n. 3 Beob.)	216
6	— 2,12	181	12 ^m	280				sofort	209
			18 ^m	282	17	+ 0,139	213	58 ^m (n. 4 Beob.)	211
			48 ^m	282				sofort	212
			78 ^m	283	18	— 0,139	211	6 ^m (n. 3 Beob.)	211
			118 ^m	279				sofort	211
			sofort	396				2 ^m (n. 1 Beob.)	211
7	+ 1,65	401	3 ^m	335	19	Wechselnde, immer kleiner werdende Felder bis zu $\mathfrak{H}' = \pm 0,016$	Werte, die um den Endwert 210 schwanken		
			14 ^m	317 ¹⁾					
			19 ^m	316					

In Fig. 3 sind die den Magnetisierungen 2 bis 6 entsprechenden Kurven wiedergegeben, auf die Wiedergabe der übrigen sei verzichtet.

1) Nach vier dazwischenliegenden, hier nicht mitgeteilten Beobachtungen.

Aus der Figur und den Messungsergebnissen für alle Kurven geht hervor, daß die A.-P., d. h. die Permeabilität bei Beginn einer neuen positiven oder negativen Magnetisierung stets von der gleichen Größenordnung ist, indem sich im Mittel ergibt $\frac{\Delta \beta}{\Delta i} = 800$ bis 1000, also wie oben μ von der Größenordnung 200 bis 300.

2. Die Veränderlichkeit der scheinbaren Remanenz. Die Versuche der Tabelle 4 zeigen, wie stets nach vorhergehender positiver Magnetisierung ein Abnehmen der ursprünglichen positiven Remanenz, nach negativer Magnetisierung aber ein Steigen derselben eintritt,

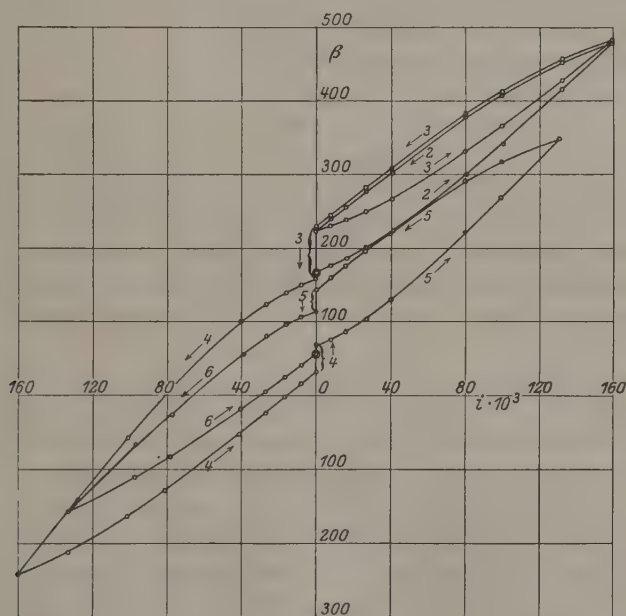


Fig. 3.

und wie beide Werte bei immer kleiner werdendem Zyklus allmählich denselben Grenzwert erreichen. Auffallend erschien hierbei, daß der Grenzwert positiv blieb und nicht Null wurde, doch wurde dies zunächst der ursprünglichen hohen positiven Magnetisierung zugeschrieben. Ferner erschien bemerkenswert, daß der Rückgang bzw. Anstieg der Remanenz nicht stets sofort deutlich beim ersten Abziehen der Spule hervortrat, sondern besonders stark beim zweiten Abziehen. Dies schien darauf hinzudeuten, daß das Abziehen der Spule selbst von Einfluß sein müsse, daß vermutlich die beim Abziehen unvermeidliche

kleine Erschütterung des Stabes den Rückgang bzw. Anstieg, d. h. die andere Verteilung der Elementarmagnete nach der gewöhnlichen Auffassung, hervorruft.

Um den Einfluß von Erschütterungen zu untersuchen, wurde der Stab nach der Versuchsreihe 4 ($\mathfrak{B} = 210$) 20 mal mit einem Holzhammer so geschlagen, daß die Schlagrichtung in die Längsachse fiel; es ergab sich der gleiche Wert $\mathfrak{B} = 210$; nach nochmals 20 kräftigeren Schlägen in gleicher Richtung war sogar ein kleiner Anstieg auf 214 zu beobachten.

Als man aber den Stab aus der Spule nahm und 20 mal von 20 cm Höhe zu Boden fallen ließ, ergab sich eine Induktion von 4,1, bei Wiederholung von 8,6 absoluten Einheiten, d. h. der Stab hatte durch die heftige Erschütterung fast seinen ganzen remanenten Magnetismus verloren.

Beim Zubodenfallen hat der Stab einige Male die EW-Richtung, in der er sich für gewöhnlich befand, verlassen; um zu prüfen, ob durch das Erdfeld wieder eine merkliche Magnetisierung des Stabes eintritt, wurde er in die NS-Richtung gebracht, dort kurze Zeit gelassen und wieder in die EW-Richtung gelegt. Abziehen der Spule gab wider Erwarten einen kleineren Wert, nämlich 4,1 wie zuerst. Ließ man das Erdfeld entgegen wirken, so ergab sich 5,4, also ein größerer Wert.

Um diese unerwartete Erscheinung zu erklären, wurde der Stab dem Zyklus $\mathfrak{H}' = 0,016$, $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{H}' = -0,016$, $\mathfrak{H} = 0$ unterworfen; dabei betrug der Zuwachs der Induktion ebensoviel wie die Abnahme; hatte der Stab also vorher beim Abziehen die Induktion 5,4 gehabt, so mußte er sie auch nachher haben. Jedoch ergaben sich beim Abziehen 7,3 absolute Einheiten, also ein bedeutend höherer Wert.

Nun weist bereits Gumlich darauf hin, daß bei derartig schwach magnetisierten Proben, bei denen die Induktion von der Größenordnung 1 bis 5 absolute Einheiten ist, die gewöhnliche Ansicht, nach welcher ein magnetisierter Stab an beiden Enden Pole von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Vorzeichen besitzt, vollständig versagt, und daß die tatsächliche Verteilung des Magnetismus ganz unregelmäßig sein kann.

Dies mußte sich durch Abziehen der Spule nachweisen lassen. Zieht man nämlich die Spule erst von der Mitte des Stabes, dann von rechts oder links gelegenen Stellen ab, so muß man bei regelmäßiger Verteilung im ersten Fall den höchsten, der Zahl aller geschnittenen Kraftlinien entsprechenden Wert, in den anderen nach rechts und links symmetrisch verteilte Werte erhalten.

Der Versuch ergab folgende, in Tabelle 5 und Fig. 4 dargestellte Verteilung.

Tabelle 5.

Lage	Induktion	Lage	Induktion
— 4	+ 26,5	+ 1	+ 4,5
— 3	+ 21,8	+ 2	— 1,9
— 2	+ 17,1	+ 3	— 4,8
— 1	+ 11,7	+ 4	— 8,9
0	+ 7,5	+ 5	— 11,5

Der Verlauf der Kurve deutet darauf hin, daß nicht ein, sondern zwei Maxima auftreten, daß also der Stab zwei Indifferenzpunkte besitzt. Hieraus folgt, daß an den Enden des Stabes zwei gleichnamige Pole sitzen, irgendwo in der Mitte dagegen ein entgegengesetzter Pol, und zwar ist dessen Lage nach der Kurve etwa 2 cm rechts von der Mitte.

Bevor diese Erscheinung weiter untersucht wurde, wurde der neu magnetisierte und am Koepselapparat bis auf eine äußere Feldstärke von 2 Gauß entmagnetisierte Stab nochmals einem Entmagnetisierungszyklus unterworfen. Hierbei wurde aber das jeweilige Höchstfeld nicht stufenweise, sondern plötzlich angelegt und weggenommen, ferner wurde jeweils nicht der Endzustand, wie er sich nach mehrmaligem Spulenabziehen einstellt, abgewartet. Der Versuch, dessen Ergebnisse in Tabelle 6 enthalten sind, soll somit den Entmagnetisierungsvorgang bei kleiner und kleiner werdenden Zyklen quantitativ verfolgen. Hierbei wurde zunächst die Induktion nach der obigen Vorbehandlung gemessen und ergab -302^1 ,

bei wiederholtem (28 maligem) Abziehen der Spule sank der Wert bis auf -169 ; die Verteilung des Magnetismus im Stab war regelmäßig. Begonnen wurde mit negativer Magnetisierung (\mathfrak{H}'_1); Ansteigen der (negativen) Induktion auf $+ \mathfrak{B}_1$; dann $\mathfrak{H}' = 0$; Sinken auf \mathfrak{B}_0 ; dann positives Feld (\mathfrak{H}'_2); Ansteigen der Induktion auf \mathfrak{B}_2 , für $\mathfrak{H}' = 0$; Induktion \mathfrak{B}_0 . Dann begann die etwas kleinere negative Magnetisierung usw.

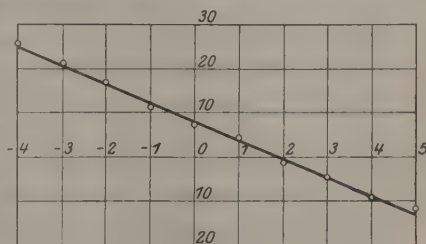


Fig. 4.

¹⁾ Das Minuszeichen drückt aus, daß bei der gewählten Versuchsanordnung nach E zu der negative Pol des Stabes schaute, während es bei Tabelle 4 der positive war.

Tabelle 6.

Nr.	\mathfrak{H}'_1	\mathfrak{B}_1	\mathfrak{P}_0	\mathfrak{H}'_2	\mathfrak{B}_2	\mathfrak{H}'_0
1	—	—	—	—	—	— 169
2	— 2,69	— 1295	— 363	+ 2,69	+ 1020	+ 85
3	— 2,24	— 887	— 168	+ 2,24	+ 873	+ 155
4	— 1,69	— 584	— 90	+ 1,69	+ 610	+ 121
5	— 1,36	— 425	— 55	+ 1,36	+ 448	+ 94
6	— 0,688	— 153	— 2	+ 0,688	+ 213	+ 62
7	— 0,462	— 72	+ 18	+ 0,462	+ 143	+ 51
8	— 0,279	— 21	+ 28	+ 0,279	+ 94	+ 44
9	— 0,139	+ 15	+ 38	+ 0,139	+ 64	+ 39
10	— 0,070	+ 27	+ 40	+ 0,070	+ 52	+ 40
11	— 0,035	+ 34	+ 41	+ 0,035	+ 45	+ 38
12	— 0,017	+ 86	+ 40	+ 0,017	+ 43	+ 40

Man erreicht also durch den abnehmenden Zyklus einen positiven Endwert, der durch kleine Magnetisierungen nach oben oder unten keine wesentlichen Störungen mehr erleidet, also einem Gleichgewichtszustand entspricht. Abziehen der Spule ergab aber statt + 40 den Wert — 36! Dies ließ wieder auf anomale Verteilung des Magnetismus im Stab schließen, die tatsächlich nach der oben beschriebenen Methode nachgewiesen werden konnte. Hiernach mußte der Stab an beiden Enden Südpole und dazwischen einen Nordpol besitzen. Dieses Resultat konnte auch durch Prüfung mit einer langsam genäherten Magnetnadel bestätigt werden, doch trat unter dem Einfluß des magnetischen Feldes der Nadel bald eine Ummagnetisierung unseres Stabes ein.

Berücksichtigt man den Umstand der unregelmäßigen Verteilung, so konnte gezeigt werden, daß Magnetisierung durch das Erdfeld in richtigem Sinn wirksam ist und zu regelmäßiger oder fast regelmäßiger Verteilung führt.

Nach den bisherigen Messungen blieb es noch zweifelhaft, woher eigentlich der bei mehrmaligem Spulenabziehen stets beobachtete Rückgang bzw. Anstieg rührt; es schien sich um eine Annäherung an einen Gleichgewichtszustand im Laufe der Zeit zu handeln.

Folgender Versuch gab die Aufklärung. Der Stab zeigte nach verschiedenen Messungen die Induktion — 92, und zwar lag der Indifferenzpunkt + 1 cm rechts von der Mitte, die Verteilung war fast normal. Anlegen eines Feldes von + 1,31 Gauß erzeugte ein Wachsen der Induktion auf + 312; ging man auf $\mathfrak{H}' = 0$ zurück, so ergab sich die Induktion — 25. Durch Abziehen wurde genau der gleiche Wert erhalten, dreimaliges weiteres Abziehen nach je 1 m ergab nacheinander — 75, — 80, — 80, also die bekannte Wachstumserscheinung. Nun wurde der Versuch wiederholt; es ergab sich für $\mathfrak{H}' = 1,31$

$\mathfrak{B} = 310$, für $\mathfrak{H}' = 0$ $\mathfrak{B} = -26,5$. Wir ziehen nicht sofort ab, sondern erst nach drei Minuten und erhalten dann $-25,5$, also praktisch den gleichen Wert, und erst bei dem nach einer weiteren Minute folgenden Abziehen den höheren Wert -67 . Damit war gezeigt, daß es sich nicht um eine zeitliche Änderung handelte, sondern um einen Einfluß des Abziehens selbst, d. h. der mit dem Abziehen verbundenen Erschütterung des Stabes. Um dies direkt nachzuweisen, wurde der Versuch wiederholt; die Induktion stieg auf 330 bei Anlegen des positiven Feldes, fiel auf $-6,7$ für $\mathfrak{H}' = 0$. Eine leichte Erschütterung des Stabes ergab einen Induktionsstoß von $-28,3$ Einheiten, das darauf folgende Abziehen noch von weiteren 53 Einheiten, so daß damit wieder der hohe Wert erreicht war. Bei einem nochmaligen Versuch konnte durch einen Schlag senkrecht zur Spulenchse sogar ein Induktionsstoß von -49 Einheiten erzielt werden.

Durch die beim ersten Abziehen eintretende Erschütterung des Stabes tritt also die Veränderung der Remanenz ein, mehrfaches Abziehen oder Erschüttern wirkt in gleichem Sinne, aber nicht mehr so stark, bis zuletzt ein Gleichgewichtszustand erreicht wird. Doch ist dieser Gleichgewichtszustand ganz von der Art der Erschütterung und, wie wir später zeigen werden, von der Beschaffenheit des Eisens abhängig.

So ging z. B. die Induktion -477 durch neunmaliges Abziehen auf -318 zurück, dann durch 20 kräftige senkrecht zur Stabachse geführte Schläge auf die Magnetisierungsspule mit dem Holzhammer auf $-16,6$. Erneutes mehrmaliges Abziehen der Induktionsspule ergab die Werte $-19,2$, $-17,2$, $-15,7$ und $-17,8$, also ein Schwanken um den obigen Endwert.

Ebenso bewirkt auch ein Erschüttern, wenn der Stab unter dem Einfluß eines äußeren Feldes steht, eine Veränderung, und zwar hier in dem Sinne, in dem das Feld selbst wirkt.

Der Stab mit dem Induktionswert $-17,8$ wurde einem in kleinen Stufen zunehmenden positiven Felde ausgesetzt und erreichte für $\mathfrak{H}' = 0,67$ Gauß den Wert $+155$. Durch fünfmaliges Abziehen der Spule, während das Feld wirksam blieb, stieg die Induktion auf 159, 248, 325, 331 und 333, durch Klopfen mit dem Hammer noch auf 367. Als nun das Feld in kleinen Stufen vergrößert wurde, ergab sich für die Permeabilität an der Stelle $\mathfrak{H}' = 0,67$ wieder der Anfangswert; bei einem Felde $\mathfrak{H}' = 1,11$ Gauß war die Induktion auf 466 gewachsen, stieg durch dreimaliges Abziehen auf 469, 544 und 557, endlich durch Hammerschlag noch auf 658. Nun wurde plötzlich zum Felde $\mathfrak{H}' = 0$ zurückgegangen, die Induktion fiel auf 335, durch

Abziehen auf 331, 213, 197, 182 und 160, durch Hammerschlag (14 mal) auf 34,5 und durch zehn weitere kräftigere Schläge auf 8,9. Abziehen der Spule von verschiedenen Punkten ergab eine noch einigermaßen regelmäßige Verteilung des Magnetismus in dem Stab.

In Fig. 5 ist der Versuch dargestellt, wobei der Einfachheit halber als Abszissen wieder die Stromstärken, als Ordinaten die Galvanometerablesungen gewählt wurden.

Bemerkenswert ist noch, daß beim ersten Abziehen der Spule, wie auch oben, stets fast noch genau der gleiche Wert erhalten wurde, der sich aus den Zuwüchsen der Induktionen ergeben hat; erst bei dem zweiten Abziehen machte sich die starke Wirkung der ersten Erschütterung bemerkbar.

3. Magnetisieren unter gleichzeitigem Erschüttern. Die Betrachtung der Fig. 5, insbesondere die Tatsache, daß die Permeabilität an verschiedenen Stellen die gleiche ist, wenn vorher erschüttert wurde, legt den Gedanken nahe, die Magnetisierung unter gleichzeitigem Erschüttern vorzunehmen oder vielmehr in kleinen Schritten zu magnetisieren, zu erschüttern und den Induktionswert nach dem Erschüttern zu bestimmen. Um stets eine genügende Erschütterung zu erzielen, wurden bei dem folgenden Versuch jeweils zehn Schläge mit dem Holzhammer auf die Magnetisierungsspule gegeben, wobei natürlich darauf geachtet wurde, daß keine Verschiebungen des ganzen Systems Magnetisierungsspule, Stab und Induktionsspule gegeneinander auftraten. Wir geben in Tabelle 7 unter i die Magnetisierungsstromstärken in mA, unter $\Delta\beta$ die Zunahmen der Galvanometerausschläge, unter β die Summen der $\Delta\beta$, unter β' den Ausschlag beim Abziehen der Spule und unter β'' den Ausschlag nach zehnmaligem Hammerschlag.

Tabelle 7.

i	$\Delta\beta$	β	β'	β''	i	$\Delta\beta$	β	β'	β''
—	—	—	—	2,9	27,1	6,0	67,4	68,7	82,2
2,02	1,6	4,5	4,6	7,0	40,8	13,7	95,9	98,2	123,8
4,05	1,9	8,9	9,5	11,4	80,3	50,1	173,9	177,0	245,8
8,1	3,2	14,6	14,8	22,4	100,0	20,4	266,2	268,4	310,8
10,1	1,9	24,8	26,4	29,6	132,2	37,8	348,6	354,5	425,9
13,8	3,2	32,8	34,4	40,9	40,8	-151,8	274,6	267,6	136,7
16,4	2,4	43,3	44,0	48,4	0	-52,9	83,8	86,0	7,6
20,7	3,8	52,2	53,6	61,4					

Wie die nach Tabelle 7 gezeichnete Kurve 6 zeigt, liegen die nach dem Hammerschlag erreichten Induktionswerte ziemlich genau auf einer Geraden, deren Neigungswinkel gegen die β' -Achse etwa

durch $\operatorname{tg} \alpha = 3,07$ gegeben ist. Zeichnen wir die Kurve in \mathfrak{F}' und \mathfrak{B}' , d. h. benutzen wir die Beziehungen $\mathfrak{F}' = 0,01662 \cdot i$ und $\mathfrak{B}' = 3,19 \cdot \beta$, so ist die Neigung der entsprechenden Geraden gegeben durch

$$\operatorname{tg} \alpha' = 3,07 \cdot \frac{3,19}{0,0166} = \frac{100\,000}{170} = \frac{1}{0,00170}.$$

Der Wert für $\operatorname{ctg} \alpha' = 0,00170$ stimmt nun nahezu überein mit dem Wert $\frac{N}{4\pi}$ für den betreffenden Stab, der sich aus $N = 0,0218$ nach Mann (a. a. O.) zu 0,00173 ergibt.

Dies bedeutet aber, daß die gescherte Magnetisierungskurve innerhalb des untersuchten Intervalls mit der \mathfrak{B} -Achse zusammenfällt, d. h. in dem Weicheisen herrscht bei zunehmendem äußeren Feld stets (in dem untersuchten Intervall) das Feld Null. Es liegt hier genau der gleiche Fall vor, den W. Steinhaus und E. Gumlich¹⁾ erhielten, als sie jedem stationären Felde, das gemessen werden sollte, einen Entmagnetisierungsprozeß, nämlich ein Wechselfeld von hinreichender, stetig auf Null abnehmender Höhe, überlagerten. (Ideale Magnetisierungskurve; Suszeptibilität „Unendlich“.)

Die Bedeutung der Tatsache, daß man bei weichem Eisen durch nicht sehr kräftiges Erschüttern die gleiche Wirkung erzielt wie durch ein übergelagertes abnehmendes Wechselfeld, soll besonders im Hinblick auf die Frage der magnetischen Schirmwirkung eigens untersucht werden.

Die Übereinstimmung mit dem für N angenommenen Wert 0,0218 ist bemerkenswert gut, wenn man bedenkt, daß die Werte der Entmagnetisierungsfaktoren in Zylindern nur einigermaßen genau bekannt sind. In seiner Arbeit „Über die Entmagnetisierungsfaktoren kreiszylindrischer Stäbe“ gibt C. R. Mann²⁾ z. B. für das Dimensionsverhältnis $m = 50$ und für die Magnetisierungen 300 bis 800 Werte für N , die Abweichungen voneinander bis zu 8 Proz. zeigen.

Aus den einzelnen Werten der Tabelle 7 die Werte von N zu berechnen, führt natürlich zu viel größeren Schwankungen; legt man aber durch eine größere Zahl von Punkten die Neigung der Ent-

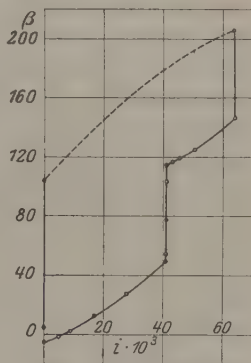


Fig. 5.

¹⁾ Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 369—384, 1915.

²⁾ A. a. O., S. 26.

magnetisierungslinie fest, so ergibt sich N sicher auf einige Prozente genau.

Beim Zurückmagnetisieren wurde sowohl bei $i = 40,8$ als auch bei $i = 0$ nicht genau der alte Wert erreicht; dies zeigt, daß die Erschütterung nicht ganz genügte, den Prozeß vollständig rückgängig zu machen.

Spätere Versuche sollen zeigen, ob es möglich ist, nach der angegebenen Methode die Frage der Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von der Feldstärke bei kleinen Feldstärken zu untersuchen; hier teilen wir in Fig. 7 noch die Beobachtungen mit, die an einem

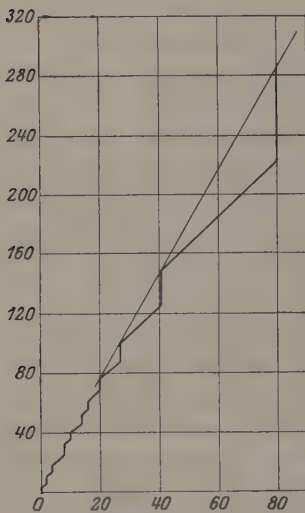


Fig. 6.

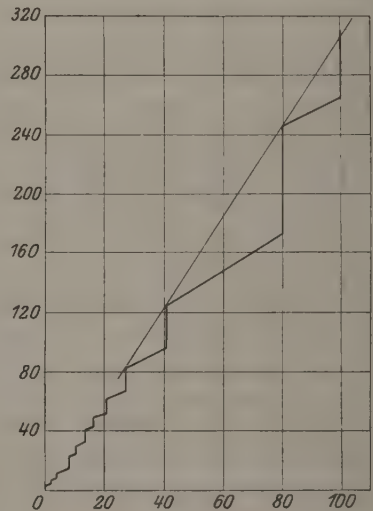


Fig. 7.

etwa 4,5 Proz. Silicium enthaltenden Stahl gemacht wurden. An dieser Legierung hatte Gumlich, besonders in geglühtem Zustande, die bisher höchsten Werte für die A.-P., nämlich 510, gemessen¹⁾.

Für die Probe war $l = 27$, $d = 6,08$, somit $N = 0,0226$, $\frac{N}{4\pi} = 0,00180$, $B' = 3,137 \cdot \beta$.

Man sieht, daß hier beim Zurückgehen bei $i = 40,8$ ein Wert erreicht ist, der nur 2 Proz. größer ist, als der beim Aufwärtsgehen. Zeichnet man wieder die die Punkte verbindende Gerade (indem wir z. B. die $i = 20,4$ und $i = 80,3$ entsprechenden Punkte verbinden, die

¹⁾ Ann. d. Phys. (4) 34, 255, 1911.

Tabelle 8.

$i \cdot 10^3$	$\Delta\beta$	β	β''	$i \cdot 10^3$	$\Delta\beta$	β	β''
0	0	—	3,8	20,4	6,9	68,4	75,6
2,02	3,1	6,9	11,7	27,0	12,5	88,1	99,0
4,05	3,1	14,8	18,8	40,8	26,0	125,0	144,9
8,1	6,8	25,6	33,6	80,8	86,8	281,7	281,7
10,1	3,2	36,8	40,9	40,8	— 86,8	194,9	147,8
13,8	5,6	46,5	52,7	0	— 89,0	58,8	10,7
16,3	4,2	56,9	61,5				

Verbindungsline geht recht genau durch die dazwischenliegenden Punkte), so ergibt sich

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{80,3 - 20,4}{281,7 - 75,6} = 0,2906 \text{ und } \operatorname{ctg} \alpha' = 0,00154,$$

während man nach dem Dimensionsverhältnis 0,00180 hätte erwarten sollen. Es scheint demnach doch das Material des untersuchten Stabes auf die Größe des Entmagnetisierungsfaktors von Einfluß zu sein; bisher nahm man an, „daß die N nur von der Gestalt des magnetisierten Körpers“ (Mann, a. a. O., S. 23) und von der Magnetisierungsintensität, letzteres bei größeren Magnetisierungen, abhängig sind.

Näherer Aufschluß über diese Frage soll durch eingehendere Messungen erbracht werden.

Ein Versuch sei hier noch angeführt, der an einem anderen Weicheisenstab ($l = 24,0$, $d = 5,89$) gemacht wurde. Vgl. Tabelle 9 und Fig. 8, in welche die dem Wert $\frac{N}{4\pi} = 0,00213$ entsprechende Entmagnetisierungslinie eingezeichnet wurde.

Tabelle 9.

i	$\Delta\beta$	β	β''	i	$\Delta\beta$	β	β''
0	0	3,30	3,3	131,1	— 30,7	339,3	329,2
2,02	1,7	5,0	8,2	99,7	— 41,9	287,3	261,3
4,05	2,0	10,2	12,0	80,2	— 24,5	236,8	215,4
8,1	3,8	15,8	20,7	40,8	— 54,2	161,2	134,5
10,2	1,7	22,4	24,3	27,2	— 15,2	119,3	104,4
13,7	3,0	27,3	30,8	20,6	— 7,3	97,1	84,2
16,4	2,5	33,3	35,9	16,4	— 3,7	80,5	71,8
20,6	3,7	39,6	42,6	13,7	— 2,3	69,5	65,0
27,2	6,6	49,2	55,1	10,2	— 3,0	62,0	54,9
40,8	14,4	69,5	79,8	8,1	— 1,7	53,2	46,9
80,2	55,2	135,0	162,0	4,05	— 3,8	43,1	38,7
99,7	24,2	186,2	221,7	2,02	— 1,8	36,9	32,7
131,7	42,3	264,0	300,8	0	— 2,0	30,7	27,7
158,0	31,9	332,2	370,0				

Es zeigt sich, daß, trotzdem die Probe auch wieder Weicheisen ist, dieses doch so hart ist, daß die kleinen Erschütterungen nicht genügen, das Feld Null im Innern herzustellen; damit hängt eng zusammen, daß die Werte beim Zurückgehen durchweg beträchtlich höher bleiben als vorher, und daß für $\mathfrak{H}' = 0$ eine beträchtliche remanente Magnetisierung übrig bleibt. Da bereits ein Vorversuch gezeigt hatte, daß nach 10 Schlägen noch nicht der Höchstwert jeweils erreicht wurde, so wurde unter Beobachtung des Galvanometers stets so lange geklopft, bis das Galvanometer keine Veränderung mehr anzeigte;

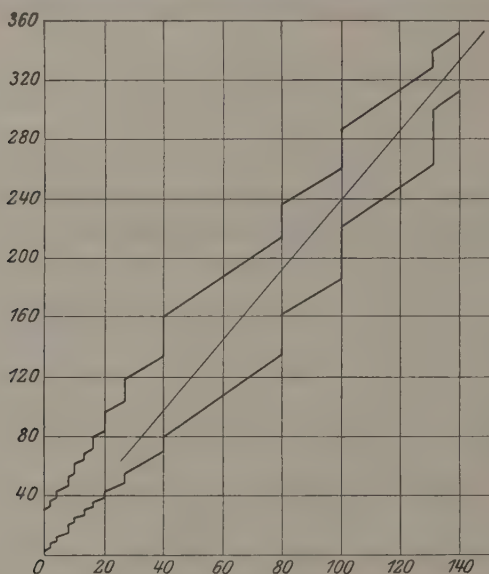


Fig. 8.

aber der Versuch zeigt, daß die Erschütterungen trotzdem nicht genügen. Den in der Spule befindlichen Stab stärkeren Erschütterungen auszusetzen, war unzulässig.

Daß durch Erschütterungen die von der Hysteresiskurve eingeschlossene Fläche bedeutend verkleinert wird, war bereits früher beobachtet worden¹⁾, insbesondere daß der Inflexionspunkt der jungfräulichen Kurve wegfällt. Doch beziehen sich die früheren Untersuchungen auf bedeutend größere Feldstärken, daher kann z. B. der im Handb. d. Phys. V, S. 334 wiedergegebenen Figur nicht mit Sicherheit entnommen werden, daß in der Nähe des Anfangspunktes wirk-

¹⁾ Handb. d. Phys. 5, 334. Dort auch Literaturangaben.

lich die Suszeptibilität „Unendlich“ vorhanden ist, was aus den vorliegenden Messungen unzweifelhaft hervorgeht, wenn es sich um weiches Eisen handelt, bei dem durch Erschütterungen die Hysteresiserscheinungen zum Verschwinden gebracht werden.

2. Untersuchungen an verschiedenen Stahlsorten.

1. Remanenz und Anfangspermeabilität bei einem 1,5proz. Nickelstahl. Die an dem letzten Weicheisenstab gemachten Beobachtungen legten die Frage nahe, wie sich ein sogenannter mittelharter Stahl gegen Erschütterungen verhält. Zur Untersuchung wurde ein 1,5proz. Nickelstahl gewählt, besonders auch aus dem Grunde, weil für Nickelstahl die Anfangspermeabilität noch nicht bestimmt war. Die Konstanten für die Proben waren: $l = 27,4$, $d = 0,602$.

Nach hoher Magnetisierung ergab der Stab eine fast regelmäßige Verteilung des Magnetismus, wie aus Tabelle 10 hervorgeht; der Indifferenzpunkt etwa 1 cm rechts von der Mitte, Abziehen von ihm ergibt eine Induktion von 300 Skt. = 939 absolute Einheiten.

Tabelle 10.

Lage	β	Lage	β
0	298,5	— 2	282,3
2	297,1	— 4	249,3
4	280,0	— 5	225,4
6	246,0	0	298,0

Für die folgende Messung wurde jedoch die Spule, wie gewöhnlich, genau über die Mitte des Stabes gesteckt, d. h. der Wert 298,0 als Ausgangswert angenommen. Tabelle 11 stellt die Ergebnisse der Messung dar. Das angelegte Feld war negativ, d. h. es war so gerichtet, daß auf der nach E gerichteten Seite des Stabes, wo sein Nordpol lag, der Südpol des Feldes lag.

Die Tabelle 11 und die danach gezeichnete Figur zeigt, daß die Magnetisierungskurven innerhalb des Intervalls bis $\mathfrak{H}' = 157,2 \cdot 0,01662 = 2,61$ Gauß noch nahezu geradlinig verlaufen und daß die Hysteresis sehr klein ist. Für $\frac{\Delta\beta}{\Delta i} \cdot 10^3$ ergibt sich etwa 330; hieraus berechnet

sich $\mu' = 64$ und $\mu = 64$, also sehr kleine Werte. Fortsetzung der Kurve nach der positiven Seite und Zurückgehen nach $\mathfrak{H}' = 0$ ergab den entsprechenden Verlauf und den Endwert $\beta = 302,2$, also eine nur ganz wenig höhere Remanenz als anfänglich.

Eingehende Versuche zeigten, daß bei dem verwandten Nickelstahl die Verhältnisse genau so auftreten wie oben bei dem Weich-

eisen, die erreichten Remanenzen bleiben nicht konstant, sondern es tritt, je nach der Vorgeschichte, ein Sinken oder Steigen derselben ein; magnetisiert man dann von neuem, so ist die jetzt an dieser Stelle auftretende Permeabilität die Anfangspermeabilität.

Tabelle 11:

i	$\Delta\beta$	β	i	$\Delta\beta$	β
0	0	298,0	131,0	+ 8,2	249,7
2,02	— 0,7	297,3	99,3	10,8	260,5
4,05	— 0,6	296,7	80,1	6,6	267,1
8,1	— 1,3	295,4	40,7	13,8	280,9
10,1	— 0,6	294,8	27,0	4,7	285,6
13,7	— 1,0	293,8	20,5	2,3	287,9
16,3	— 0,9	292,9	16,3	1,4	289,3
20,5	— 1,3	291,6	13,7	0,9	290,2
27,0	— 2,2	289,4	10,1	1,1	291,3
40,7	— 4,5	284,9	8,1	0,8	292,1
80,0	— 14,2	270,7	4,05	1,4	293,5
99,3	— 7,2	263,5	2,02	0,7	294,2
131,0	— 12,1	251,4	0	0,8	295,0
157,2	— 9,9	241,5			

Nur sind die Veränderungen, die man durch Abziehen der Spule oder durch Hammerschlag auf die Magnetisierungsspule erzeugen kann, bedeutend kleiner und genügen vor allem nicht, die Ausbildung eines Feldes im Innern des Stabes zu verhindern. Der Entmagnetisierungsfaktor kann somit nicht in der oben angegebenen Weise bestimmt werden.

Zugleich wurde folgendes beobachtet: Der Stab zeigt nach einer magnetischen Behandlung und einmaligem Erschüttern durch Hammerschlag die Induktion von 94,7 Skt. (regelmäßige Verteilung), so veränderte sich dieser Wert durch 10maliges Zubodenfallenlassen (25 cm Höhe) auf — 163,8, wobei wieder die Verteilung regelmäßig war. Der erste Wert stellt somit keinen absoluten Gleichgewichtszustand dar, durch die viel kräftigere Erschütterung erfolgt die Umwandlung in einen neuen Gleichgewichtszustand, der eine völlige Ummagnetisierung darstellt und auf eine früher erfolgte hohe negative Magnetisierung hinweist. Tabelle 12 und Fig. 9 enthalten eine Reihe von Beobachtungen über die bei verschiedenen Feldern und Erschütterungen auftretenden Veränderungen.

Hierzu sei folgendes bemerkt: Erschütterung unter Wirkung des Feldes $i = -153$ verstärkt dessen Wirkung, die negative Magnetisierung steigt von — 223,5 auf — 256,3. Zurückgehen auf das Feld Null ergibt — 198,1; Erschüttern führt auf den kleineren Wert

Tabelle 12.

	$i \cdot 10^3$	$\Delta\beta$	β	Erschütterung	β''
	—	—	—	—	— 163,8
1.	— 158	— 59,7	— 223,5	10 Hammerschläge	— 256,3
2.	0	+ 58,2	— 198,1	10 "	— 175,7
3.	+ 158	+ 59,7	— 116,0	10 "	— 79,8
4.	0	— 57,6	— 137,4	10 "	— 158,2
5.	+ 400	+ 173,2	+ 15	10 "	107,2
6.	0	— 162,0	— 54,8	10 "	— 109,8
7.	— 80,5	— 29,3	— 139,1	10 "	— 175,4
8.	0	+ 28,8	— 147,4	10 "	— 136,2
9.	—	—	—	10 mal 25 cm	— 168,4
10.	—	—	—	10 " 25 " \perp	— 169,2
11.	—	—	—	10 " 25 "	— 172,2

— 175,7 (1. und 2.). Entsprechendes Verhalten bei positiver Magnetisierung (3.) und Zurückgehen auf Null (4.). Man ist also nahe an den Ausgangspunkt zurückgekehrt. Ein stärkeres positives Feld ($i = 400$) führt nach + 15, durch Erschüttern nach 107,2 (5.), Zurückgehen auf

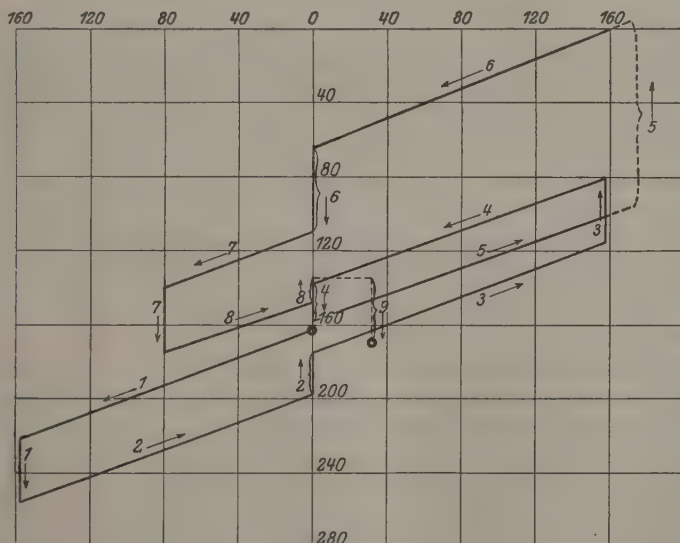


Fig. 9.

Null nach — 54,8 und Erschüttern auf — 109,8 (6.). Durch das positive Feld wird also der negative Anfangswert verkleinert. Ein kleineres negatives Feld führt dann nach — 139,1 und durch Erschüttern nach — 175,4 (7.), Zurückgehen auf Null nach — 147,4 und Erschüttern nach — 136,2 (8.). Das Erschüttern bewirkt also eine Annäherung

an den letzten Ausgangswert. Wurde nun der Stab 10 mal 25 cm fallengelassen, so daß er in seiner Länge auffiel (9.), so stieg der Wert auf $-168,4$ (9.), bei 10. fiel er auf das eine Ende auf, bei 11. waren die Pole gegenüber 10. vertauscht, um etwaige Wirkungen des Erdfeldes zu bemerken. Die Werte sind fast die gleichen.

Man braucht somit viel stärkere positive Felder, um die ursprüngliche Magnetisierung endgültig zu schwächen. Mit einem Feld von 0,8 Amp. wurde nun der Versuch wiederholt, dieses führte zu einer Induktion von $+368$ Skt., nach Erschüttern 1033 Skt. Nach Zurückgehen und Erschüttern erhielt man $+117$; nach einem kleinen negativen Zyklus $+57,3$. Durch Erschüttern (10 Schläge) $65,2$, dann nach weiteren 10 Schlägen $63,0$, dann $58,7$, nach 20 Schlägen $53,7$, nach 10 Schlägen auf den aus der Spule genommenen Stab selbst $51,0$ und bei Wiederholung $51,4$.

Zunächst trat also entsprechend dem kleinen negativen Zyklus ein Ansteigen, dann bei weiterem und kräftigerem Erschüttern ein Fallen ein. Durch 10 mal Zubodenwerfen fiel der Wert noch auf $-76,2$, d. h. es trat wieder die Ummagnetisierung ein.

Die bereits von G. Wiedemann¹⁾ beobachtete Tatsache der Möglichkeit einer völligen Ummagnetisierung ist durch die vorliegenden Beobachtungen quantitativ bestätigt worden; für die Richtung, in der die Veränderung des Magnetismus erfolgt, ist die Stärke der Erschütterung maßgebend; es kann bei schwächeren Erschütterungen zunächst ein Ansteigen und dann bei stärkeren Erschütterungen ein Fallen und sogar Negativwerden des Magnetismus eintreten. Der früher aufgestellte Satz: „Die Induktion wird durch Erschütterungen gesteigert, die Remanenz wird geschwächt“²⁾, verliert hierdurch seine Bedeutung.

2. Ummagnetisierung durch Erschüttern. Die Tatsache, daß durch kräftiges Erschüttern eines Magnetstabes eine vollständige Ummagnetisierung, d. h. Vertauschung der Pole eintrat, wurde nun eingehender untersucht, und zwar durch Messung der jeweiligen Verteilung des Magnetismus in dem Stab, d. h. durch Abziehen der Induktionsspule von verschiedenen Punkten des Stabes.

Der Stab, dessen Induktion $-51,7$ Skt. betrug, wurde dem positiven Zyklus $i = 0,695$ Amp, $i = 0$ unterworfen und ergab sodann 33 Skt., nach 10 Hammerschlägen auf die Spule 79,2. Nun wurde er herausgenommen und den in Tabelle 13 angegebenen Erschütte-

¹⁾ G. Wiedemann, Pogg. Ann. 100, 241, 1857; Die Lehre v. d. Elektrizität, Bd. 3, S. 734.

²⁾ Handb. d. Phys. 5, 334.

rungen (Fallen auf den Boden) unterworfen, wobei jedesmal die Verteilung gemessen wurde. In der linken Spalte 1 sind jeweils die Entfernungen der Spulenmitte von der Stabmitte angegeben, die übrigen Zahlen sind die gemessenen Induktionen in β .

Tabelle 13.

Lage	I. Vor Magn.	II. Nach Magn.	III. 1×10 cm	IV. 1×10 cm	V. 1×10 cm	VI. 1×10 cm	VII. 1×10 cm
8	—	—	34,2	29,1	17,8	— 3,2	— 3,6
6	—	—	39,6	33,1	19,2	— 3,8	— 4,2
4	— 45,1	75,1	41,9	34,4	18,4	— 4,0	— 4,8
2	— 48,9	78,3	40,4	32,3	16,2	— 5,2	— 6,2
0	— 51,7	79,2	37,6	29,4	13,8	— 7,3	— 7,7
— 2	— 52,0	78,1	34,2	26,1	12,0	— 9,3	— 10,2
— 4	— 49,9	74,5	28,2	23,0	10,2	— 11,5	— 11,7
— 5,5	— 47,1	—	24,9	20,6	0,0	— 12,2	— 12,7

Lage	VIII. 1×10 cm	IX. 1×10 cm	X. 2×10 cm	XI. 3×10 cm	XII. 3×10 cm	XIII. 5×10 cm
8	— 5,8	— 8,4	— 10,6	— 14,7	— 17,4	— 18,8
6	— 5,8	—	—	— 17,0	—	—
4	— 6,6	—	— 11,8	— 18,8	— 21,9	— 25,7
2	— 7,8	— 11,3	—	— 20,0	—	—
0	— 9,0	— 12,9	— 13,7	— 22,1	— 25,9	— 30,9
— 2	— 11,4	— 15,1	— 16,4	— 24,2	— 27,8	— 32,5
— 4	— 13,5	— 17,6	— 18,3	— 25,4	— 28,8	— 33,4
— 5,5	— 14,3	— 17,9	— 19,0	— 25,2	— 28,0	— 31,8

Lage	XIV. 10×10 cm	XV. 20×10 cm	XVI. 25×20 cm	XVII. 25×40 cm	XVIII. 20×100 cm	XIX. 20×100 cm
8	— 20,9	24,2	— 53,7	— 77,8	— 93,6	93,2
6	—	—	—	—	—	—
4	— 28,1	32,7	— 73,3	— 104,2	— 125,2	123,8
2	—	—	—	— 110,2	— 132,2	130,0
0	— 33,8	— 38,0	— 81	— 112,4	— 133,0	132,0
— 2	— 35,0	— 39,2	— 80,2	— 109,5	— 129,4	128,5
— 4	— 35,0	— 38,7	— 76,8	— 103,8	— 120,4	119,3
— 5,5	— 33,8	— 37,0	— 71,1	— 95,2	— 110,0	108,8

XX. 20×100 cm . . .	141,0	XXIV. 20×100 cm	124,9
XXI. 20×100 „ . . .	132,7	XXV. 20×100 „ in Erdfeld . .	122,4
XXII. 20×100 „ . . .	121,7	XXVI. 20×100 „ gegen Erdfeld	120,7.
XXIII. 20×100 „ . . .	122,9		

In Fig. 9 sind die Verteilungen nach Tabelle 13 graphisch dargestellt. Man sieht, in welcher Weise sich der Übergang zu der entgegengesetzten Magnetisierung vollzieht: während bei II. die Ver-

teilung noch vollständig regelmäßig ist, d. h. die Indifferenzzone genau in der Mitte liegt, ist sie bei III. schon nach rechts verschoben. Denkt man sich die (ausgezogene) Kurve nach rechts fortgesetzt, so würde sie (punktierter Teil) ziemlich genau in $+12,2$ die Nulllinie schneiden, ebenso nach links bei $-12,2$, doch ist die Kurve unsymmetrisch. Das gleiche gilt für alle übrigen Kurven. Man sieht deutlich,

wie besonders in den mittleren Kurven ein Wendepunkt sich ausprägt; diese Erscheinung gibt den Schlüssel zur Deutung.

Die normale Verteilung des Magnetismus in einem Stab wird bekanntlich durch

$$\delta = a(c^{-x} - c^{+x})$$

dargestellt¹⁾, wenn man mit δ die Dichte des freien Magnetismus bezeichnet, das magnetische Moment durch das Integral dieser Gleichung

$$M = b_1 - b_2(c^x + c^{-x})$$

(allgem. Kettenlinie),

wobei x der Abstand der betreffenden Stelle von der Stabmitte ist. Vgl. Kurve 2 und 18. Doch kann die Verteilung auch unsymmetrisch sein, d. h. die Dichte des freien Magnetismus an

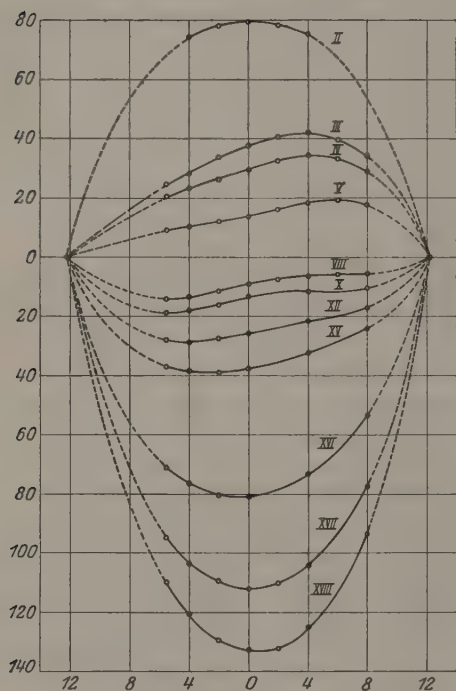


Fig. 10.

den beiden Stabenden verschieden groß oder die das magnetische Moment darstellende Kurve unsymmetrisch. Vgl. Kurve 3 oder 15.

Der Annahme, der Stab enthalte in einem gewissen Stadium der Ummagnetisierung je einen Nordpol an beiden Enden und einen rechts von der Mitte gelegenen Südpol, würde die M -Kurve, Fig. 11, entsprechen. Könnten wir die Induktion durch Abziehen einer aus einer einzigen oder sehr wenigen Windungen bestehenden, also sehr schmalen Spule hinreichend genau bestimmen, so würden wir dieselbe Kurve erhalten; hat die Spule eine endliche Länge $l_1 l_2$, so erhalten

¹⁾ Handb. d. Phys. 5, 51.

wir für die Spulenmitte einen Wert, der etwas kleiner oder größer als der wahre Wert ist, nämlich den Wert $\frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \mathfrak{B} dl$. Der experi-

mentelle Verlauf sei durch die punktierte Kurve gegeben. Wie man sieht, zeigt diese noch den gleichen Charakter wie die ursprüngliche, nur sind die Unterschiede etwas verwaschener.

Der tatsächlich beobachtete Verlauf weist nach diesen Überlegungen darauf hin, daß sich zunächst die in Fig. 11 dargestellte Verteilung ausbildet, d. h. daß an dem linken Ende sich eine Polfolge $N_1 S_1 S_2 N_2 N_3 S_3$ ausbildet¹⁾: das Entstehen des S_2 entsprechenden freien Südmagnetismus ist dann so zu erklären, daß die wenigen noch von der vorhergehenden (Süd)-Magnetisierung her vorhandenen Elementarmagnete, die durch die letzte Magnetisierung nicht umgerichtet waren, da sie die härteren Bestandteile des Eisens sind, nun eine größere Zahl der stark erschütterten weicheren Elementarmagnete umrichten. Daß die beobachtete Kurve nicht mehr die Achse innerhalb ihres Verlaufes schneidet, was bei der wahren Kurve der Fall ist, erklärt sich daraus, daß die

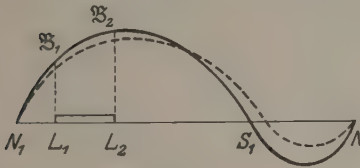


Fig. 11.

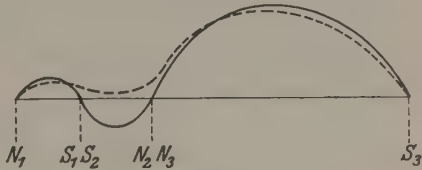


Fig. 12.

Spulenlänge bedeutend größer als $N_1 N_2$ ist. Daß die Wirkung der harten Elementarmagnete gerade an einem der Enden zuerst zur Umrichtung führt, ist darauf zurückzuführen, daß die zwischen den weicheren Elementarmagneten wirkende und sie in ihrer ersten Verteilung zu halten suchende Kraft an den Enden naturgemäß kleiner ist.

Bei weiterer Erschütterung gewinnt nun sozusagen der Teilmagnet $S_2 N_2$ an Stärke, d. h. die freien Magnetismen in S_2 und N_2 wachsen, und gleichzeitig nehmen die freien Magnetismen in N_1 und S_1 , ebenso in N_3 und S_3 ab, da von S_2 und N_2 aus immer mehr weiche Elementarmagnete umgerichtet werden. Schließlich verschwinden die Teilmagnete $N_1 S_1$ und $N_3 S_3$ vollständig.

Damit wir noch erklären können, daß die Kurve Fig. 12 bei ihrer Umwandlung in eine zu ihr symmetrische übergeht, müssen wir

¹⁾ Wir bezeichnen die „Pole“ $S_1 S_2$ und $N_2 N_3$ mit doppelten Buchstaben, da sie zu je zwei „Teilmagneten“ gehören.

annehmen, daß auch auf der rechten Seite, wenn auch vielleicht später als links noch ein weiteres Polpaar sich ausbildet, das dann zuletzt wieder verschwindet. Es sei hierbei an die Tatsache erinnert, daß man beim Zerschneiden und Wiederfestzusammenlegen eines Magnetstabes, wenn das Zerschneiden nicht gerade an der Mitte erfolgt ist, nicht nur an der Bruchstelle, sondern auch an der zu ihr symmetrischen Stelle je einen Folgepol erhält¹⁾).

Eine ausführlichere Besprechung der bei der Ummagnetisierung auftretenden eigentümlichen Verhältnisse werde ich demnächst im Zusammenhang mit Betrachtungen über die Form der Magnetisierungskurve geben. Daß für den jeweils auftretenden Magnetismus vor

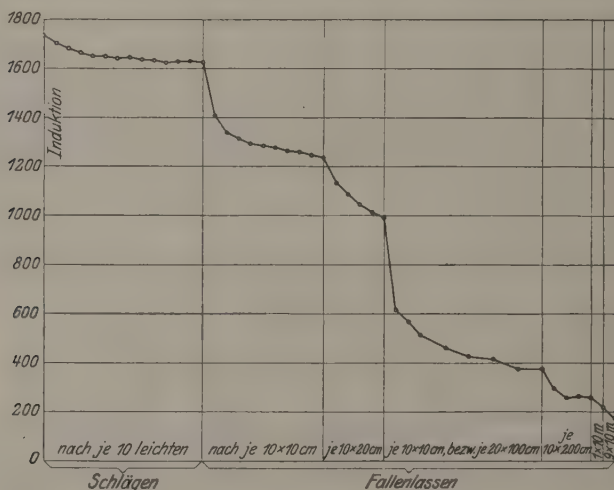


Fig. 13.

allem die „Härte“, d. h. die größere oder kleinere Beweglichkeit der Elementarmagnete von bestimmendem Einfluß ist, dürfte aus den beschriebenen Versuchen klar sein.

Wir müssen also folgern: Beim Anlegen eines bestimmten magnetischen Feldes werden je nach dessen Größe und dem bereits bestehenden magnetischen Zustand verschieden harte Bestandteile des Eisens beeinflußt. Durch Erschüttern kann die Wirkung des Feldes unterstützt werden, d. h. wenn die Wirkung des Feldes in einem Ausrichten der weichsten Bestandteile bestand, so wird diese durch Erschüttern vermehrt. Bei Weich- und Siliciumeisen ist diese ver-

¹⁾ Lloyd, Electrician 34, 104, 1894.

stärkende Wirkung so stark, daß die Ausbildung eines Feldes im Magnet selbst rückgängig gemacht wird bzw. bei ständigem Erschüttern unterbleibt. Erschüttern beim äußeren Feld Null sucht zunächst die weichen Bestandteile wieder in den Zustand möglicher Unordnung überzuführen. Geraten diese hierbei aber unter den Einfluß härterer noch von früher her gerichteter Bestandteile, so kann eine Umrichtung erfolgen, die sich in einer vollständigen Ummagnetisierung bemerkbar macht. Dies wird bei mittelhartem Stahl besonders deutlich hervortreten, wenn die Erschütterung stark genug ist. Ist durch gehäufte Wiederholung einer Erschütterung bestimmter Stärke eine weitere Veränderung der Magnetisierung nicht mehr zu erreichen, so treten Schwankungen um den Endwert ein, eine stärkere Erschütterung bewirkt dann aber leicht eine weitere Veränderung. Es sei hierfür noch folgendes Beispiel gegeben. Die vorige mittelharte Stahlsorte wurde im Koepselapparat magnetisiert und zeigte danach eine Induktion von 1738 Skt.

Tabelle 14.

Behandlung	Induktion	Behandlung	Induktion
—	1738	Fall 10×10 cm	1246
10 leichte Schläge	1704	"	1233
"	1685	Fall 10×20 cm	1133
"	1665	"	1089
"	1652	"	1047
"	1650	"	1016
"	1643	"	995
"	1647	Fall 10×100 cm	616
"	1639	"	567
"	1634	"	512
"	1622	Fall 20×100 cm	460
"	1630	"	425
"	1630	"	413
"	1628	"	387
Fall 10×10 cm	1408	"	386
"	1338	Fall 10×200 cm	294
"	1311	"	254,7
"	1291	"	261,4
"	1284	"	258,4
"	1278	Fall 1×10 m	218,7
"	1263	Fall 9×10 m	172,8
"	1258		

Man sieht aus der Tabelle 14 und der Kurve 13 deutlich, wie bei jeder Erschütterungsart die Induktionswerte zuerst rasch, dann langsamer bei wiederholter Erschütterung fallen, um sich einem Grenzwerte anzunähern; eine neue, stärkere Erschütterung bewirkt wieder zunächst ein stärkeres Fallen usw.

3. Vergleichende Übersicht über die Anfangspermeabilitäten verschiedener Stahlsorten, insbesondere verschiedener Nickelstahle.

Die folgenden Tabellen ergeben einen Überblick über die an verschiedenen Stahlsorten angestellten Messungen. Außer an dem

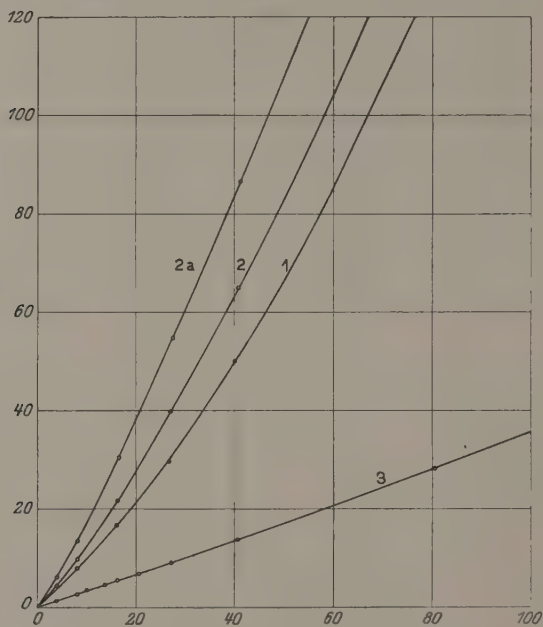


Fig. 14.

bereits oben untersuchten Weicheisen und dem 5proz. Siliciumstahl in abgeschrecktem und geglühtem Zustande, wurden folgende Sorten

Tabelle 15.

Bezeichnung	Länge	Durchmesser	Ni %
EF 29 0	27,4	0,602	1,54
Br 10	27,3	0,601	9,5
Br 20	27,2	0,604	19,2
Br 26	27,3	0,601	26,2
Br 29	27,1	0,597	29,0
Br 30	27,5	0,591	30,0
Br 30 +	27,0	0,592	30,4
Br 30 1	27,4	0,594	30,3
Br 30 3	27,3	0,593	30,0
Br 30 5	27,4	0,594	30,9
Br 36	27,1	0,603	35,4

untersucht, deren Dimensionen und Nickelgehalt aus der Tabelle 15 ersichtlich ist.

Tabellen 16 bis 37 enthalten die Messungsergebnisse, die zum Teil in den Fig. 14 und 15 wiedergegeben sind. In Fig. 14 bezieht sich die Kurve Nr. 1 auf Weicheisen, für das die Zahlen bereits oben

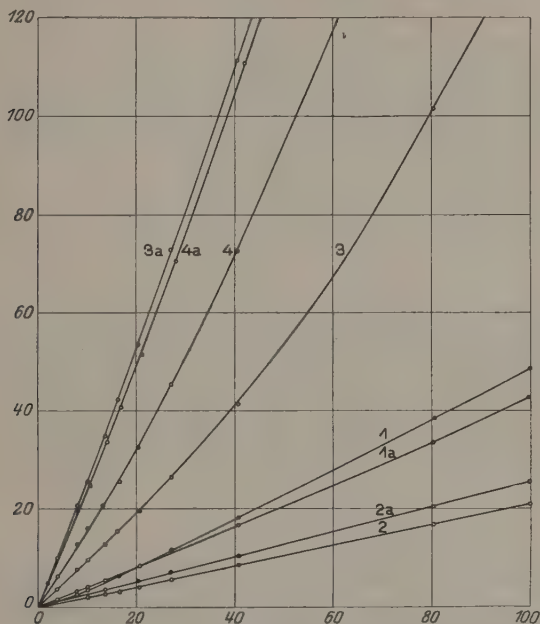


Fig. 15.

mitgeteilt sind. Alle Proben wurden vor der Messung erschüttert; die Anfangsremanenzen teilen wir, da für unsere Messung belanglos, nicht mit.

Tabelle 16.

5proz. Si-Stahl $l = 27,0$, $d = 6,01$ bei 1070^0 abgelöscht. Fig. 17, Kurve Nr. 2.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	1,0	1,0	27,2	18,0	39,9
2,05	1,1	2,1	40,8	25,0	64,9
4,1	2,3	4,4	80,4	84,5	149,4
8,2	5,4	9,8	100,0	43,8	193,2
16,4	12,1	21,9			

Tabelle 17.

5proz. Si-Stahl $l = 27,0$, $d = 6,01$ bei 800^0 gegläht. Fig. 14, Kurve Nr. 2a.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	1,5	1,5	16,7	16,8	30,4
2,05	1,5	3,0	27,6	24,2	54,6
4,1	3,2	6,2	41,2	31,9	86,5
8,2	7,4	13,6	81,3	95,5	182,0

Tabelle 18. EF 29 0. Fig. 14, Kurve Nr. 3.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	0,7	0,7	16,3	0,9	5,6
4,05	0,6	1,3	20,6	1,3	6,9
8,1	1,4	2,7	27,1	2,2	9,1
10,1	0,8	3,5	40,8	4,8	13,9
13,7	1,2	4,7	80,5	14,3	28,2

Tabelle 19. Br 10. Fig. 15, Kurve Nr. 1.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	0,3	0,3	16,6	1,4	6,6
2,0	0,4	0,7	20,8	1,9	8,5
4,05	0,9	1,6	27,2	3,2	11,7
8,1	1,0	2,6	40,9	6,6	18,3
10,2	0,9	3,5	80,6	20,1	38,4
13,9	1,7	5,2	100,0	10,1	48,5

Tabelle 20. Br 10, bei 800^0 gegläht. Fig. 15, Kurve Nr. 1a.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,01	0,4	0,4	16,3	1,1	6,6
2,02	0,4	0,8	20,5	1,7	8,3
4,05	0,8	1,6	27,0	2,8	11,1
8,1	1,7	3,3	40,7	5,6	16,7
10,2	0,9	4,2	80,2	17,0	33,7
13,7	1,3	5,5	99,7	9,0	42,7

Tabelle 21. Br 20. Fig. 15, Kurve Nr. 2.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	0,2	0,2	16,6	0,5	3,2
2,05	0,2	0,4	20,8	0,9	4,1
4,1	0,5	0,9	27,2	1,7	5,8
8,2	0,9	1,8	40,9	2,8	8,6
10,2	0,3	2,1	80,4	3,3	16,9
13,8	0,6	2,7	100,0	4,1	21,0

Tabelle 22. Br 20, bei 800⁰ gegläht. Fig. 15, Kurve Nr. 2a.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	0,5	0,5	27,0	1,7	7,2
4,05	0,5	1,0	40,7	3,2	10,4
8,1	1,0	2,0	80,2	9,9	20,3
13,7	1,8	3,8	99,7	5,1	25,4
20,4	1,7	5,5			

Tabelle 23. Br 26.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
27,8	1,8	1,8
41,5	0,7	2,5
82,0	2,5	5,0

Tabelle 24. Br 29. Fig. 15, Kurve Nr. 3.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	0,9	0,9	16,2	2,7	15,6
2,0	1,0	1,9	20,8	3,9	19,5
4,05	1,9	3,8	27,1	7,0	26,5
8,1	3,9	7,7	40,8	14,9	41,4
10,1	2,0	9,7	80,2	60,1	101,5
13,8	3,2	12,9	99,9	36,0	137,5

Tabelle 25. Br 29, bei 800⁰ gegläht. Fig. 15, Kurve Nr. 3a.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	5,0	5,0	20,5	11,2	53,5
4,05	5,0	10,0	27,1	19,2	72,7
8,1	10,7	20,7	40,7	38,7	111,4
10,2	5,2	25,9	80,0	112,4	223,8
13,7	9,1	35,0	99,8	51,5	275,5
16,3	7,3	42,3			

Tabelle 26. Br 30, bei 700⁰ gegläht.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	2,1	2,1	16,5	6,5	36,9
2,0	2,1	4,2	20,9	10,0	46,0
4,05	4,4	8,6	27,2	17,8	64,7
8,1	9,1	17,7	41,0	37,7	102,4
10,2	4,8	22,5	80,9	118,2	220,6
13,9	7,9	30,4	100,3	58,6	279,3

Tabelle 27. Br 30, bei 800° geglüht¹⁾.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	2,4	2,4	10,2	5,1	25,3
2,0	2,4	4,8	13,9	9,0	34,3
4,05	5,1	9,9	16,6	7,3	41,6
8,1	10,3	20,2	20,8	11,1	32,3

Tabelle 28. Br 30 +.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	0,8	0,8	27,2	9,0	22,3
2,05	0,8	1,6	40,8	11,8	34,1
4,1	1,7	3,3	80,5	39,6	73,7
8,2	3,3	6,6	100,1	21,0	94,7
16,4	6,7	13,3			

Tabelle 29. Br 30 +²⁾, bei 800° geglüht.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,6	4,9	4,9	25,4	18,3	52,2
5,1	4,8	9,7	33,9	22,0	74,2
10,2	10,0	19,7	50,6	49,4	123,6
17,2	14,2	33,9	100,6	151,9	275,5

Tabelle 30. Br 30 1. Fig. 15, Kurve Nr. 4.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	3,2	3,2	20,5	7,0	32,6
4,05	3,2	6,4	27,0	12,6	45,2
8,1	6,5	12,9	40,6	27,3	72,5
10,2	3,2	16,1	80,2	93,3	165,8
13,2	4,7	20,8	99,7	47,7	213,5
16,7	4,8	25,6			

Tabelle 31. Br 30 1³⁾, bei 800° geglüht. Fig. 15, Kurve Nr. 4a.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	2,4	2,4	17,0	7,0	40,7
2,05	2,4	4,8	21,2	10,8	51,5
4,1	4,9	9,7	28,0	19,0	70,5
8,2	10,2	19,9	42,0	40,4	110,9
10,8	5,0	24,9	82,7	126,8	237,7
14,1	8,8	33,7	102,5	60,9	298,6

¹⁾ Hier wurde ein Stab von den Dimensionen $l = 27,4$, $d = 0,601$ benutzt.²⁾ Hier wurde ein Stab von den Dimensionen $l = 27,4$, $d = 0,593$ benutzt.³⁾ Dimensionen: $l = 27,5$, $d = 0,594$.

Tabelle 32. Br 30 3.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	4,0	4,0	27,0	14,9	56,3
4,05	4,0	8,0	40,6	32,0	88,3
8,1	8,1	16,2	80,2	111,2	199,5
13,2	11,0	27,2	99,7	57,9	257,4
20,5	14,2	41,4			

Tabelle 33. Br 30 3¹⁾, bei 800° gegläht.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	2,2	2,2	27,9	26,7	64,6
2,05	2,2	4,4	41,7	36,2	100,8
4,1	4,5	9,9	82,8	119,0	219,8
8,2	9,2	19,1	102,2	60,0	279,8
16,8	18,8	37,9			

Tabelle 34. Br 30 5.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
2,0	3,0	3,0	27,0	12,1	45,7
4,05	3,1	6,1	40,6	26,0	71,7
8,1	6,6	12,7	80,2	86,7	158,4
13,2	9,1	21,8	99,7	43,4	201,8
20,5	11,8	33,6			

Tabelle 35. Br 30 5²⁾, bei 800° gegläht.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,02	2,2	2,2	27,8	27,8	66,3
2,05	2,3	4,5	41,5	37,6	103,9
4,1	4,7	9,2	82,1	122,9	226,8
8,2	9,5	18,7	102,0	61,8	288,6
16,8	19,8	38,5			

Tabelle 36. Br 36.

Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$	Δi	$\Delta \beta$	$\Sigma \Delta \beta$
1,0	1,1	1,1	16,2	3,0	18,2
2,0	1,2	2,3	20,8	4,5	22,7
4,05	2,3	4,6	27,1	7,7	30,4
8,1	4,7	9,3	40,8	15,4	45,8
10,1	2,2	11,5	80,2	48,5	94,3
13,8	3,7	15,2	99,9	25,1	119,4

¹⁾ Dimensionen: $l = 27,4$, $d = 0,593$.²⁾ Dimensionen: $l = 27,4$, $d = 0,595$.

Tabelle 37. Br 36, bei 800° gegläut.

2,0	5,0	5,0	27,1	17,2	68,0
4,05	5,0	10,0	40,7	34,9	102,9
8,1	10,0	20,0	80,2	108,7	211,6
13,7	13,8	33,8	99,8	97,2	308,8
20,5	17,0	50,8			

Aus dem Dimensionsverhältnis ergibt sich nach Mann (vgl. Gumlich, Magn. Messungen) der Entmagnetisierungsfaktor; nach den oben angegebenen Formeln kann μ' (die ungescherte A.-P.) und die A.-P. μ berechnet werden. In Tabelle 38 geben wir eine Übersicht über die Ergebnisse, wobei der fast unmagnetische Br 26 wegliebt und die übrigen nach steigenden μ geordnet sind.

Zugleich geben wir noch die am Koepselapparat gemessenen wahren Remanenzen und Koerzitivkräfte, sowie die Induktion für $\mathfrak{H} = 400$ an.

Tabelle 38.

Sorte	$\left(\frac{d\beta}{d\mathfrak{H}}\right)_0$	μ'	μ	R	K	B_{400}
Br 20	200	37	30	7000	41,0	12800
Br 20 gegl.	250	46	40	6500	33,4	12600
EF 29 0	330	64	65	10000	13,6	18750
Br 10	350	66	65	8750	19,8	17500
Br 10 gegl.	400	75	75	8500	24,7	18200
Br 30 +	800	139	175	3200	3,7	7600
Br 29	900	172	230	1300	1,6	3700
Si-Stahl abgel.	1000	188	260	4150	2,5	(17500) ₁₆₀
Weicheisen	1000	192	275	10050	1,85	
Br 36	1100	205	310	6050	4,6	13000
Si-Stahl gegl.	1500	282	545	6900	1,3	(18300) ₁₆₀
Br 30 5	1500	288	545	1750	1,0	5600
Br 30 1	1600	307	620	1600	etwa 0,8	4500
Br 30 + gegl.	1890	376	990	2100	1,5	7100
Br 30 3	2000	386	1110	1600	1,0	5050
Br 30 700° gegl.	2100	407	1280	1425	etwa 0,8	5150
Br 30 3 gegl.	2200	426	1420	1625	" 0,8	5200
Br 30 5 gegl.	2200	423	1480	1525	" 0,9	5200
Br 30 1 gegl.	2400	460	1970	1250	" 0,5	4600
Br 30 800° gegl.	2400	452	2020	1500	" 0,7	5550
Br 29 gegl.	2500	475	2030	675	" 0,3	3300
Br 36 gegl.	2450	459	2420	4200	" 1,0	12600

Aus der Tabelle 38 ist folgendes zu entnehmen:

1. Die A.-P. ist in allen Fällen durch Glühen bedeutend vergrößert worden.

2. Die A.-P. nimmt mit steigendem Nickelgehalt zunächst ab; sie ist bei Br 20 kleiner als bei Br 10; Br 26 ist nahezu unmagnetisch; bei 29 bis 36 Proz. Nickelgehalt ist die A.-P. groß, und zwar für

ungeglühtes Material von der Größenordnung 200 bis 1600, für ge-
glühtes von 1000 bis 2400.

3. Für die Nickelstähle gilt annähernd das Gesetz: die A.-P.
wächst mit dem Quotienten: Remanenz durch Koerzitivkraft.

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Bestimmung der Koerzitiv-
kraft mit dem Koepselapparat für Koerzitivkräfte kleiner als Eins
relativ ungenau ist; gleichzeitig wird aber auch die Berechnung der
A.-P. um so ungenauer, je größer ihr Wert ist. Dies geht aus obiger
Formel 5a deutlich hervor. Der Entmagnetisierungsfaktor ist nämlich
nur angenähert bekannt (vgl. die obigen Ausführungen), und kleine
prozentuelle Fehler im Entmagnetisierungskoeffizienten verursachen
bedeutende prozentuelle Fehler in μ .

Es wurde aus diesem Grunde für die Stahlsorte, die die größte
A.-P. ergeben hatte, eine Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors
nach der oben angegebenen Methode vorgenommen; die Ergebnisse
sind in Tabelle 39 enthalten.

Tabelle 39.

i	$\Delta\beta$	β	β''	i	$\Delta\beta$	β	β''
0	0	0	9,8	20,9	9,9	71,0	74,8
1,0	2,4	12,2	12,4	27,5	16,5	91,3	97,0
2,0	2,5	14,9	16,0	41,2	33,5	130,5	141,7
4,05	5,0	21,0	22,0	27,5	— 33,5	108,2	100,0
8,1	10,0	32,0	34,6	20,9	— 17,0	83,0	78,6
10,2	5,0	39,6	41,8	10,2	— 25,2	53,4	46,2
13,9	8,2	50,0	52,6	0	— 25,7	20,5	12,7
16,7	6,2	58,8	61,1				

Zeichnet man aus dieser Tabelle die Kurve analog Figur 6
oder 7, so liegen die β'' -Punkte sehr genau auf einer Geraden, deren
Neigung durch $\operatorname{ctg} \alpha = 0,3124$ gegeben ist. Hieraus berechnet sich N
zu 0,00167, während für die obige Berechnung von μ der aus den
Mann-Gumlichschen Tabellen interpolierte Wert 0,00176 zugrunde
gelegt wurde. Berechnet man μ mit $N = 0,00167$, so erhält man
 $\mu = 2000$, während sich aus $N = 0,00176$ $\mu = 2420$ ergeben hatte.

Weitere Versuche zur genaueren Bestimmung der A.-P. sollen
im Zusammenhang mit der Bestimmung des Entmagnetisierungsfak-
tors, dann aber auch an ellipsoidförmigen Stäben vorgenommen
werden.

Zusammenfassung.

1. Die Anfangspermeabilität wurde für den Fall untersucht, daß
die Probe noch remanenten Magnetismus enthält, und der Zusammen-
hang zwischen A.-P. und Remanenz aufgeklärt.

2. Der remanente Magnetismus kann durch Erschütterungen je nachdem vergrößert oder verkleinert werden. Bei nicht zu weichen Eisensorten kann durch geeignete Erschütterungen eine Ummagnetisierung erfolgen.

3. Die Ummagnetisierung wurde quantitativ verfolgt.

4. Bei weichen Eisensorten entsteht bei Magnetisierung unter gleichzeitiger Erschütterung im Innern der Probe kein Feld, solange die äußeren Feldstärken klein sind. Die Magnetisierungskurve ist die ideale (Steinhaus und Gumlich). Hieraus ergibt sich eine Methode zur Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors.

5. 29- bis 36proz. Nickelstähle haben, besonders im geglühten Zustande, eine A.-P. von der Größenordnung 1000 bis 2000, also zwei- bis viermal so groß als 5proz. Siliciumstahl, der bisher die höchsten Werte der A.-P. aufwies. Da gleichzeitig der spez. Widerstand dieser Nickelstähle groß ist, dürften sie für manche technische Zwecke, z. B. der Telephonie und Telegraphie, den Vorzug vor anderen Stahlsorten verdienen.

Versuchsanstalt der F. Krupp A.-G., Essen.

Experimentelle Beiträge zur Strömung von Flüssigkeiten in Röhren.

Von Clemens Schaefer und Georg Heisen in Marburg.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1922.)

§ 1. Bereits Hr. v. Kármán¹⁾ hat das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit benutzt, um gewisse Schlüsse, die Bose und Rauert²⁾ aus ihren Messungen gezogen hatten, richtig zu stellen. Desgleichen haben G. Frankenberg und ich³⁾ dieses Prinzip zur Diskussion ausgedehnter und wertvoller Beobachtungen von Sorkau⁴⁾ benutzt. Es ergab sich, daß mit Hilfe dieses Prinzips sich die von Sorkau beobachteten Tatsachen, die vorher zum Teil paradox erschienen, verstehen und im großen und ganzen berechnen ließen, jedoch zeigten sich auch deutlich quantitative Abweichungen zwischen Experiment und Theorie. Schaefer und Frankenberg betonten damals bereits, daß dies vermutlich daran liege, daß sie genötigt waren, zur Berechnung notwendige Konstanten, z. B. die Zähigkeiten, ihre Temperaturkoeffizienten, die Dichten und die Ausdehnungskoeffizienten der von Sorkau untersuchten Stoffe, aus Tabellenwerken zu entnehmen, da Sorkau die genannten Größen nicht an seinem Material bestimmt hatte. Es erschien uns daher immerhin nicht überflüssig, die Strömungsversuche Sorkaus noch einmal mit einem bestimmten Material zu wiederholen und an diesem Material alle in Betracht kommenden Größen genau zu bestimmen, um dann die Ergebnisse von Theorie und Experiment exakter miteinander vergleichen zu können.

§ 2. Bezeichne \bar{u} die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, r den Rohrradius, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, μ ihre innere Reibung, so nennt man bekanntlich das dimensionslose Aggregat

$$R = \frac{r \varrho}{\mu} \bar{u} \quad (1)$$

den „Reynoldsschen Parameter“. Für kleine Werte desselben hat man „laminare“, für große sogenannte „turbulente“ Strömung. Ist ferner Δp die Druckdifferenz am Ende der Meßstrecke l , so gilt für die Laminarströmung das Poiseuillesche Gesetz:

$$\Delta p = \frac{8\mu l}{r^2} \bar{u}, \quad (2)$$

¹⁾ v. Kármán, Phys. ZS. **12**, 283, 1911.

²⁾ Bose und Rauert, Phys. ZS. **12**, 126, 1911.

³⁾ Schaefer und Frankenberg, ebenda **14**, 89, 1913.

⁴⁾ Sorkau, ebenda **13**, 805, 1912.

für die turbulente Strömung dagegen die Blasius'sche Formel:

$$\Delta p = \frac{0,1582}{2\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{\frac{\mu Q^3}{r^5}} l \bar{u}^{1,75}. \quad (3)$$

Ersetzen wir \bar{u} durch das ihm proportionale $\frac{1}{t}$, wo t die Durchflußzeit eines bestimmten Flüssigkeitsquantums Q bedeutet ($\bar{u} \cdot r^2 \pi \cdot t = Q$), so lassen sich (2) und (3), wenn noch Δp durch Π (Triebdruck) bezeichnet wird, in die Form bringen:

$$\Pi = A_P \frac{1}{t}, \quad (2a)$$

$$\Pi = A_T \left(\frac{1}{t}\right)^{1,75}, \quad (3a)$$

wo A_P und A_T leicht erkennbare Abkürzungen sind, deren Indizes P und T auf Poiseuilleschen und turbulenten Zustand hindeuten sollen. In einem Koordinatensystem, in dem $x = \log \Pi$ und $y = \log \left(\frac{1}{t}\right)$ gesetzt ist, haben die beiden Gleichungen also die Gestalt:

$$y = -\log A_P + x, \quad (2b)$$

$$y = -\frac{\log A_T}{1,75} + \frac{x}{1,75}, \quad (3b)$$

die beide Gerade darstellen, die unter verschiedenen Winkeln gegen die Abszissenachse geneigt sind; ihr Durchschnittspunkt bezeichnet den Übergang von der laminaren in die turbulente Strömung.

Die Versuche von Sorkau und ebenfalls die unten zu besprechenden unserigen sind unter etwas anderen Bedingungen angestellt, als sie den obigen Gleichungen entsprechen: Wir verstehen unter Π den gesamten Triebdruck, unter dem die Flüssigkeit aus dem Vorratsgefäß in eine Kapillare ausströmt. In diesem Falle treten an Stelle der Gleichung (2) und (3) die folgenden:

$$\Pi = \frac{8\pi l}{r^2} \bar{u} + f \cdot \frac{Q}{2} \bar{u}^2, \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{0,1582}{2\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{\frac{\mu Q^3}{r^5}} l \bar{u}^{1,75} + f \cdot \frac{Q}{2} \bar{u}^2, \quad (5)$$

wo f eine Funktion von $\left(\frac{lR}{r}\right)$ ist, wie Schiller¹⁾ angegeben hat. Diese Korrektur trägt dem Umstande Rechnung, daß die Flüssig-

¹⁾ Schiller, zitiert in der nachfolgend zitierten Arbeit, S. 524.

keit mit einer erheblichen kinetischen Energie aus der Kapillare herausfließt, was natürlich auch auf Rechnung des Triebdruckes zu setzen ist.

Trägt man in diesem Falle, wo also Π der gesamte Triebdruck ist, die Messungen in dem obigen logarithmischen Koordinatensystem auf, so erhält man tatsächlich — d. h. als rein empirisches Faktum gewertet — zwischen der Poiseuilleschen Geraden (die unter dem Winkel von 45° gegen die x -Achse geneigt ist) und der eigentlichen Turbulenzgeraden noch geradlinige Zwischenpartien, die sich gleichfalls auf die Form bringen lassen:

$$y = -\log C + \frac{1}{n} \log \Pi, n > 1. \quad (6)$$

Sorkau hat nun, worauf Schiller und Kirsten¹⁾ hingewiesen haben, den Irrtum begangen, dieses System von Geraden folgendermaßen zu interpretieren: Während die erste Gerade, die sehr kleinen Werten des Reynoldsschen Parameters entspricht und die unter dem Winkel von 45° gegen die Abszissenachse geneigt ist, zutreffend als Poiseuillesche Gerade bezeichnet wird, faßt er bereits die zweite, die unter einem kleineren Winkel gegen die x -Achse geneigt ist, was durch das Merklichwerden des Gliedes $f \cdot \frac{\rho}{2} u^2$ bewirkt wird, als Turbulenzgerade auf, da ihr ein Wert $n > 1$ entspricht. Demgemäß unterscheidet Sorkau mehrere Turbulenzstadien I, II, III, von denen erst das letzte (III) die wirkliche Turbulenz darstellt, während die sogenannte Turbulenz I und II lediglich Laminarbewegungen sind, bei denen sich nur das Korrektionsglied immer mehr bemerklich gemacht hat, das von Sorkau nicht beachtet wurde. Dieser unrichtigen Auffassung hatten sich übrigens auch Schaefer und Frankenberg in ihrer genannten Note angeschlossen.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß im Gegensatze dazu die Auffassung von Schiller und Kirsten das Richtige trifft. Da wir indessen bei unseren Messungen eine ähnliche Versuchsanordnung wie Sorkau benutzt haben und infolgedessen auch bei uns die der scheinbaren Turbulenz I und II entsprechenden geraden Zwischenstücke auftreten, so wollen wir im folgenden die an sich unrichtige Bezeichnung „Turbulenz I“ der Kürze halber doch beibehalten, um ein bestimmtes Gebiet kurz zu kennzeichnen. Denn für uns wesentlich ist im folgenden lediglich die Tatsache, daß sich an das erste Stück der Poiseuilleschen Geraden ein weiteres gerad-

¹⁾ Schiller und Kirsten, Phys. ZS. **22**, 523, 1921.

liniges Stück anschließt, das der Gleichung (6) gehorcht, mit einem Werte $n > 1$.

Nun liefert in bekannter Weise¹⁾ das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit für die Konstante C in Gleichung (6) die Darstellung:

$$C = B \left(\rho^{\frac{n-1}{n}} \cdot \mu^{\frac{2-n}{n}} \right), \quad (7)$$

wenn B eine Konstante ist. Macht man also mit der gewählten Flüssigkeit — bei uns war es Chloroform — Messungen bei verschiedenen Temperaturen, so ist durch die Gleichung (7) nach dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit die Temperaturabhängigkeit von C zurückgeführt auf die von ρ (Dichte) und μ (Zähigkeit). Diese Abhängigkeit wird im folgenden geprüft, indem, wie in § 1 auseinanderzusetzen, alle Bestimmungen an einer und derselben Substanz ausgeführt worden sind.

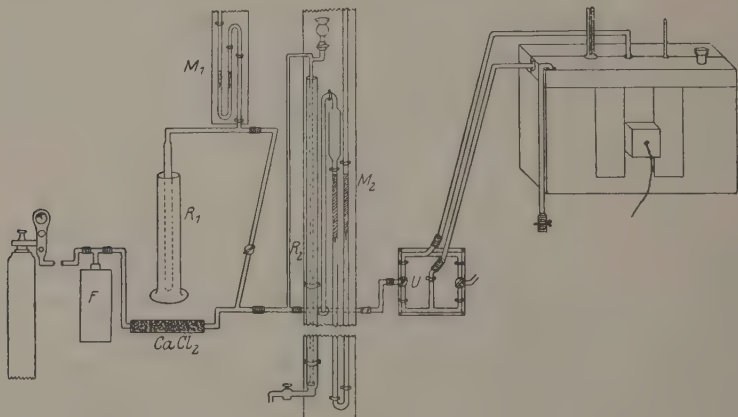


Fig. 1.

§ 3. Unsere Versuchsanordnung wird durch die Fig. 1 dargestellt.

Der Überdruck wurde geliefert durch eine mit Reduzierventil versehene CO_2 -Bombe, hinter die noch zur Vermeidung von kleinen Druckschwankungen eine eiserne, starkwandige, alte Quecksilberflasche F geschaltet war; dann folgte ein CaCl_2 -Rohr, und dann ging die Leitung zum Hg-Manometer M_2 , dem ein Hg-Druckregler R_2 nach Art einer Mariotteschen Flasche parallel geschaltet war. Zur Messung kleiner Drucke, wie sie zur Erzeugung kleiner Strömungsgeschwindigkeiten notwendig waren, diente ein durch einen Hahn einschaltbares Wassermanometer M_1 , das gleichfalls mit einem Druck-

¹⁾ Vgl. z. B. Schaefer und Frankenberg, l. c.

regler R_1 versehen war. Hinter dem Manometer lag ein mit zwei Dreiweghähnen versehener Luftstromumschalter, ähnlich wie ihn Sorkau benutzt hat, und von da führte die Leitung zu dem eigentlichen Reibungsgefäß, das in Fig. 2 besonders dargestellt ist. Um die Temperatur der im Reibungsgefäß befindlichen, zu untersuchenden Flüssigkeit konstant halten zu können, war es mit einem Glasgefäß von $30 \times 50 \times 18 \text{ cm}^3$ umgeben, das mit Wasser gefüllt war. Das Glasgefäß stand auf einer Steinkonsole, hatte eine starke Filz- und Watteunterlage, und war mit einem starken Pappkasten umgeben, der mit passendem Fenster, zur Beobachtung des Reibungsrohrs vom Fernrohr aus, versehen war. Der Raum zwischen Glasgefäß und Pappkasten war mit einer fest gepackten Watteschicht von 3 cm Dicke ausgefüllt und isolierte befriedigend gegen Temperaturänderungen. Vor den erwähnten Fensterausschnitten war durch eine aufgekittete Glasplatte wenigstens eine Luftschicht zur Wärmeisolation geschaffen. Der Deckel war zweiteilig, mit einer ebenfalls 3 cm dicken Watteschicht gefüllt, und ließ die nötigen Öffnungen für Wasserfüllung, Wasserablaßheber, Thermometer, Rührer und Zuleitungsrohre zum Reibungsapparat. Das im Dunkeln befindliche Reibungsgefäß wurde durch eine 3-Voltlampe durch den Fensterausschnitt beleuchtet.

Da Untersuchungen bei verschiedenen Temperaturen angestellt werden mußten, so war in das Glasgefäß eine elektrische Heizvorrichtung eingebaut, die es gestattete, in relativ kurzer Zeit die Wassermenge von etwa 25 Litern auf die jeweils gewünschte Temperatur zu bringen. Die Vorrichtung bestand einfach aus einem vier-eckigen Rahmen aus Stabglas, auf den ein 350 cm langer und 0,4 mm dicker Konstantandraht gewickelt war. Dieser so erhaltene Heizkörper lag unmittelbar auf dem Boden des Wassergefäßes; die Drahtzuleitungen waren in Glasrohre eingekittet und unter dem Gefäßdeckel hindurchgeführt. In die Leitung war außer zwei regulierbaren Rahmenwiderständen ein Glühlampenwiderstand eingeschaltet; zum Anheizen wurde ein Strom von 10 bis 12 Amp., zum langsamen Nachheizen ein solcher von 0,1 bis 1 Amp. gebraucht.

Die Gestalt des eigentlichen Reibungsgefäßes ist aus Fig. 2 nebst den Ausmaßen ersichtlich; der Inhalt jedes Schenkels von der oberen bis zu der unteren Marke betrug 45 cm; außerdem war noch eine

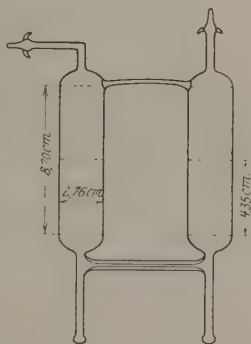


Fig. 2.

mittlere Marke vorhanden; der Radius der Kapillaren betrug nach genauer Messung 0,033 cm; wichtig für das Folgende ist noch die Konstatierung der Tatsache, daß das Reibungsgefäß sich erst allmählich in die Kapillare verengt, daß also beim Einfluß in diese voraussichtlich keine größeren Störungen entstehen: Turbulenz ist daher erst bei relativ hohen Werten des Reynoldsschen Parameters R zu erwarten.

Die Arbeitsmethode war folgende: Ein Beobachter saß am Fernrohr und stoppte die Durchflußzeiten von der unteren Marke im rechten Rohre bis zur mittleren Marke bzw. bei höheren Drucken bis zur oberen Marke. Der andere Beobachter stellte am Reduzierventil den Druck ein, stellte am Druckregler den gewünschten Druck genau ein, beobachtete Wasser- und Quecksilbermanometer, bediente die Umschaltbähne und kontrollierte die Temperaturkonstanz des Wasserbades.

Für wertvolle Hilfe bei den Messungen sind wir Herrn cand. phil. Jaenicke zu Dank verpflichtet.

§ 4. Wie aus den früheren Darlegungen hervorgeht, mußten wir bei unserer Untersuchungssubstanz Chloroform, das von C. A. F. Kahlbaum bezogen war, sowohl die Dichte ρ , den Ausdehnungskoeffizienten α , als auch die Zähigkeit μ und ihren Temperaturkoeffizienten bestimmen.

Die Dichte ρ bei Zimmertemperatur ($14,4^{\circ}\text{C}$.) wurde mit einem etwa 40 cc m fassenden Pyknometer bestimmt, das ein in Zehntelgrade eingeteiltes Thermometer trug. Es ergab sich:

$$\rho_{14,4} = 1,4874.$$

Der kubische Ausdehnungskoeffizient α wurde in einem nach Angabe von Ostwald¹⁾ konstruierten Dilatometer bestimmt. Es ergaben sich so folgende Werte für α , die mit der Temperatur selbst ansteigen (Tab. 1):

Tabelle 1.

Temp.-Interv.	α
15—25° C	0,00 123
25—35	0,00 131
35—45	0,00 132
45—55	0,00 138

Damit berechnen sich folgende Werte der Dichten des Chloroforms als Funktion der Temperatur (Tab. 2):

¹⁾ Ostwald-Luther, S. 164, Fig. 107a, 1902.

Tabelle 2.

Temperatur	ϱ
15° C	1,4864
20	1,4772
25	1,4677
30	1,4576
35	1,4483
40	1,4388
45	1,4297
50	1,4178
55	1,4085

Tabelle 3.

Temperatur	μ
15° C	0,006029
20	5935
25	5571
30	5290
35	5110
40	4962
45	4742
50	4509
55	4344

Trägt man ϱ als Funktion der Temperatur auf, so erhält man praktisch einen linearen Anstieg mit der Temperatur.

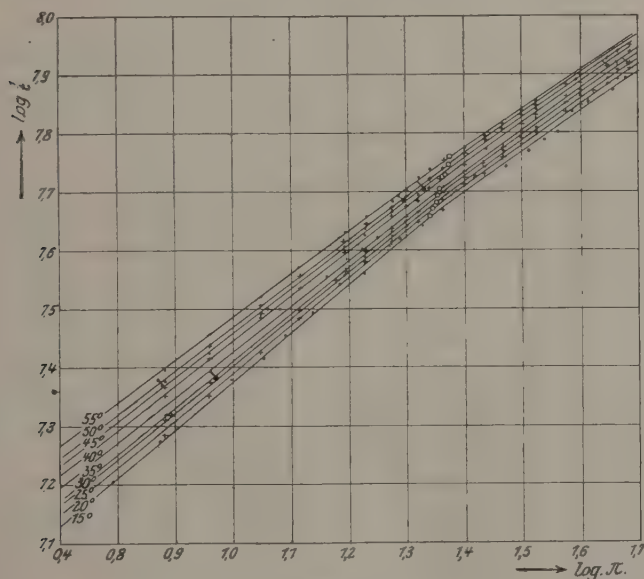


Fig. 3.

Die Zähigkeit μ des Chloroforms wurde mit Hilfe eines Viskosimeters nach Ostwald, das mit Heizvorrichtung und Thermostat versehen war, bestimmt, und zwar relativ zu der des Wassers; die Werte für die Zähigkeit des Wassers wurden dem Tabellenwerke von Landolt-Börnstein entnommen. Es ergaben sich so die Angaben der Tabelle 3.

Setzt man die Zähigkeit als Funktion der Temperatur ϑ in folgender Weise an:

$$\mu \vartheta = \mu_0 (1 - \beta \vartheta + \gamma \vartheta^2),$$

§ 5. Die Messungsergebnisse bei den Temperaturen 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55° C, d. h. die zusammengehörigen Werte von Π und t , bzw. von $\log \Pi$ und $\log \left(\frac{1}{t}\right)$, sind in der Tabelle 4 enthalten und in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Man erkennt aus der Fig. 3 deutlich, was wir oben behauptet haben: bei kleinen Werten des Reynoldsschen Parameters haben wir die gewöhnliche Poiseuillesche Gerade, an die sich eine zweite Gerade ansetzt, deren Winkel δ gegen die Abszissenachse gegeben ist durch die Gleichung:

$$\text{arc tang } \delta = \frac{1}{n};$$

n ergab sich im Mittel aus unseren Messungen zu:

$$n = 1,497.$$

Mit diesem Werte läßt sich aus den Tabellen nach Gleichung (6) $\log C$, also auch C als Funktion der Temperatur bestimmen. Die erhaltenen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

ϑ	$\log C$	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{beob. ausgegl.}}$	ϑ	$\log C$	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{beob. ausgegl.}}$
15° C	3,2319	1706,0	1686,3	40° C	3,1896	1547,7	1538,1
20	3,2149	1640,5	1656,7	45	3,1818	1518,0	1508,4
25	3,2091	1618,4	1627,0	50	3,1668	1468,0	1478,8
30	3,1972	1574,7	1597,4	55	3,1609	1448,6	1449,1
35	3,2007	1587,4	1567,7				

Die drei ersten Spalten sind ohne weiteres verständlich; die Bedeutung der vierten Spalte ergibt sich aus folgendem: Trägt man die C -Werte der dritten Spalte als Funktion der Temperatur ϑ auf, so ergibt sich hinreichend genau eine gerade Linie. Deren genaue Lage wird nun mittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und nun zu jedem ϑ -Werte das zugehörige C aus der so gefundenen Geraden entnommen; diese Werte sind als $C_{\text{beob.-ausgegl.}}$ bezeichnet und stehen in der vierten Spalte. Im folgenden wird nur mit diesen ausgeglichenen Werten von C gerechnet.

Die nämlichen Versuche wurden auch mit höheren Drucken angestellt, wobei man schließlich auch in das Gebiet der sogenannten „Turbulenz III“, d. h. der eigentlichen Turbulenzströmung gelangte. Wir verzichten auf die genaue Wiedergabe der einzelnen Daten und begnügen uns mit der Angabe des Wertes von n und der C -Werte als Funktion der Temperatur. Für n ergab sich hier:

$$n = 1,930.$$

Daß dieser Wert größer ist als 1,75, ergibt sich wieder aus der Erwägung, daß hier das Korrektionsglied, das dem Quadrate von \bar{u} proportional ist, einen starken Einfluß besitzt. Die entsprechenden C -Werte finden sich in der Tabelle 6.

Tabelle 6.

ϑ	$C_{\text{beob.}}$	ϑ	$C_{\text{beob.}}$
15° C	647,90	35° C	635,67
20	643,74	40	631,20
25	640,37	50	624,21
30	638,44		

§ 6. Nun sind wir imstande, die gemessene Temperaturabhängigkeit der C -Werte mit derjenigen zu vergleichen, die sich nach dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit ergibt. Natürlich können nur relative Werte von C erhalten werden, da nach Gleichung (7) noch die Konstante B eingeht, die durch das Prinzip der dynamischen Ähnlichkeit nicht bestimmt wird. Sie kann festgelegt werden, indem wir einen der berechneten Werte direkt gleich einem der beobachteten setzen. Tun wir dies für die in Tabelle 5 enthaltenen C -Werte etwa bei der Temperatur von 25° C, so ergibt sich ein Wert von $B = 8185,6$. Damit folgt nun auf Grund der in §§ 4 und 5 mitgeteilten Daten die Tabelle 5a, die die beobachteten und auf die angegebene Weise berechneten Werte von C enthält.

Tabelle 5a.

ϑ	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{ber.}}$	ΔC in Proz.	ϑ	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{ber.}}$	ΔC in Proz.
15	1686,3	1680,7	0,4	40	1538,1	1549,9	0,8
20	1656,7	1653,9	0,2	45	1508,4	1524,7	1,0
25	1627,0	1627,0	—	50	1478,8	1498,8	1,4
30	1597,4	1599,9	0,2	55	1449,1	1475,0	1,8
35	1567,7	1574,4	0,4				

In derselben Weise ergibt sich für die in Tabelle 6 zusammengestellten C -Werte folgende Gegenüberstellung von beobachteten und berechneten Werten (Tabelle 6a); die Konstante B hat hier den Wert 642,5, wenn die beobachteten und berechneten Werte bei 43,5° C zur Koinzidenz gebracht wurden.

Tabelle 6a.

ϑ	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{ber.}}$	ΔC in Proz.	ϑ	$C_{\text{beob.}}$	$C_{\text{ber.}}$	ΔC in Proz.
15° C	647,90	646,34	0,2	35° C	635,67	634,32	0,2
20	643,74	643,43	0,05	40	631,20	631,42	0,03
25	640,37	640,44	0,01	50	624,21	625,07	0,1
30	638,44	637,33	0,19				

Die mittlere Abweichung beträgt im Falle der Tabelle 5a etwas weniger als 1 Proz., im Falle der Tabelle 6a sogar nur 1 Prom.

Es stimmen also Experiment und Theorie so genau überein, als man nur erwarten kann.

§ 7. v. Mises¹⁾ hat die Meinung ausgesprochen, daß die Turbulenz durch andauernde Störungen erzeugt würde, die von der molekularen Rauigkeit der Wandung der Röhren herrührten. In dieser Form ist uns der Misessche Gedanke nie besonders wahrscheinlich erschienen, da ja die äußerste Flüssigkeitsschicht an der Wand haftet. Man kann aber, wie Herr Hopf gelegentlich einer Diskussion auf dem Physikertage in Jena mitteilte, die Sache so auffassen, daß die molekulare Rauigkeit der Wand sich auf die anhaftende Flüssigkeitsschicht überträgt. Versuche, die kürzlich L. Schiller²⁾ gemacht hat, scheinen nicht für die Richtigkeit des Misesschen Gedankens zu sprechen. Nach diesen Versuchen ist für den Eintritt der Turbulenz maßgebend die Störung beim Einlauf in die Kapillare; für große Störungen an dieser Stelle tritt Turbulenz auf bei einem Werte des Reynoldsschen Parameters $R = 1160$, der auf keine Weise unterschritten werden kann; je kleiner aber die Einlaufsstörung gemacht wird, zu um so höheren Werten von R kann man gelangen, ohne daß Turbulenz auftritt. Daran ändert sich nichts, wenn man, wie z. B. Schiller es getan hat, grobe Störungen dadurch zu erzeugen versucht, daß man ein Gewinde in die Rohrwand einschneidet, also gewissermaßen die „Rauigkeit“ der Wand kolossal übertreibt: maßgebend bleibt nach Schillers Versuchen für den Eintritt der Turbulenz immer die Störung beim Einlauf in die Kapillare. Man kann nun, wenn man überhaupt an die molekulare Rauigkeit als Ursache der Turbulenz denkt, noch die weitere Frage aufwerfen, ob nicht die molekulare Struktur der strömenden Flüssigkeit selbst für den Eintritt der Turbulenz verantwortlich gemacht werden kann.

Wir haben zu diesem Zwecke einige Versuche gemacht, indem wir künstlich Inhomogenitäten in die Flüssigkeit einführten, also gewissermaßen die molekulare Struktur der Flüssigkeit vergrößerten. Man konnte so vielleicht erwarten, daß, während bei kleiner Einlaufsstörung für die normale Flüssigkeit erst bei hohen Werten des Reynoldsschen Parameters Turbulenz eintritt, jetzt durch die Einführung der Inhomogenitäten das Eintreten der Turbulenz schon bei kleineren Werten von R beobachtet werden würde.

¹⁾ v. Mises, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. **21**, 241 ff., 1912.

²⁾ L. Schiller, ZS. f. Phys. **3**, 412, 1920.

Zunächst benutzten wir eine 3proz. wässrige Hämoglobinlösung, dann eine 10proz. Lösung von Argentum colloidal. In beiden Fällen war ein Einfluß der Einführung der Inhomogenitäten nicht zu erkennen. Schließlich stellten wir uns ganz grobe Inhomogenitäten folgendermaßen her: Nach der Schwebemethode zur Bestimmung des spezifischen Gewichts wurden aus einer großen Anzahl von Bernsteinstückchen solche von gleichem spezifischen Gewicht mit einer Kochsalzlösung herausgesucht, in einer Reibschale fein zerrieben, durch ein Mullsieb hindurchgetan und dann in der Kochsalzlösung suspendiert. Die Durchmesser der größten so erhaltenen Teilchen schwankten von 0,65 mm bis 0,125 mm; der Durchmesser dieser größten Teilchen war also fast so groß, wie der Kapillarendurchmesser. Auch hier ergab sich das Resultat, daß ein Einfluß der Inhomogenitäten nicht nachweisbar war. Die Anordnung gestattete es nicht, das Gebiet der eigentlichen Turbulenz zu erreichen, doch gelangten wir bis zu einem Werte von $R = 4000$, bei dem wegen der geringen Einlaufsstörung Turbulenz noch nicht eingetreten war. Es ist wünschenswert, daß die Versuche in der Richtung erweitert werden, daß wirklich Turbulenz eintritt; wir gedenken darauf bald zurückzukommen. Wenn nun auch aus diesem Grunde es noch nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, daß die Inhomogenitäten ohne jeden Einfluß auf den Eintritt der Turbulenz sind, so spricht doch jedenfalls das Ergebnis unserer Versuche im ganzen sicherlich dafür, daß es so ist. Das würde auch gut zu dem Ergebnis der Schillerschen Versuche¹⁾ passen, die wir oben besprochen haben.

Marburg, im September 1922.

Phys. Inst. d. Univ.

¹⁾ Von denen unsere Untersuchungen übrigens gänzlich unabhängig angestellt wurden; sie waren bereits im August 1921 abgeschlossen und eine kurze Mitteilung über ihren Inhalt wurde in einer Diskussionsbemerkung bereits auf dem Jenaer Physikertage gemacht.

Der durchsichtige Selektivstrahler als Leuchtkörper¹⁾.

Von Franz Skaupy in Berlin.

(Eingegangen am 20. Oktober 1922.)

§ 1. Einleitung. Für die Beurteilung der Strahlungseigenschaften eines auf hohe Temperatur erhitzten festen Körpers ist uns das Kirchhoffsche Gesetz ein zuverlässiger Führer. Es verknüpft das Emissionsvermögen für eine bestimmte Temperatur und Wellenlänge mit dem Absorptionsvermögen des Körpers für dieselbe Temperatur und Wellenlänge. Wir haben die Beziehung:

$$E_{\lambda T} = \text{const. } A_{\lambda T}.$$

Das Absorptionsvermögen erscheint demnach allein für die Strahlungseigenschaften des Körpers maßgebend und es lassen sich je nach den Werten desselben und nach der Art, wie es mit anderen Größen desselben Körpers, nämlich dem Reflexionsvermögen und der Durchlässigkeit zusammenhängt, verschiedene idealisierte Typen von Strahlern aufstellen, die im folgenden besprochen werden sollen, um als Grundlage für die weiteren Betrachtungen zu dienen.

1. ist $A = 1$ für alle Wellenlängen und eine gegebene Temperatur T , dann haben wir den bekannten schwarzen Strahler vor uns. Das Kirchhoffsche Gesetz ergibt:

$$E_{\lambda T} = \text{const} = E_{\lambda TS}.$$

Die Konstante des Gesetzes ist demnach dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers $E_{\lambda TS}$ gleichzusetzen.

2. ist $A < 1$, hat aber für alle Wellenlängen bei gegebener Temperatur den gleichen Wert, dann liegt für die betreffende Temperatur ein sogenannter grauer Strahler vor. Ein Körper kann auch innerhalb eines bestimmten Spektralbezirkes ein konstantes Absorptionsvermögen aufweisen, also grau strahlen. Dies trifft beispielsweise annähernd für die meisten Metalle im sichtbaren Spektralgebiet zu.

3. Ein besonderer Fall des grauen Strahlers liegt vor, wenn für alle Wellenlängen $A = 0$ ist. Wir wollen einen Strahler mit diesen Eigenschaften einen idealen Nichtstrahler nennen. Es sind mehrere Arten solcher denkbar, wie man leicht erkennt, wenn man für irgend eine Wellenlänge und Temperatur den Zusammenhang zwischen dem Absorptionsvermögen eines Körpers und dem Reflexionsvermögen und der Durchlässigkeit berücksichtigt. Fällt nämlich auf einen Körper

¹⁾ Nach einem auf der Leipziger Naturforscher-Versammlung gehaltenen Vortrag.

die Lichtmenge 1, dann wird ein gewisser Bruchteil A absorbiert, ein anderer R reflektiert und ein dritter D durchgelassen. Diese Bruchteile werden definitionsgemäß als Absorptionsvermögen, Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit bezeichnet. Man hat also die Beziehung:

$$1 = A + R + D \quad \text{oder} \quad A = 1 - (R + D).$$

Die Eigenschaft $A = 0$ kann also auf verschiedene Weise zustandekommen, insofern die Summe $R + D$ sich in verschiedener Weise zu 1 ergänzen kann.

a) Es kann $R = 0$, $D = 1$ sein, dann haben wir den durchsichtigen idealen Nichtstrahler vor uns. Genauer würde man ihn so definieren, daß R nahezu $= 0$, D nahezu $= 1$ ist, da ja das Reflexionsvermögen auch eines vollkommen durchsichtigen Körpers nur in einem besonderen Falle den Wert 0 annehmen kann, wenn nämlich der Brechungsexponent des umgebenden Mediums den gleichen Wert hat, wie der des durchsichtigen Strahlers.

b) Es kann $R = 1$, $D = 0$ sein, wir wollen dann von dem undurchsichtigen idealen Nichtstrahler sprechen und sogleich zwei Arten unterscheiden, nämlich: den metallischen undurchsichtigen idealen Nichtstrahler und den nichtmetallischen undurchsichtigen idealen Nichtstrahler. Beide Arten verhalten sich zwar in ihren Strahlungseigenschaften gleich, jedoch nicht in ihren Beziehungen zum durchsichtigen idealen Nichtstrahler, wie aus folgender Überlegung hervorgeht: Man denke sich einen einzigen für alle Wellenlängen vollkommen durchlässigen Kristall in kleine Teilchen zerlegt, etwa durch Pulvern, und diese durch Pressen wieder zu einem einzigen Körper vereinigt. Man erhält dann einen weißen, undurchsichtigen, alle Wellenlängen vollkommen reflektierenden Körper, denn das auf diesen Körper fallende Licht wird bereits in den Oberflächenschichten total reflektiert, ohne auf dem Wege durch diese Schichten irgend eine Absorption zu erleiden. Aus dem durchsichtigen idealen Nichtstrahler ist also ein undurchsichtiger idealer Nichtstrahler, nicht metallischer Art, geworden. Niemals könnte so ein Nichtstrahler metallischer Art entstehen, denn die Undurchsichtigkeit eines metallischen Strahlers entsteht nicht durch Feinkörnigkeit und Totalreflektion.

c) Ein weiterer Typ eines Nichtstrahlers, der als kombinierter idealer Nichtstrahler bezeichnet werden soll, besteht aus einem undurchsichtigen idealen Nichtstrahler, der von einer Hülle eines durchsichtigen idealen Nichtstrahlers umgeben ist. Die auf ihn fallenden Strahlen jeder Wellenlänge durchdringen ohne Verlust die durchsichtige Schicht, werden an der undurchsichtigen vollkommen reflek-

tiert und gelangen, nachdem sie abermals die durchsichtige Schicht passiert haben, wieder ungeschwächt an die Oberfläche. Der undurchsichtige Teil (z. B. der Kern) kann natürlich metallischer oder nicht-metallischer Natur sein.

§ 2. Der durchsichtige Selektivstrahler. Vom durchsichtigen idealen Nichtstrahler unterscheidet sich der durchsichtige Selektivstrahler durch ein Absorptionsvermögen oder eine Färbung und damit auch eine Emission in einem ausgewählten (daher die Bezeichnung „selektiv“) Teil des Spektrums. Um zu einem solchen Selektivstrahler zu gelangen, kann man entweder Körper auswählen, welche von Natur aus in dem gewünschten Teil des Spektrums gefärbt sind oder von praktisch ungefärbten Körpern ausgehen, die man durch geeignete Zusätze in der ganzen Masse oder in einzelnen Teilen, beispielsweise an der Oberfläche färbt.

Bei der Auswahl der Färbung und ihrer Intensität in den verschiedenen Teilen des Spektrums lassen sich für den Selektivstrahler, der als Leuchtkörper Anwendung finden soll, gewisse Richtlinien aufstellen, die in der Beleuchtungstechnik wohl bekannt sind und auch wesentlich von den Zwecken abhängen, denen der Leuchtkörper dienen soll. Allgemein läßt sich sagen, der Selektivstrahler der Beleuchtungstechnik soll im Ultrarot so wenig wie möglich, im sichtbaren Gebiet dagegen kräftig absorbieren bzw. strahlen, und zwar so, daß die relative Intensität der verschiedenen Strahlengattungen im sichtbaren Spektralgebiet der gewünschten Lichtfarbe angepaßt ist. Geringe Strahlung im Ultrarot ist die Vorbedingung für eine ökonomische Ausnutzung der dem Leuchtkörper zugeführten Energie. Auch von der Verteilung der Emission im sichtbaren Gebiet hängt die Ökonomie der Lichtausstrahlung, etwa in Watt pro Kerze gemessen, ab. Sie ist um so größer, je mehr die ausgestrahlte Energie in Teilen des Spektrums liegt, für die das Auge sehr empfindlich ist, also beispielsweise im Gelbgrün.

Das klassische Beispiel des durchsichtigen Selektivstrahlers ist der Auerstrumpf. Die Basis desselben, das Thoriumoxyd, nähert sich in seinen Eigenschaften praktisch genügend dem durchsichtigen idealen Nichtstrahler. Das beigemengte Ceriumoxyd ist das Färbungsmittel, das die Emission des Strumpfes im sichtbaren Gebiete bedingt. Analoge des Thoriumoxyds sind: Zirkonoxyd, Magnesiumoxyd, Aluminiumoxyd und andere. Analoge des Ceriumoxyds sind Oxyde des Urans, Neodyms, Lanthans und andere mehr. Über den Auerstrumpf siehe die ausgezeichnete Darstellung von H. W. Fischer, „Der Auerstrumpf“, Stuttgart 1906. In einer neueren Arbeit von Ives,

Kingsbury, Karrer¹⁾ sind die Strahlungseigenschaften verschieden zusammengesetzter Strümpfe ausführlich behandelt.

Bei der Behandlung des Selektivstrahlers war es bisher üblich, den schwarzen Körper zum Vergleich heranzuziehen. Hier wurde bewußt von dieser Betrachtungsweise abgesehen und der ideale Nichtstrahler als Ausgangspunkt gewählt. Die eben erläuterten Verhältnisse beim Auerstrumpf lassen dies als zweckmäßig erscheinen. Die neue Betrachtungsweise führt auch zu einer gewissen Analogie zwischen den verdünnten Lösungen der physikalischen Chemie, welche bekanntlich einfachere Sätze befolgen als konzentrierte. Man wird auch beim durchsichtigen, schwach gefärbten Selektivstrahler erwarten können, daß die Gesetze der gewissermaßen „verdünnten Strahlung“ einfacher sind, als der solcher Selektivstrahler, deren Emission sich der des schwarzen Körpers nähert.

Die wissenschaftliche Untersuchung des durchsichtigen Selektivstrahlers leidet bisher an einem Übelstande. Die Bestimmung der wahren Temperatur ist nicht möglich, denn die optische Pyrometrie versagt, da das Absorptionsvermögen nicht bekannt ist und die Emission von sehr verschiedenen Umständen wie Färbung, Dicke, Form (infolge der Reflexion an den Endflächen) des zu umgebenden Körpers abhängt. Auch Rubens stand bei seinen bekannten Untersuchungen des Auerstrumpfes²⁾ dieser Schwierigkeit gegenüber, konnte sie aber im speziellen Falle dadurch überwinden, daß er die Emission des Strumpfes im blauen Spektralgebiet aus guten Gründen der des schwarzen Körpers nahe gleichsetze. In anderen Fällen, wie z. B. bei der Untersuchung irgendwelcher durchsichtigen Kristalle, ist eine solche Annahme nicht berechtigt. Der Verf. läßt eine Methode ausarbeiten, bei welcher die Temperatur eines kleinen, auf einem durchsichtigen Strahler angebrachten Fleckes aus Platin, Iridium oder dergleichen optisch gemessen wird. Diese Temperatur muß mit ziemlicher Genauigkeit auch die des durchsichtigen Körpers selbst in der Nähe des Fleckes darstellen. Die mit freundlicher Unterstützung von Prof. Henning angestellten Vorversuche unter Benutzung seines Mikropyrometers scheinen die Brauchbarkeit der Methode zu bestätigen.

Auf eine Eigentümlichkeit eines als durchsichtiger Selektivstrahler ausgebildeten Leuchtkörpers sei noch hingewiesen. Während die üblichen Glühkörper eine mit steigender Temperatur rasch steigende Ökonomie aufweisen, entsprechend der Verschiebung des Energie-

¹⁾ Journ. of the Franklin Inst. 186, 401, 585, 1918.

²⁾ Ann. d. Phys. (4) 18, 725, 1905; 20, 593, 1908.

maximums nach kürzeren Wellenlängen hin, ist diese Eigenschaft beim durchsichtigen Selektivstrahler nicht notwendig vorhanden. Beispielsweise würde ein nur im Gelbgrün emittierender Leuchtkörper bezüglich seiner Ökonomie in weiten Grenzen von der Temperatur fast unabhängig sein, vorausgesetzt, daß keine wesentliche Verschiebung der Absorptionsbande mit der Temperatur stattfindet. Daraus folgt die Möglichkeit, ökonomische Strahler von geringer Flächenhelligkeit und demgemäß geringer Blendung zu schaffen, die bei relativ niedrigen Temperaturen betrieben werden.

Einige Worte mögen noch über die verschiedenen Arten von Selektivstrahlern gesagt werden, die sich von dem kombinierten idealen Nichtstrahler ableiten lassen. Entsprechend der Zusammensetzung desselben aus zwei Teilen sind eine Anzahl von Variationen denkbar. Es kann entweder nur die durchsichtige Hülle selektiv strahlen oder nur der undurchsichtige Teil oder endlich beide. Endlich kann die Strahlung des undurchsichtigen Teiles in allen drei Fällen entweder metallischer oder nichtmetallischer Natur sein. Alle diese Strahler wollen wir als kombinierte Selektivstrahler bezeichnen.

§ 3. Der mit elektrischer Energie geheizte Selektivstrahler. Für einen mit Flamme zu heizenden durchsichtigen Selektivstrahler dürfte wohl der Auerstrumpf der jetzt üblichen Zusammensetzung und Ausbildung die günstigste Lösung darstellen. Seine Durchsichtigkeit verdankt er dem geringen Durchmesser der Fädchen, die ihn zusammensetzen. Offenbar erstrecken sich die beim Abbrennen des Strumpfes entstehenden Kristalle praktisch über den ganzen Querschnitt der einzelnen Fäden. Da jedoch nur ein geringer Bruchteil der in der Flamme entwickelten Wärme auf den Strumpf übertragen und von diesem ausgestrahlt wird, wird man eine wesentlich bessere Ausnutzung der aufgewendeten Energie von einem Selektivstrahler erwarten dürfen, der durch elektrische Energie geheizt wird. Entsprechend den hier herrschenden wesentlich anderen Bedingungen ist die Verwendung anders zusammengesetzter noch wesentlich günstiger strahlender Leuchtkörper denkbar.

Die elektrische Heizung eines solchen Strahlers ist auf recht verschiedene Weise möglich. Vorgeschlagen ist bereits die Verwendung von Auerstrümpfen, die durch auftreffende Kathodenstrahlen zur Lichtausstrahlung gebracht werden, ferner die Erhitzung durchsichtiger Selektivstrahlerröhrchen mittels einer sie durchsetzenden elektrischen Entladung. Wesentlich bessere Aussichten zeigen jedoch Leuchtkörper dieser Art, wenn sie durch Joulesche Wärme geheizt werden. Entweder kann dann der durchsichtige Strahler selbst strom-

leitend sein, ähnlich wie der Brenner einer Nernstlampe, oder er kann mit einem metallischen stromführenden Leiter in gut wärmeleitender Verbindung sein, so daß die im letzteren entwickelte Wärme sich auf ihn überträgt und ihn zum Leuchten bringt. Die Oberfläche des metallischen Leiters darf dann allerdings nur klein, verglichen mit der Oberfläche des eigentlichen Strahlers, sein, weil sonst die weniger selektive Strahlung des Metalles zu sehr vorherrschen würde. Eine beispielsweise Ausführung eines Leuchtkörpers der letztgenannten Art stellt ein durchsichtiges, im sichtbaren Spektralgebiet gefärbtes, temperaturbeständiges Röhrchen dar, das auf seiner Innenfläche einen schmalen, dieselbe nicht vollständig bedeckenden Belag des Leiters trägt, der an seinen Enden mit Stromzuführungen verbunden ist.

Ein durchsichtiger Strahler dieser Art kann eine glasartige Konstitution besitzen oder aus einem einzigen oder sehr wenigen makroskopischen Kristallen bestehen. Glasige Körper dürften infolge der Entglasungsneigung bei dauernder Erhitzung kaum in Betracht kommen. Dagegen bieten Einkristalle die günstigsten Aussichten. Da aber die Herstellung größerer durchsichtiger Einkristalle aus temperaturbeständigen Substanzen eine bisher nur in wenigen speziellen Fällen befriedigend gelöste Aufgabe ist (man denke an die synthetischen Edelsteine), wird offenbar der Fortschritt auf diesem Gebiete Hand in Hand mit der Ausbildung der Methoden zur Erzeugung großer Kristalle aus schwer schmelzbaren Stoffen, insbesondere Oxyden gehen. Auch für Lichtquellen, bei denen Kathodenstrahlen einen Selektivstrahler zum Leuchten bringen, wird man sich nicht des zerbrechlichen, veränderlichen Auerstrumpfes, sondern eines Einkristalles als Leuchtkörper bedienen.

Man wird fragen, warum nicht der nichtmetallische undurchsichtige Selektivstrahler, dessen Strahlung durch ein selektives Reflexionsvermögen bedingt ist, die gleichen Aussichten in der Beleuchtungstechnik haben sollte, wie der durchsichtige Selektivstrahler. Im Prinzip müssen beide allerdings einander gleichwertig sein, wie folgende Betrachtung zeigen wird: Ein idealer durchsichtiger Selektivstrahler, etwa ein Kristall, der aus einem durchsichtigen idealen Nichtstrahler durch Färbung im sichtbaren Teil des Spektrums entstanden gedacht werden kann, werde durch Zerkleinerung und Wiederaeinanderrücken der kleinen Teilchen in den undurchsichtigen Strahler verwandelt. Dieser wird dann offenbar im Ultrarot vollkommen reflektieren, also gar nicht emittieren, dagegen im sichtbaren Gebiet bei nicht zu kleiner Korngröße in ähnlicher Weise absorbieren wie der durchsichtige Körper, aus dem er entstanden ist, da die auf ihn fallend

Lichtstrahlen bei ihrer Totalreflexion in den Oberflächenschichten gewisse, wenn auch kurze Strecken in den kleinen, im sichtbaren Gebiete absorbierenden Teilchen zurücklegen müssen. Er wird also ebenso selektiv strahlen, wie der durchsichtige Ausgangskörper, allerdings um so weniger, je kleiner die Teilchen sind. Es ist ja bekannt, daß gepulverte, gefärbte Kristalle um so weißer erscheinen, je feiner das Pulver ist. Die Strahlung eines solchen Körpers hängt also von der Korngröße ab, welche sich beim Erhitzen durch Rekristallisation dauernd verändert, während beim durchsichtigen Kristall der stabile Zustand bereits erreicht ist. In bezug auf Unveränderlichkeit erscheint demnach der durchsichtige Strahler offenbar als der überlegene. Auch scheint mir der Umstand, daß es ideale Selektivstrahler in Wirklichkeit nicht gibt, sondern nur mehr oder weniger gute Annäherungen, beim durchsichtigen Körper eine günstigere Selektivstrahlung zu ermöglichen.

Berlin, im Oktober 1922.

Zum Problem des Atoms und der Strahlung.

Von **Franz Skaupy** in Berlin.

(Eingegangen am 31. Oktober 1922.)

§ 1. Einleitung. Die Bohrsche Theorie unterwirft ein einzelnes Atom der Betrachtung und sucht aus den Bahnen der Elektronen und den Orts- und Bahnänderungen derselben verschiedene Vorgänge, wie z. B. die Ionisation, ferner die Absorption und Emission des Lichtes zu erklären. Bei den natürlichen Vorgängen kommt es jedoch niemals vor, daß nur ein einziges Atom vorhanden ist, vielmehr ist das etwa zur Betrachtung herausgegriffene stets von einer Unzahl anderer umgeben. Jedes dieser vielen Atome stellt ebenso wie das herausgegriffene, ein elektromagnetisches System dar, das nicht unbeeinflusst bleiben kann, wenn an dem betrachteten Atom sich Vorgänge irgendwelcher Art abspielen. Mag auch die Wirkung des Bezugsatoms, wie ich das herausgegriffene nennen will, auf irgend ein anderes in der Umgebung energetisch minimal sein, so ist doch die Gesamtwirkung des Bezugsatoms auf die Summe der umgebenden Atome und ebenso die Rückwirkung der letzteren auf das erstere keineswegs zu vernachlässigen. Daß die bisherige Theorie diese gegenseitigen Wirkungen vernachlässigt, scheint mir ein prinzipieller Mangel derselben zu sein¹⁾, und es ist wohl denkbar, daß manches Unbefriedigende der bisherigen Auffassung sich durch Behebung dieses Mangels beseitigen läßt.

Für einige wichtige physikalische Vorgänge sollen im folgenden Vorstellungen entwickelt werden, welche nicht beanspruchen, die wirklichen Vorgänge quantitativ oder auch nur qualitativ vollständig wiederzugeben, wohl aber eine beispielsweise Erläuterung des Leitgedankens darstellen.

§ 2. Die Strahlung des Elektrons in seiner Bahn und die Wärmestrahlung. Einer der unbefriedigendsten Punkte der Bohrschen Theorie ist die Annahme, daß das Elektron in seiner Gleichgewichtsbahn keine Strahlung aussende. Nach den üblichen Anschauungen müßte ja das Atom unter Aussendung einer seiner Umlauffrequenz entsprechenden Strahlung Energie verlieren. Die Erfahrung lehrt, daß die der Beobachtung zugänglichen Körper eine solche Strahlung wenigstens nicht in bemerkbarer Menge aussenden

¹⁾ Vgl. jedoch A. Szarvassi, Phys. ZS. 19, 505, 1918, dessen Anschauungen sich mit den meinen in sehr vielen Punkten berühren.

und unverändert ihre Eigenschaften beibehalten. Allerdings bestehen diese Körper aus einer Unzahl von Atomen, und es ist daher nicht bewiesen, daß ein einzelnes Atom, wenn es sich isolieren ließe, nicht doch eine Strahlung der erwähnten Art aussenden und somit sich dauernd ändern würde. Und in der Tat möchte ich versuchen, an der Auffassung festzuhalten, daß das einzelne Atom tatsächlich strahlt, nicht jedoch die Gesamtheit der Atome. Für jedes strahlende Atom wird sich nämlich bei der großen Anzahl der umgebenden Atome stets eines finden lassen, das in demselben Moment eine ebensolche, aber in der Phase um 180° verschobene Strahlung aussendet, welche die Strahlung des ersten Atoms durch Interferenz vernichtet. Die eben mitgeteilte Vorstellung gibt den in Wirklichkeit viel komplizierteren Interferenzvorgang natürlich nur andeutungsweise wieder. Doch ist wohl anzunehmen, daß eine statistisch-mathematische Behandlung des Problems die Richtigkeit des Grundgedankens bestätigt. An den Grenzen des Körpers wird man allerdings Atome annehmen müssen, deren Strahlung durch Interferenz mit der anderer Atome nicht vollständig kompensiert wird.

Die vorliegende Betrachtungsweise kann aber offenbar nur für die normale Umlauffrequenz der Elektronen des Atoms gelten. Diese ist bei allen Atomen des betrachteten Körpers vorhanden und damit die Möglichkeit der gegenseitigen Kompensation der Strahlung durch Interferenz gegeben. Anders liegt es, wenn die Elektronenbahnen einzelner Atome gestört sind, wie dies beispielsweise durch Zusammenstöße unter den Atomen bewirkt werden kann. Die gestörten Bahnen enthalten gewissermaßen Oberschwingungen¹⁾. Solche gestörten Bahnen werden außer der der Umlauffrequenz entsprechenden Strahlung noch eine aussenden, welche den Oberschwingungen entspricht. In einem gegebenen Zeitmoment wird dann, wenn nicht genügende Atome vorhanden sind, welche die gleiche Oberschwingung aussenden, keine oder keine vollständige Kompensation der Strahlung durch Interferenz eintreten, d. h. der Körper wird die betreffende Frequenz unter Rückkehr der Elektronen in ihre normale Bahn wirklich aussenden. Es liegt nahe, die Wärmestrahlung in dieser Weise entstanden zu denken, sie also auf die durch den Zusammenstoß der Atome durch Wärmebewegung gestörten Elektronenbahnen zurückzuführen.

§ 3. Die Stabilität des Atoms, dadurch gegeben, daß keine Ausstrahlung stattfindet, solange keine gestörten Elektronenbahnen

¹⁾ Vgl. die Betrachtungen, welche dem Bohrschen Korrespondenzprinzip zugrunde liegen, *ZS. f. Phys.* **9**, 22, 1922.

vorhanden sind, kommt nach den vorhergehenden Betrachtungen dadurch zustande, daß stets viele Atome gleichzeitig vorhanden sind. Man kann noch weiter gehen und vermuten, daß auch die Existenz bestimmter Bahnen der Elektronen, der sogenannten Quantenbahnen, nicht dem einzelnen Atom eigentümlich ist, sondern erst durch das gleichzeitige Vorhandensein vieler Atome bedingt ist, daß also die Elektronen des Atoms unter dem Einfluß der umliegenden Atome bestimmte Gleichgewichtslagen annehmen. Es erscheint so der Quanteneffekt überhaupt als eine durch Zusammenwirken vieler Atome entstehende statistische Wirkung¹⁾.

§ 4. Einige qualitative Anwendungsbeispiele der Grund-auffassung seien noch gegeben:

a) Absorption und Fluoreszenz. Eine auffallende Lichtwelle wird absorbiert, d. h. ihre Energie wird dazu verwendet, die Bahnen der Elektronen einer Anzahl von Atomen zu stören. Die Störungen verschwinden sehr rasch wieder, entweder unter Aussendung einer Fluoreszenzstrahlung oder unter Erhöhung des Wärmeinhalts des Körpers.

b) Die Lichtemission eines Gases. Ein stoßendes Elektron hebt ein Elektron des Gasatoms auf eine höhere Bahn. Dadurch werden die Elektronenbahnen sämtlicher umliegender Atome gestört und senden entsprechend der in ihnen nunmehr enthaltenen Oberschwingungen Spektrallinien aus, während sowohl die gestörten Elektronenbahnen ihre frühere Form wieder annehmen, als auch das Elektron des Bezugsatoms wieder in seine dem Kern näher liegende Bahn zurückkehrt. Nach dieser Auffassung sendet also nicht das gestoßene Atom selbst die Strahlung aus, sondern die von demselben in ihren Bahnen gestörten Nachbaratome. Nach der bisherigen Auffassung war es rätselhaft (worauf besonders Stark hinwies), warum nur eine ganz bestimmte Linie ausgesandt werden sollte, die der Energiedifferenz zwischen der höheren Bahn und einer Bahn entspricht, die während der Aussendung der Strahlung noch gar nicht erreicht ist. Nach meiner Betrachtungsweise entfällt die Schwierigkeit, die Nachbaratome senden eben die Linien aus, die ihren Oberschwingungen entsprechen. Man sieht, daß hier ein Nachbaratom gleichzeitig mehrere Linien für jedes ihrer Elektronen aussenden kann.

Der eben geschilderte Gedankengang führt bei konsequenter Verfolgung noch weiter von der gegenwärtigen Theorie weg. Wenn nämlich ein aus seiner normalen Bahn gehobenes Elektron die Bahnen

¹⁾ Vgl. Szarvassi, l. c.

der Nachbaratome stören und zur Aussendung von Strahlung veranlassen kann, muß auch ein einzelnes freies Elektron dasselbe bewirken können, und es ist nicht mehr nötig, ein Bezugsatom als Ursache der Strahlung anzunehmen.

c) Die lichtelektrische Wirkung. Die Lichtelektrizität bereitet der Theorie mit Rücksicht auf das Einsteinsche Gesetz beträchtliche Schwierigkeiten, so daß man selbst zu so gewagten Annahmen, wie der Lichtquantenhypothese gegriffen hat, die in keinem anderen Erfahrungsgebiet eine Stütze finden. Mit Rücksicht auf das in § 1 und 2 Gesagte scheint mir die Schwierigkeit im wesentlichen darin zu bestehen, daß ein einzelnes Atom oder Elektron bisher als Träger der lichtelektrischen Wirkung aufgefaßt wird. Im Sinne meiner Betrachtungen kommt der lichtelektrische Effekt dadurch zustande, daß eine große Anzahl von Atomen, welche das emittierte Elektron umgeben, durch das einfallende Licht in ihren Elektronenbahnen gestört wird, und dadurch auf dieses Elektron elektrodynamische Wirkungen ausübt und so seine Emission bewirkt. Sicherlich fehlt dieser Auffassung vorläufig die Möglichkeit, das Einsteinsche Gesetz zu erklären. Doch dürfte diese Erklärung im Sinne von Szarvassi zu versuchen sein.

§ 5. Die Art der Bahnstörung. Wenn ein Elektron die Elektronenbahnen der es umgebenden Atome stört, können die Wirkungen sowohl elektrostatischer wie elektrodynamischer Natur sein. Nach der bisherigen Theorie ist die Wirkung des stoßenden Elektrons auf ein Atom wohl im wesentlichen als eine elektrostatische gedacht. Solange die Annahme (von Franck und Hertz) der elastischen Elektronenstöße bei Edelgasen den bekannten Tatsachen genügte, war diese Auffassung einleuchtend. Mit den bekannten Ramsauer'schen Versuchen an Argon ist sie offenbar schwer in Einklang zu bringen. Bei Annahme elektrostatischer Wirkung ist nicht einzusehen, warum die langsamen Elektronen ungehindert das Atom sollten passieren können. Angesichts der Ratlosigkeit, mit der man diesen Versuchen gegenübersteht, wird es gestattet sein, eine andere Deutung zu versuchen. Es sei angenommen, daß die Wirkung eines Elektrons auf ein Atom beim Vorbeifliegen oder beim Hindurchfliegen in hohem Grade elektrodynamischer Natur ist. Dann wird offenbar die Wirkung auf die Elektronen des Atoms von der Relativgeschwindigkeit des stoßenden Elektrons zum Atom abhängen. Bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten verweilt zwar das Elektron genügend lange im Bereich des Atoms, um einem Elektron desselben nahezukommen, doch ist die elektrodynamische Wirkung gering. Bei mittleren Ge-

schwindigkeiten wird die elektrodynamische Wirkung genügen, und auch die Zeitdauer der Wirkung. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten verweilt das stoßende Elektron nicht mehr genügend lange im Bereich des Atoms, so daß die Wahrscheinlichkeit der genügenden Annäherung an eines der Elektronen desselben gering wird.

Auch der Umstand, daß positive Ionen als Ursache der Ionisation nicht oder selten in Betracht kommen, läßt sich darauf zurückführen, daß sie nie die zur elektrodynamischen Wirkung nötige Geschwindigkeit erreichen.

§ 6. Das Wesen der elektrodynamischen Wirkung. Vor der Aufstellung der Maxwellschen Theorie wurde von Gauß und Weber¹⁾ der Versuch gemacht, die elektrodynamische Wirkung auf eine elektrostatische Wirkung von relativ zueinander rasch bewegten Elektrizitätsmengen zurückzuführen und so eine allgemeinere Elektrostatik zu schaffen, die auch die elektrodynamischen Wirkungen in sich begreift. Das Unbefriedigende der üblichen Elektrizitätslehre, die auf zwei ganz heterogen erscheinenden Grundphänomenen, nämlich der elektrostatischen und der elektrodynamischen Wirkung aufgebaut ist, liegt auf der Hand, trotzdem hat sich die Gauß-Webersche Richtung bisher nicht durchgesetzt. Für die beim Atom auftretenden Probleme scheint mir die Durchbildung dieser Auffassung geradezu als eine Notwendigkeit. Hier hat man es nie mit eigentlichen elektrischen Strömen, sondern stets mit elektrischen Elementarladungen oder Vielfachen solcher zu tun, die sich mit gewissen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen relativ zueinander bewegen. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß hier die Annahme nur einer einzigen Wirkung zwischen den Ladungen, die jedoch von der relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängt, von bestechender Einfachheit ist. Es kommt also darauf an, das Elementargesetz der Wirkung zweier beliebig bewegter Elementarladungen aufeinander zu finden, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß ein weiterer wesentlicher Fortschritt auf dem Gebiete der Atomtheorie die vorherige Lösung dieses Problems zur Voraussetzung hat.

Berlin, im Oktober 1922.

¹⁾ Vgl. die Zusammenstellung bei Saha, Phys. Rev. (2) **13**, 42, 1919.

Die Entstehung der Lorentzverkürzung und die strenge Behandlung des Uhrenparadoxons.

(Mit einer Antwort an Herrn Stjepan Mohorovičić.)

Von **Karl Bollert** in Berlin-Friedenau.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 16. Oktober 1922.)

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich mich mit der Entstehung der Lorentztransformation beschäftigt für den Fall, daß ein Stab in einem Inertialfeld so beschleunigt wird, daß er entweder spannungs-

¹⁾ ZS. f. Phys. **10**, 256—266, 1922. Mittlerweile ist in derselben Zeitschrift eine längere Kritik meiner ersten Abhandlung von Stjepan Mohorovičić erschienen. Wenn der Verf. die Vermutung ausspricht, daß eine frühere Arbeit von ihm, „Eine elementare Theorie der Gravitation“, Naturwiss. Wochenschr. (N. F.) **21**, Nr. 11, S. 145—153, 1922, mir die Anregung zu meiner Arbeit gegeben hätte, so muß ich das verneinen. Wäre es der Fall gewesen, so würde ich die Arbeit erwähnt haben. Was die Sache selbst betrifft, so halte ich die Formeln, die Herr Mohorovičić in dieser Kritik aus seiner Arbeit den meinigen gegenüberstellt, für unrichtig. Wenn der Verf. sie zum Teil wenigstens für identisch mit den meinigen hält, so beruht das auf einem Irrtum. Nach ihm ist

$$1 + \frac{gx}{c^2} = \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}.$$

Hierbei ist die Größe g unser γ . Das wäre auch tatsächlich annähernd der Fall, wenn x den Fallraum darstellen würde, denn dann wäre, für kleine Geschwindigkeiten wenigstens, $v^2 = g^2 t^2 = 2gx$ und damit wenigstens in erster Annäherung die Gleichung oben bewiesen. Hier liegt aber ein prinzipielles Mißverständnis vor, denn in allen meinen Formeln ist x der Abstand vom Koordinatenanfangspunkt. Dieser Fallraum wäre für die Ruhbeschleunigung ja auch gleich Null zu setzen, und damit würde meine Formel $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}$ übergehen in

$\gamma = \text{const.}$, im Widerspruch zu meiner Behauptung S. 257, 10. Zeile von unten. Weiter erklärt der Verf. meine Formel 4, S. 261 für unrichtig und ersetzt sie durch den Ausdruck

$$ds^2 = e^{2ax} (dx_4^2 - dx_1^2) - dx_2^2 - dx_3^2$$

(in dem mir vorliegenden Korrektorexemplar fehlt infolge eines Druckfehlers das x). Hierzu ist folgendes zu sagen: Vom Standpunkte der Einsteinschen Relativitätstheorie, und das ist der, der meiner Arbeit zugrunde liegt, ist der von mir angegebene Wert für ds^2

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)^2 d\tau_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

in seiner Form unbestimmt. Man kann ihn z. B., indem man für x eine andere Variable einführt, auch so umformen, daß die beiden ersten Glieder entgegengesetzt gleiche Koeffizienten haben. Es ist aber zu betonen, daß dies einen physikalischen und geometrischen Unterschied überhaupt nicht bedeutet, wie der Verf. irrtümlich meint.

frei bleibt oder sich so bewegt, daß seine elastischen Spannungen sich nicht ändern. Wir können das Wesentliche aus der Fig. 1 ablesen:

1. Die Weltlinien des beschleunigten Stabes $A_1 B_1$ bilden in bezug auf das Ruhssystem (xt) ähnliche und für den Punkt der x -Achse, dessen Entfernung vom Anfangspunkt die Länge $-\frac{c^2}{\gamma_0}$ besitzt, ähnlich liegende Kurven, deren Gleichungen für kleine Werte von t die Form haben

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0 t^2}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}.$$

Es besteht also zwischen der Ruhbeschleunigung im Koordinatenanfangspunkt γ_0 und derjenigen in der Entfernung x die Gleichung

$$\gamma_x = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}.$$

Der Wert von γ_x genügt der Gleichung

$$-\frac{d\gamma_x}{dx} = \frac{\gamma_x}{c^2}$$

und von dieser hatten wir bewiesen, daß sie charakteristisch ist für das Entstehen der Lorentzkontraktion, die sich eben daraus ergibt, daß sich das vordere Ende des Stabes A_1 langsamer bewegt als das hintere Ende B_1 .

2. Für einen mit dem beschleunigten Stab bewegten zweiten Beobachter ist ein stationäres Gravitationsfeld vorhanden. Wir haben die Größe des Weltlinienelements in dem Feld mit Hilfe einer Voraussetzung über die Zeitmessung für den Gravitationsbeobachter abgeleitet. Es war das dieselbe Voraussetzung, die auch der speziellen Relativitätstheorie wurzelhaft zugrunde liegt, und die wir als das Prinzip von der Umkehrbarkeit des Lichtweges bezeichnet hatten. Setzen wir also voraus, daß der Beobachter im Feld die Zeit so mißt, daß sich die Lichtgeschwindigkeit in jedem Punkt der x -Achse in beiden Richtungen als gleich groß erweist, so nimmt das Weltlinienelement die Gestalt an:

$$d\tau^2 = c^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)^2 d\tau_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1)$$

Hieraus findet man den Fallraum s für die Punkte des ebenfalls spannungsfrei fallenden Stabes $B_2 A_2$. Es ist

$$s = \frac{-\gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)}{2} \tau_0^2 \quad (\text{für kleine } \tau_0). \quad (2)$$

Weiter ergibt sich, daß die Zeitebene für 2 sich um den Punkt $-\frac{c^2}{\gamma_0}$ dreht und infolgedessen der Zeitablauf für im System ruhende Uhren sich aus der Gleichung berechnet:

$$d\tau_x = \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right) d\tau_0. \quad (3)$$

Wenn wir den Wert der Ruhbeschleunigung im System 2 in die Gleichung $-\frac{d\gamma}{dx} = \frac{\gamma^2}{c^2}$ einsetzen, so ist diese nur erfüllt, wenn wir unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung für $-\gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)$ den Wert $-\frac{\gamma_0}{1 - \frac{\gamma_0 x}{c^2}}$ schreiben. Dieser Punkt bedarf einer näheren

Erörterung, denn alle hier abgeleiteten Formeln erheben den Anspruch

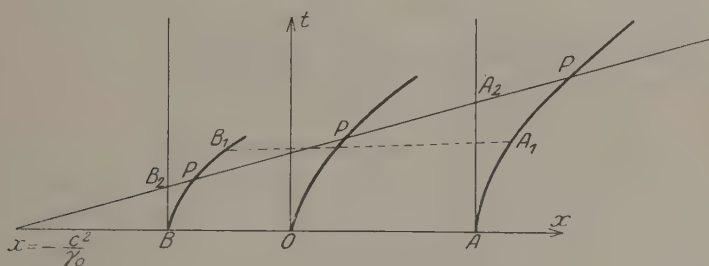


Fig. 1.

auf strenge Gültigkeit. Ist also für den Gravitationsbeobachter das Gesetz von der Lorentzkontraktion zu modifizieren, und wenn das der Fall ist, wie kommt es, daß in dem Moment, wo der Stab $A_1 B_1$ aus dem Gravitationsverbände herausgelöst wird, und beide Stäbe sich spannungsfrei und geradlinig gleichförmig gegeneinander weiterbewegen, diese Kontraktion ihrem genauen Wert nach vorhanden sein muß? Diese Fragen finden ihre völlige Aufklärung in folgendem: In dem Moment, in dem der Stab $A_1 B_1$ in den Weltpunkten P aus dem Gravitationsverbände gelöst wird, ändert sich für den Beobachter 2 die Zeitmessung, da sich jetzt die Zeitebene parallel zu $B_2 P A_2 P$ weiterbewegt. Statt nach der Gleichung (3) wächst die Zeit in allen Punkten des Stabes nun wie τ_0 . Damit ändert sich auch in demselben Moment die Geschwindigkeitsmessung. Während vorher v den Wert $-\gamma_0 \tau_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)$ besaß, ist es jetzt für alle Punkte gleich $-\gamma_0 \tau'_0$,

wenn wir mit τ_0' die Eigenzeit des Stabanfangs in dem Moment der Loslösung bezeichnen. Setzen wir für γ den Wert $-\gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 v}{c^2}\right)$ und für v den Wert $-\gamma_0 \tau_0$ in die Gleichung S. 259, oben

$$\frac{d\gamma}{dx} \frac{\tau_0^2}{2} = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ein, so erweist sich diese für gegen Null konvergierende Werte von v streng gültig. Der Wert $v = -\gamma_0 \tau_0$ würde sich auch für den Gravitationsbeobachter ergeben haben, wenn wir v nicht in der Systemzeit τ_0 , sondern auf natürliche Weise, d. h. mit einer an Ort und Stelle befindlichen Uhr gemessen hätten, dann wäre nämlich $\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau_0} \frac{d\tau_0}{d\tau} = -\gamma_0 \tau_0$. Wir können also zusammenfassend sagen: auch für den Feldbeobachter ist die Lorentzkontraktion vorhanden, wenn er die Geschwindigkeit v mit lokalen Uhren mißt.

Bis jetzt haben wir uns darauf beschränkt die Vorgänge, die bei der Beschleunigung eines spannungsfreien Körpers dessen Lorentzkontraktion zur Folge haben, von dem momentanen Ruhssystem aus zu betrachten. Wir wollen jetzt für einen wichtigen Spezialfall diese Verhältnisse für beliebige endliche Zeiträume ermitteln. Mit anderen Worten, wir fragen nach der Beschaffenheit der in Fig. 1 gezeichneten Kurven. Die partielle Differentialgleichung, durch die diese Kurvenschar charakterisiert ist, finden wir auf S. 258. Sie lautet:

$$-\frac{\partial v}{\partial x_0} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ihre allgemeine Lösung findet man auf dem von Lagrange angegebenen Wege. Sie ist $x_0 - \frac{tc^2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - f(v) = 0$, denn wenn man die linke Seite mit $F(x_0, t, v)$ berechnet, so erhält man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v \frac{\partial F}{\partial v}}$$

und unsere Gleichung wird zur Identität. Die allgemeine Lösung enthält noch die unbestimmte Funktion f . Diese kann man bestimmen, wenn man für einen Punkt des beschleunigten Stabes, etwa für seinen Anfangspunkt, das Weg-Zeitgesetz, nach dem der Stab in Bewegung gesetzt werden soll, kennt. Wir wollen für den einfachsten Fall, daß dieser Anfangspunkt mit konstanter Ruhbeschleunigung in Bewegung gesetzt wird, unsere Lösung noch diskutieren. Wir verschieben zu

diesem Zweck das Koordinatensystem in Fig. 1 nach $x = -\frac{c^2}{\gamma_0}$ (γ_0 ist

die konstante Ruhbeschleunigung der Weltlinie des Stabanfanges OP). Die Gleichung von OP ist dann einfach in diesem System

$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{\gamma_0^2}$, denn ein Punkt, dessen Ruhbeschleunigung konstant

ist, führt bekanntlich eine solche Hyperbelbewegung aus. Aus der Gleichung ergibt sich ohne weiteres für $t = 0$ die Entfernung des

Scheitelpunktes O vom Anfangspunkt. Es ist $x_0 = \frac{c^2}{\gamma_0}$. Durch Dif-

ferentiation erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{x_0^2 + c^2 t^2}}.$$

Für diesen Wert von v ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung $F(x_0 t v) = 0$ für $f(v)$ der Wert Null. Da dies für alle Werte von

$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{x_0^2 + c^2 t^2}}$ gelten muß, ist also $f(v)$ identisch gleich Null.

Die Gleichungen unserer Kurvenschar sind also in unserem Spezialfall

$$x_0 - t c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} = 0$$

oder

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{x_0^2 + c^2 t^2}}.$$

Die Integration ergibt $x^2 - c^2 t^2 = x_0^2$.

Es sind das dieselben Gleichungen, die Herr M. Born bei der Hyperbelbewegung eines Elektrons benutzt hat, und in der Tat ist

ja auch eine solche Hyperbelbewegung ein Spezialfall des hier betrachteten Typus, denn auch bei ihr verhält sich der beschleunigte Körper spannungsfrei. Er vertritt also den starren Körper der klassischen Mechanik.

Aus unserer Gleichung können wir alle unsere früheren Resultate ablesen. Es werden durch sie in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt ähnlich liegende Hyperbeln dargestellt, aber dieser Ähnlichkeitspunkt, der hier einfach der Mittelpunkt der Hyperbeln ist, liegt wegen $\gamma_0 = \text{const}$ im Inertialsystem fest, und da dieses zu Beginn der Bewegung mit dem Gravitationssystem zusammenfällt und für den Gravitationsbeobachter zufolge $\frac{dx^2}{d\tau_0} = -\left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right) \gamma_0$ dieser Punkt die Ruhbeschleunigung Null besitzt, so liegt er auch im Gravitationssystem dauernd fest.

Wir haben auf S. 263 und 264 eine Möglichkeit angegeben, wie man die Verhältnisse der Fig. 1 prinzipiell im Gravitationsfeld der Erde realisieren kann, doch setzt das voraus, daß die Vorgänge von Fig. 1 zeitlich und räumlich so beschränkt sind, daß wir das Feld als homogen auffassen können. Wir wollen jetzt eine zweite Möglichkeit angeben, die von diesen Beschränkungen frei ist. Wir stellen uns im Innern eines Inertialfeldes, an dessen Peripherie analog dem Fixsternhimmel Massen gleichmäßig verteilt sind, eine Reihe von ruhenden verbundenen oder unverbundenen Körpern mit verschwindender Masse vor. Einer von diesen soll in einer bestimmten Richtung so beschleunigt werden, daß seine Ruhbeschleunigung γ_0 dauernd konstant ist.

Für einen mit diesem Körper verbundenen Beobachter ergibt sich dann folgendes interessante Weltbild. Nur die Massen in seiner unmittelbaren Nähe gleiten mit der gleichen Beschleunigung γ_0 in entgegengesetzter Richtung an ihm vorüber, die vor ihm befindlichen haben eine Beschleunigung, die um so größer ist, je weiter sie von ihm entfernt sind. Die Beschleunigung der hinter ihm liegenden Dinge ist kleiner und wird für die auf einer bestimmten, senkrecht zu der Beschleunigungsrichtung stehenden, gar nicht sehr weit entfernten Ebene $\left(\text{Entfernung} = \frac{c^2}{\gamma_0}\right)$ gleich Null. Diese Dinge also entfernen sich trotz der Bewegung des Betreffenden nicht von ihm. Man könnte also den bewegten Beobachter durch eine Kette mit diesen Gegenständen verbinden, ohne daß die Kette reißt. Alle übrigen drängen sich von beiden Seiten nach dieser Ebene zusammen¹⁾. Wir wollen diese Ebene den Horizont des Beobachters nennen. Der

¹⁾ Die Weltlinien der Punkte hinter dieser Ebene sind durch die zweiten Äste der Hyperbel gegeben. Man ergänze die Fig. 1 entsprechend.

zeitliche Verlauf der Ereignisse nimmt nach diesem Horizont zu dauernd an Geschwindigkeit ab. Auf ihm selber scheint die Zeit stille zu stehen, hinter ihm scheint sie rückwärts zu laufen¹⁾.

¹⁾ Der Ausdruck „Scheinen“ könnte beanstandet werden. Er ist deshalb gewählt, weil diese Veränderungen des Zeitablaufs durchaus an das Koordinatensystem und an den Ort des Beobachters im Anfangspunkt desselben gebunden sind. Ein Beobachter, der sich dorthin begeben würde, wo in dem alten Koordinatensystem die Ereignisse rückwärts laufen, würde, an Ort und Stelle angelangt, hier wieder den normalen Zeitablauf konstatieren, da sich ja der Horizont entsprechend verschoben hat. Nichtsdestoweniger sind aber die geschilderten Verhältnisse in dem bestimmten Koordinatensystem durchaus wirklich in demselben Sinne wie etwa die relativen Bewegungen der Dinge in bezug auf ein einmal gewähltes Koordinatensystem in der alten Physik wirklich sind. Es sei gestattet, in diesem Zusammenhang noch einmal auf eine andere Begriffsbestimmung der alten Physik hinzuweisen, die ebenfalls unverändert in die relativistische übergeht. Wenn ich etwa die Dinge auf ein mit meinem Körper fest verbundenes Koordinatensystem beziehe und von vorn und hinten, oben und unten, links und rechts spreche und dann eine Drehung ausführe, so ist diese Drehung kausal bedingt durch Muskelspannungen meines Körpers. Die dadurch hervorgerufene Veränderung der Lage der Dinge relativ zum System, ihre zum Teil ungeheure Winkelgeschwindigkeit ist nur eine geometrische Folge dieser Drehung, die bedingt ist durch das räumliche Beisammensein der Dinge. Wir kennen also auch hier zwei verschiedene Modi von realen Veränderungen: die kausalen und die phänomenologischen. Diesen Unterschied finden wir nun in der Relativitätstheorie wieder. Wenn der Beobachter von der Ruhe zur beschleunigten Bewegung übergeht, so ist das kausal durch Spannungen zu erklären, die an Ort und Stelle eine Änderung in den Koinzidenzen hervorrufen. Diese kausale Veränderung hat nun ebenfalls phänomenologische zur Folge, die hier nur infolge des innigen Ineinanderseins von Raum und Zeit tiefer greifend sind. Es sind das die oben geschilderten. Diese phänomenologischen Veränderungen sind im Gegensatz zu den kausalen dadurch charakterisiert, daß sich die Koinzidenzen bei ihnen nicht ändern. Denn eine kausale Veränderung kann folgendermaßen definiert werden: Ein Körper ruft eine kausale Veränderung hervor in einem unmittelbar benachbarten Weltelement, wenn bei seiner Anwesenheit die Koinzidenzen in diesem andere sind als ohne ihn. Solche kausalen Änderungen sind streng auf die unmittelbare Umgebung dieses Körpers beschränkt, und zwar nicht deswegen, weil eine Nahwirkung an und für sich begreiflicher wäre als eine Fernwirkung, sondern deswegen, weil jede Fernwirkung die absolute Zeit voraussetzt. Die phänomenologischen Veränderungen dagegen sind an keine Entfernungen gebunden. Ein weiterer Unterschied ist folgender. Die kausalen Veränderungen pflanzen sich im leeren Raum mit Lichtgeschwindigkeit, in anderen Fällen mit Unterlichtgeschwindigkeit fort. Für die phänomenologischen gibt es keine obere Grenze. Wenn eine Lokomotive auf einer sehr großen materiellen Ebene anfährt und dann zur gleichförmigen Bewegung übergeht, so hat sich während des Anfahrens diese Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung verkürzt. Das ist, wie unsere Betrachtungen oben zeigen und wie auch anschaulich ohne weiteres klar ist, nur möglich, wenn Teile der Ebene, die hinreichend weit von der Lokomotive entfernt sind, während des Anfahrens Geschwindigkeiten relativ zur Maschine besitzen, die über jede Grenze wachsen. Das Entstehen dieser Geschwindigkeiten ist eine reale, aber keine kausale Folge der Arbeit des Dampfes. (Vgl. hierzu des Verf. Schrift: Die Relativitätstheorie und ihre Stellung im Rahmen der Gesamterfahrung, S. 63 u. 64.)

Diese Vorgänge hinter dem Horizont sind allerdings, solange der Beobachter beschleunigt bewegt wird, nicht beobachtbar, denn Lichtsignale können den Beobachter nur erreichen, wenn sie von Punkten vor dem Horizont ausgehen, da der von einem Punkt des Horizonts ausgehende Lichtkegel die Weltlinie des Beobachters nur asymptotisch berührt. Geht aber die Bewegung in eine gleichförmige über, so würden die Lichtsignale auch das Resultat dieses Vorgangs anzeigen. Wir wollen gegen Schluß der Arbeit noch einmal hierauf zurückkommen.

Im folgenden Teil der Arbeit wollen wir die Entstehung der Lorentztransformation bei einem völlig anders gearteten Vorgang verfolgen. Es soll der Körper A_1B_1 nicht spannungsfrei beschleunigt werden wie vorher, sondern wir wollen ihn uns in derselben Weise in Bewegung gesetzt denken, wie eine Lokomotive einen Zug in Bewegung setzt. Es werden von ihr Spannungswellen ausgehen, die den Zug durchlaufen, und erst wenn der Zug seine volle Geschwindigkeit hat, werden wieder stationäre Verhältnisse eintreten. Diesen Vorgang wollen wir genau wie früher einmal von dem Inertialsystem aus betrachten. Die Koordinaten der Weltpunkte sollen mit x, y, z, u bezeichnet werden, so daß das Weltlinienelement die Form hat $d\tau^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Zweitens soll der Vorgang von einem System aus betrachtet werden, in dem der Zug mit allen seinen Teilen dauernd ruht. Die allgemeine Relativitätstheorie gibt uns die Freiheit trotz der durch die Spannungswellen verursachten relativen Bewegungen der Punkte des Zuges ein solches vom Inertialbeobachter aus „molluskenartiges“ Bezugssystem einzuführen. Die Koordinaten in diesem System sollen mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet werden. Das Weltlinienelement können wir, aus denselben Gründen wie früher ausgeführt wurde, in der Form

$$d\tau^2 = g_4 dx_4^2 - g_1 dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (4)$$

ansetzen; doch werden nun, da das Feld nicht mehr stationär ist, g_1 und g_4 Funktionen von x_1 und x_4 sein. Wir versuchen sie wieder mit Hilfe des Einsteinschen Gravitationsgesetzes zu bestimmen.

Die Determinante von 4 hat den Wert $g = -g_1 g_4$, da $g_{11} = -g_1$, $g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = g_4$ ist, während alle übrigen g_{ik} verschwinden. Die normierten Unterdeterminanten g^{ik} sind also $g^{11} = -\frac{1}{g_1}$, $g^{22} = g^{33} = -1$, $g^{44} = \frac{1}{g_4}$. Die übrigen sind gleich Null. Von den

Klammerausdrücken $\left\{ \begin{smallmatrix} jk \\ l \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_i g^{il} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right)$ sind

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \begin{Bmatrix} 41 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_4}, & \begin{Bmatrix} 44 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_4}{\partial x_1}, & \begin{Bmatrix} 44 \\ 4 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_4}{\partial x_4}, \\ & & \begin{Bmatrix} 14 \\ 4 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_4}{\partial x_1}, & \begin{Bmatrix} 11 \\ 4 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Alle anderen sind gleich Null. Wie ersichtlich, ändern sich diese sechs Gleichungen nicht, wenn man überall die Indizes 1 und 4 vertauscht.

Hieraus ergeben sich die Werte der Größen

$$R_{kl} = \sum_m \frac{\partial \begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix}}{\partial x_l} - \sum_m \frac{\partial \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}}{\partial x_m} + \sum_{mn} \begin{Bmatrix} kn \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lm \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } R_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_4} \frac{\partial g_1}{2 g_1 \partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{2 g_1 \partial x_4} + \frac{1}{4} \frac{\partial g_1}{\partial x_4} \frac{\partial g_4}{g_1 \partial x_1} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_4}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{g_1 \partial x_4} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial g_4}{\partial x_1} \frac{\partial g_4}{g_4 \partial x_4} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_4}{\partial x_4} \frac{\partial g_4}{g_4 \partial x_1}. \end{aligned}$$

Den Wert R_{44} erhält man nach der Bemerkung oben, wenn man überall die Indizes 1 und 4 vertauscht. Die übrigen R_{ik} sind identisch gleich Null. Wenn wir nun annehmen, daß die beiden materiellen Bezugssysteme von so geringer Masse sind, daß wir deren Rückwirkung auf das Feld vernachlässigen können, so müssen $R_{11} = R_{44} = 0$ sein (Einsteinsches Gravitationsgesetz für den leeren Raum). Ein Integral dieser beiden partiellen Differentialgleichungen erhält man, wenn man $g_1 = g_4 = q$ setzt, da dann die vier letzten Glieder verschwinden und die beiden ersten sich in beiden Gleichungen nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Die beiden Gleichungen reduzieren sich also auf die eine Gleichung:

$$\partial \frac{2q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_1} - \partial \frac{2q}{\partial x_4} \frac{\partial q}{\partial x_4} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \ln q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \ln q}{\partial x_4^2} = 0.$$

Diese Gleichung ist aus der Wellenlehre bekannt und hat als allgemeinste Lösung das Integral $\ln q = f(x_4 + x_1) + \varphi(x_4 - x_1)$, wo f und φ zwei beliebige Funktionen bedeuten. Es ist also $q = l^{f(x_4 + x_1) + \varphi(x_4 - x_1)} = F(x_4 + x_1) \Phi(x_4 - x_1)$. Hier bedeuten F und Φ ebenfalls irgendwelche Funktionen von $x_4 + x_1$ beziehungsweise $x_4 - x_1$.

Diskussion der Lösung. Wir fragen zunächst nach den Transformationsformeln zwischen den Koordinaten eines Weltpunktes, gemessen im Inertialsystem und denen desselben Punktes im Gravitationssystem, das heißt also nach den Formeln, die $d\tau^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ überführen in $d\tau^2 = F(x_4 + x_1) \Phi(x_4 - x_1) dx_4^2 - F(x_4 + x_1) \Phi(x_4 - x_1) dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$.

Es sind das die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x_4 + x_1) - \varphi_2(x_4 - x_1); & y &= x_2 \\ u &= \varphi_1(x_4 + x_1) + \varphi_2(x_4 - x_1); & z &= x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Denn wenn man $\frac{d\varphi_1(x_4 + x_1)}{d(x_4 + x_1)}$ mit φ'_1 und $\frac{d\varphi_2(x_4 - x_1)}{d(x_4 - x_1)}$ mit φ'_2 bezeichnet, haben wir

$$\begin{aligned} dx &= dx_1(\varphi'_1 + \varphi'_2) + dx_4(\varphi'_1 - \varphi'_2); & dy &= dx_2 \\ du &= dx_1(\varphi'_1 - \varphi'_2) + dx_4(\varphi'_1 + \varphi'_2); & dz &= dx_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Es ist also

$$d\tau^2 = 4\varphi'_1\varphi'_2 dx_4^2 - 4\varphi'_1\varphi'_2 dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \quad (6a)$$

Wenn man also die willkürliche Funktion $2\varphi'_1$ und $2\varphi'_2$ mit F und Φ identifiziert, ergibt sich unsere Behauptung. Aus (6) folgt, wenn wir bedenken, daß für den im Gravitationssystem mit allen seinen Teilen dauernd ruhenden Zug dx_1 gleich Null ist, durch Division die Bewegungsgleichung

$$\frac{dx}{du} = \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\varphi'_1 + \varphi'_2}. \quad (7a)$$

Da in ihr noch die Koordinaten beider Systeme vorhanden sind, wollen wir uns (5) nach $x_4 + x_1$ und $x_4 - x_1$ aufgelöst denken. Man sieht durch Addition und Subtraktion ohne weiteres, daß $\varphi'_1(x_4 + x_1)$ nur eine Funktion von $u + x$ und entsprechend $\varphi'_2(x_4 - x_1)$ eine solche von $u - x$ ist. Berechnen wir diese Funktionen mit ψ'_1 bzw. ψ'_2 und schreiben für u wie gewöhnlich ct , dann nimmt das Weg-Zeitgesetz des Zuges im Inertialsystem die Form an

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{\psi'_1(ct + x) - \psi'_2(ct - x)}{\psi'_1(ct + x) + \psi'_2(ct - x)}. \quad (7b)$$

Diese Gleichung ist aus der Hydrodynamik der speziellen Relativitätstheorie, die von Herglotz und Lamla ausführlich behandelt ist, wohl bekannt. Sie stellt ebene longitudinale Wellen von endlicher Amplitude, die in einem adiabatischen Medium geringster Zusammenrückbarkeit längst der x -Achse fortschreiten, dar. Es zeigt sich an dieser Stelle die Wirkung der Spezialisierung, die wir oben bei unserem Problem vorgenommen hatten, als wir willkürlich g_1 gleich g_4 setzten, darin, daß unsere Formeln beschränkt sind auf ein solches ideales

Medium. Wir wollen also im folgenden annehmen, daß ein solches Medium vorhanden ist, das sich längst der x -Achse vom Anfangspunkt in der positiven Richtung bis zur Länge l erstreckt. Dieses möge im Inertialsystem bis zur Zeit $u = ct = 0$ ruhen und dann durch eine auf die yz -Ebene wirkende Druckkraft nach einem beliebigen Gesetz beschleunigt werden. Von dieser Ebene aus werden Spannungswellen in der positiven Richtung der x -Achse das Medium durchheilen. Wir wollen nun unser Problem noch weiter spezialisieren, indem wir für das hintere Ende eine innere Reibung von solcher Beschaffenheit voraussetzen, daß diese Wellen dort vollständig abgefangen werden. Dann werden, wenn die beschleunigte Bewegung der ersten Schicht gleichförmig geworden ist, zuletzt stationäre Verhältnisse eintreten und das ganze Medium wird sich spannungsfrei weiter bewegen. Wir passen unsere Formeln diesen Verhältnissen an, indem wir $\psi'_1(ct + x)$ gleich einer Konstanten setzen, der wir offenbar jeden Wert außer Null geben können. Unter dieser Voraussetzung sind mit Hilfe des vorgeschriebenen Weg-Zeitgesetzes für den Zuganfang die Funktionen φ_1 und φ_2 vollständig bestimmt. Um das zu beweisen, wollen wir die Formeln 5 abändern, indem wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(x_4 + x_1) + \frac{x_4 + x_1}{2} - f_2(x_4 - x_1) - \frac{(x_4 - x_1)}{2} \\ u &= f_1(x_4 + x_1) + \frac{x_4 + x_1}{2} + f_2(x_4 - x_1) + \frac{(x_4 - x_1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wenn $\psi'_1(ct + x)$ eine Konstante ist, kann auch $\varphi'_1(x_4 + x_1)$ nur eine solche sein, das heißt $f_1(x_4 + x_1)$ ist ebenfalls konstant. Da dx/dt für alle Werte von $t < 0$ nach der Annahme, daß bis zu diesem Zeitpunkt der Zug im System (xt) ruht, gleich Null ist, so ist für solche Werte von t auch $\psi'_2(ct - x)$ konstant und daher für die entsprechenden von $x_4 - x_1$ auch $f_2(x_4 - x_1)$ konstant. Aus (8) folgt zudem, weil bis zu diesem Moment $x = x_1$ und $u = x_4$ ist, daß diese beiden Konstanten $f_1(x_4 + x_1)$ und $f_2(x_4 - x_1)$ gleich Null sind. Zur weiteren Bestimmung von f_2 bedienen wir uns des gegebenen Weg-Zeitgesetzes für den Zuganfang. Dieses möge lauten $x = f(u)$. Für den Zuganfang ($x_1 = 0$) nimmt (8) die Form an

$$\left. \begin{aligned} x &= -f_2(x_4) \\ u &= x_4 + f_2(x_4) \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Setzen wir diese Werte in $x = f(u)$ ein, so ergibt sich die Gleichung $-f_2(x_4) = f[x_4 + f_2(x_4)]$, (9) die nach $f_2(x_4)$ aufgelöst die Form von f_2 vollständig bestimmt. Damit ist unser mechanisches Problem gelöst.

Wenn wir unsere Untersuchung noch etwas fortsetzen, finden wir für den Gravitationsbeobachter folgende interessanten Beziehungen. Die Bewegungsgleichung für die im ursprünglichen Inertialsystem ruhenden materiellen Teile ergibt sich für den Gravitationsbeobachter durch Differentiation der ersten Gleichung von (8). Es ist allgemein

$$dx = dx_1 - f'_2(x_4 - x_1)(dx_4 - dx_1).$$

Für im Inertialsystem ruhende Körper ist dx gleich Null.

Wir haben also

$$\frac{dx_1}{dx_4} = \frac{f'_2(x_4 - x_1)}{1 + f'_2(x_4 - x_1)}.$$

Die Funktion $f'_2(\xi)$ hat nach (8) und (8a) für $\xi < 0$ den Wert Null. Denn für $u < 0$ ist $x = 0$. Also $f_2(x_4) = 0$ und $u = x_4$.

Für Werte von u , die größer als Null sind, lautet die Bewegungsgleichung des Zuganfangs $x = f(u)$. Hier ist $f(u)$ eine beliebige

Funktion von u , bis zur Zeit $u = +a$ wieder stationäre Verhältnisse eingetreten sind. Von diesem Moment ab

nimmt diese Gleichung die Form an $\frac{dx}{du} = \text{const.}$, oder,

wenn wir die aus (8a) berechneten Werte von dx

und du einsetzen: $\frac{-f'_2(x_4)}{1 + f'_2(x_4)}$

$= \text{const.}$ Es ist also für

den Wert von x_4 , der nach

(8a) dem Wert $u = a$ entspricht, und für alle größeren $f'_2(x_4) = \text{const.}$ Dieser Wert sei a_1 . Die Funktion $f'_2(\xi)$ wächst also von $\xi = 0$ bis $\xi = a_1$ nach einem durch $x = f(u)$ bestimmten Gesetz und ist von da ab eine Konstante.

In der Fig. 2 haben wir im System (x_1, x_4) die Weltlinien gezeichnet. Da in diesem System der Zug mit allen seinen Teilen dauernd ruht, sind seine Weltlinien die in der Figur stark wiedergegebenen vertikalen Geraden. Die beiden geneigten Parallelen sind die Geraden $x_4 - x_1 = 0$ und $x_4 - x_1 = a_1$. Der von ihnen gebildete Streifen teilt die Ebene in zwei Teile. Unterhalb desselben gilt für die Koordinaten der dort befindlichen Weltpunkte die Beziehung $x_4 - x_1 < 0$. Für die oberhalb liegenden ist $x_4 - x_1 > a_1$. Nach dem Vorbergehenden sind also die Weltlinien der im Inertialsystem ruhenden Punkte die schwach gezeichneten parallelen Linienzüge.

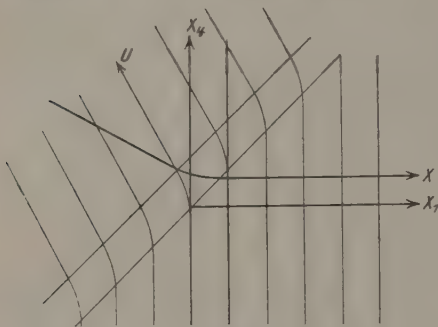


Fig. 2.

Für den Gravitationsbeobachter liegen die gleichzeitigen Ereignisse auf den Ebenen $x_4 = \text{const.}$ Denken wir uns diese von $x_4 = -\infty$ bis $x_4 = +\infty$ verschoben, so sehen wir, wie von der negativen x -Achse eine ebene Gravitationswelle¹⁾ von endlicher Amplitude nach der positiven Richtung fortschreitet, die im Moment $x_4 = 0$ unseren Zug erreicht. Sie ist die Veranlassung, daß die erdfesten materiellen Teile sich in Schichten, die zur Zugrichtung senkrecht stehen, sukzessiv von dem Zug entfernen und Gegenstände im Zug stürzen. Ist die Welle vorübergegangen, dann haben alle relativ zur Erde ruhenden Gegenstände und diese selbst eine gleichförmige Bewegung in entgegengesetzter Richtung. Zugleich aber weisen sie die Lorentzverkürzung auf, ebenso wie mit ihnen verbundene Uhren nach dem bekannten Gesetz langsamer gehen.

Wenden wir uns jetzt wieder unserer eigentlichen Aufgabe zu. Wenn die Bewegung stationär geworden ist, müssen die Transformationsformeln (6) in Verbindung mit der Maßbestimmung (6a) die Lorentztransformationen darstellen. In diesem Falle sind ψ'_1 und ψ'_2 const. Aus der Maßbestimmung (6a) ergibt sich zunächst, daß eine natürlich mit starren im System ruhenden Maßstäben gemessene Raumstrecke, die in der Richtung der x -Achse liegt ($dx_4 = dx_2 = dx_3 = 0$), nicht die Länge dx_1 , sondern die Länge $dx_1^* = 2 dx_1 \sqrt{\varphi'_1 \varphi'_2}$ besitzt. Ebenso hat eine Zeitstrecke ($dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$) nicht die Länge dx_4 , sondern $dx_4^* = 2 dx_4 \sqrt{\varphi'_1 \varphi'_2}$. Ersetzen wir dx_1 und dx_4 durch diese natürlich gemessene Länge und schreiben für $\frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\varphi'_1 + \varphi'_2}$ nach (7a) den Wert v und also für $\frac{2 \sqrt{\varphi'_1 \varphi'_2}}{\varphi'_1 + \varphi'_2}$ den Wert $\sqrt{1 - v^2}$, so nimmt (6) die Form an:

$$dx = \frac{dx_1^* + v dx_4^*}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$du = \frac{v dx_1^* + dx_4^*}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

¹⁾ Die Gravitationswellen sind von A. Einstein (in der Beschränkung auf solche mit unendlich kleiner Amplitude) in den Berliner Sitzungsberichten 1918, S. 154, behandelt. Unsere Welle gehört zu den uneigentlichen, die wir in unserer Nomenklatur phänomenologische nennen. Solche rufen an den Koinzidenzen keine Veränderung hervor und erzeugen auch im besonderen keine elastischen Spannungen. Trotzdem sind sie in ihrem Koordinatensystem durchaus real und rufen alle phänomenologische Veränderungen, wie die Änderung der Ganggeschwindigkeit von Uhren und die Lorentzverkürzung in den Körpern, hervor, über die sie hinweggeglitten sind (vgl. Fußnote S. 195).

* Wir können $\sqrt{\varphi'_1 \varphi'_2}$ als reell voraussetzen, denn sollte $\varphi'_1 \varphi'_2$ negativ sein, so ersetze man φ'_1 und φ_1 durch $-\varphi'_1$ und $-\varphi_1$.

Das sind in der Tat die Lorentztransformationen, wenn man, wie wir, die Zeiteinheit so gewählt hat, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist.

Wir sehen auch an diesem zweiten Beispiel, daß ein bewegter Körper, sobald er spannungsfrei geworden ist, die Lorentzverkürzung aufweist. In beiden Fällen ergibt sich die Lorentztransformation als eine Folge der relativistischen Dynamik. Da diese Dynamik unter der Voraussetzung der relativistischen Kinematik, also unter der Voraussetzung der Existenz der Lorentztransformation abgeleitet ist, so könnte es scheinen, als ob wir uns überhaupt im Kreise gedreht haben. Das ist aber insofern nicht der Fall, als, die Richtigkeit dieser Dynamik vorausgesetzt, damit noch nicht bewiesen ist, daß diese Dynamik mit ihren elastischen Spannungen nun auch vollständig ausreicht, um die Lorentztransformation herbeizuführen. Es könnte recht wohl sein, wie man auch schon vermutet hat, daß noch besondere, bis jetzt nicht bekannte Kräfte nötig sind, um die Lorentztransformation herbeizuführen. Daß wir nach solchen Kräften nicht zu suchen brauchen, scheinen mir die Ausführungen oben zu beweisen.

Das Uhrenparadoxon¹⁾.

Wir wollen von unseren Formeln jetzt eine Anwendung machen, die in der Geschichte der Relativitätstheorie eine gewisse Rolle gespielt hat.

Die Weltlinien von zwei Beobachtern seien die in Fig. 3 gezeichneten. Der Beobachter A soll dauernd in einem Inertialsystem ruhen; seine Weltlinie ist die vertikale Gerade OA . In dem Punkt O möge ein zweiter Beobachter B mit A zusammentreffen und sich dann in der Richtung der x -Achse nach einem beliebigen Weg-Zeitgesetz entfernen, darauf sich umwenden und auf der x -Achse in umgekehrter Richtung wieder dem Beobachter sich nähern, bis sie im Weltpunkt A zusammentreffen. Die Weltlinie von B ist also eine beliebige O und A verbindende Kurve. Wenn nun

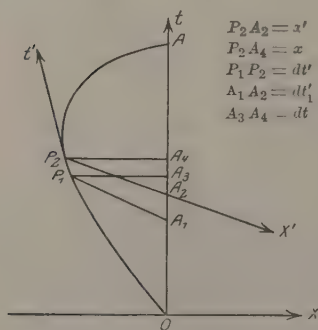


Fig. 3.

¹⁾ In diesem Teil vgl. die elementare Behandlung des Themas bei Bloch, „Einführung in die Relativitätstheorie“ und die Debatte zwischen Gehrcke und Thirring, insbesondere Naturwissenschaften 9, 209, 1921.

beim ersten Zusammentreffen die beiden Beobachter ihre Uhren übereinstimmend gestellt haben — wir wollen annehmen, daß die Zeitzählung für beide von diesem Moment an beginne —, so ist bei ihrem zweiten Zusammentreffen in A die Uhr des zweiten Beobachters zurückgeblieben. Es handelt sich also mit anderen Worten um das viel diskutierte Uhrenparadoxon. An der Tatsache selbst ist kein Zweifel möglich, und zwar ergibt sich die Behauptung sowohl, wenn wir die Zeitmessungen von A , wie wenn wir die Zeitmessungen von B zugrunde legen. Für A nämlich ist die raumzeitliche Verschiebung $P_1 P_2 = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}$. Dieselbe Form hat diese raumzeitliche Verschiebung in jedem anderen Inertialsystem. Wählen wir ein solches, in dem B momentan ruht, mit den Koordinatenprojektionen dx' und dt' , so hat in ihm die raumzeitliche Verschiebung dieselbe Form und das Linienelement infolgedessen den Wert $\sqrt{c^2 dt'^2 - dx'^2}$; für $P_1 P_2$ ergibt sich also ($dx' = 0$) die Größe cdt' . Es ist also $dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, wenn v die momentane Geschwindigkeit von B in dem System A bedeutet. Hieraus ergibt sich durch Integration $t'_A = \int_0^{t_A} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$. Es ist also t'_A kleiner als t_A .

Für den Beobachter B stellt sich die Rechnung folgendermaßen. Die Transformationsformeln zwischen den Koordinaten desselben Weltpunktes seien unsere Formeln (5) und (6). Es sind das zwar nicht die allgemeinsten Transformationen. Wir haben aber oben bewiesen, daß man bei passender Wahl von φ_1 und φ_2 dem Zuanfang jede beliebige Bewegung vorschreiben kann. Wenn sich also die Uhr des B am Anfang des Zuges befindet, so ist trotzdem das Problem ohne jede Beschränkung gelöst. Die Eigenzeit dieser Uhr ergibt sich für B aus (6a), wenn man $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ setzt. Sie ist

$$\int dx_4 \sqrt{4\varphi'_1 \varphi'_2}.$$

Dieser Wert ist aber identisch mit $\int du \sqrt{1 - v^2}$, da $du = dx_4 (\varphi'_1 + \varphi'_2)$ und $v = \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\varphi'_1 + \varphi'_2}$ ist.

Trotzdem also die Tatsache selbst sichergestellt ist, können wir kaum hoffen, die Gegner durch diese Überlegungen zu überzeugen, wenn es uns nicht gelingt, zu zeigen, wie dieses Zurückbleiben der Uhr B sich mit Notwendigkeit aus ihrer Entfernung, ihrer Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt¹⁾. Wir wollen deswegen

¹⁾ Ein Beispiel für die Begriffsverwirrung auf diesem Gebiet ist eine kürzlich erschienene Betrachtung von K. Vogtherr in der Naturwissenschaftlichen Wochen-

die Zeigerstellung der Uhr A berechnen, die der zweite Beobachter in irgend einem Weltpunkt P an dieser Uhr in dem Moment abliest, der für ihn mit seiner augenblicklichen Zeigerstellung gleichzeitig ist. Es ist oft genug betont worden, daß eine solche Frage nach der Gleichzeitigkeit erst Sinn bekommt, wenn über die Zeitmessung bestimmte Voraussetzungen gemacht sind. Solche Voraussetzungen sind auch schon für A nötig und es sind die aus der speziellen Relativitätstheorie bekannten (die Zeit soll so gemessen werden, daß die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem konstant ist). Für B wollen wir nun die Zeitmessung definieren durch das Prinzip von der Umkehrbarkeit des Lichtweges und also diejenige Zeitmessung zugrunde legen, die wir in der ersten Abhandlung benutzt haben. Wir wollen jetzt alle Verhältnisse so darstellen, wie B sie beobachtet, wenn er sich für in Ruhe befindlich hält. Für ihn ist dann ein Gravitationsfeld vorhanden, das für hinreichend kleine Zeiten stationär ist. Wir berechnen die Länge des Weltlinienelementes $A_1 A_2$ sowohl im Koordinatensystem (x, y, z, t) wie im Koordinatensystem $(x' y' z' t')$ und setzen diese invarianten Größen einander gleich. Wir erhalten mit Hilfe von 1 und der ihr im Inertialsystem entsprechenden Invarianten die Gleichung

$$c^2 dt_1^2 = c^2 dt'^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right)^2 - dx'^2$$

oder

$$dt_1 = dt' \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2}{c^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right)^2}}$$

Dieses ist die Beziehung zwischen dem Zeitablauf dt' einer im Anfangspunkt P des Gravitationssystems ruhenden Uhr und einer im Gravitationssystem im Punkte x' befindlichen, mit der Geschwindigkeit $\frac{dx'}{dt'} = v'$ bewegten Uhr. Ruht auch diese, so erhalten wir wieder unsere bekannte Gleichung $dt_1^0 = dt' \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right)$. Messen wir die Ge-

schrift Nr. 39 mit dem Titel „Ein neues Uhrenparadoxon“. Hier will der Verfasser ein neues für die Relativitätstheorie belastendes Uhrenparadoxon entdeckt haben, das zu unmöglichen Konsequenzen führe. Aber der Satz von J. Petzoldt, auf den er sich beruft, ist in seinem zweiten Teil irrtümlich und auch schon von H. Reichenbach (Logos X, Heft 3, S. 337) zurückgewiesen. Es lesen allerdings zwei aneinander vorübergleitende Beobachter an derselben Uhr eine verschiedene Zeigerstellung ab, aber doch nur, wenn die Uhr sich nicht auch an diesem Koinzidenzpunkt befindet. Wenn man das berücksichtigt, verläuft auch die Explosion der Höllenmaschine auf Seite 498 so, daß sie wenigstens für die Relativitätstheorie völlig ungefährlich ist.

schwindigkeit nicht in Systemzeit dt' , sondern mit einer an Ort und Stelle befindlichen ruhenden Uhr, so erhalten wir für diese natürlich gemessene Geschwindigkeit $v = \frac{dx'}{dt_1^0} = \frac{dx'}{dt'} \frac{dt'}{dt_1^0}$ den Wert $\frac{v'}{1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2}}$.

Mit Benutzung dieses Wertes geht die Gleichung über in

$$dt_1 = dt' \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9)$$

Durch Integration ergibt sich hieraus für die Zeigerstellung der Uhr in A_2 der Wert

$$t_{A_2} = \int_0^{t'_{P_2}} dt' \left(1 + \frac{\gamma_0 x'}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10)$$

Das Differential der rechten Seite läßt sich so umformen, daß nur noch Größen vorhanden sind, die sich auf das Inertialsystem (x, t) beziehen. Wir benutzen dazu in einer Zwischenrechnung, wie oben, ein zweites Inertialsystem, und zwar dasjenige, in dem der Punkt P_2 momentan ruht. In bezug auf dieses besitzt das erste ebenfalls die Geschwindigkeit v und der Punkt P_2 infolgedessen als Anfangspunkt des zweiten Systems gegen System (x, t) die Geschwindigkeit $-v$. Es ist also zunächst $dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Der Wert γ_0 bedeutet die Ruhbeschleunigung von P_2 . Infolgedessen ist nach dem Additionstheorem der Beschleunigungen die Beschleunigung γ von P_2 in dem System (x, t) gleich $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3 \gamma_0$. Um die Beziehung zwischen x' und x zu finden, wollen wir vorübergehend den Beginn der Zeitzählung nach P_2 verlegen und nach diesem Punkt auch den Koordinatenanfangspunkt von (x, t) verschieben. Dann gelten für diese beiden Hilfsysteme die Formeln der Lorentztransformation in ihrer gewöhnlichen Form

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}' - v\bar{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \bar{t} = \frac{\bar{t}' - \frac{v\bar{x}'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Zwischen den Koordinaten des Punktes A_2 in beiden Systemen ergeben sich die Gleichungen ($\bar{t}' = 0$)

$$P_2 A_2 = \bar{x} = \frac{\bar{x}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad A_4 A_2 = -\frac{v\bar{x}'}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v\bar{x}}{c^2}.$$

Da $\bar{x}' = x'$ und $\bar{x} = -x$, ergibt sich

$$x = -\frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad A_4 A_2 = \frac{vx}{c^2}.$$

Setzen wir die erhaltenen Werte von γ , x und dt in (10) ein, so ergibt sich

$$t_{A_2} = \int_0^t dt - \frac{v^2 dt}{c^2} - \frac{\gamma x dt}{c^2}.$$

Da nun $\frac{dx}{dt} = -v$ und $\frac{dv}{dt} = -\gamma$ und also $dx = -v dt$ und $dv = -\gamma dt$, so haben wir

$$t_{A_2} = \int_0^{t_{A_4}} dt + \frac{v dx}{c^2} + \frac{x dv}{c^2} = t_{A_4} + \frac{vx}{c^2} - \frac{v_0 x_0}{c^2}.$$

Das letzte Glied ist nach Voraussetzung, da zu Beginn der Bewegung $x_0 = 0$, gleich Null. Wir erhalten also

$$t_{A_2} - t_{A_4} = A_4 A_2 = + \frac{vx}{c^2}.$$

Ist nun auch am Schluß der Bewegung die Größe x wieder Null, so liest der zweite Beobachter an der Uhr des ersten die Zeit t_A ab, während er an seiner eigenen Uhr die Zeit

$$\int dt' = \int_0^{t_A} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

feststellt.

Damit hat das Uhrenparadoxon seine vollständige anschauliche Aufklärung gefunden und zu gleicher Zeit unsere Formel (9) eine neue Bestätigung. Vom Gravitationsbeobachter aus gesehen, wird der Gang der Uhr des ersten Beobachters durch zwei Umstände beeinflusst. Einmal ist sie für ihn eine mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegte Uhr, als solche würde sie dauernd zurückbleiben — es hängt das wie in der speziellen Relativitätstheorie mit der Parallelverschiebung der Zeitebene zusammen —, zweitens aber ist sie eine Uhr, deren Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist. Ist die Bewegung der Uhr eine beschleunigte, dann bleibt sie auch aus diesem Grunde zurück¹⁾, da sich dann die Zeitebene entsprechend drehen würde; ist die Bewegung verzögert, so wirkt das auf den Zeitablauf der Uhr beschleunigend. Immer aber ergibt sich durch das Zusammenwirken aller dieser Umstände die als Uhrenparadoxon bekannte Forderung der Relativitätstheorie.

¹⁾ Unter diesen Umständen kann es eintreten, daß diese Uhr rückwärts läuft. Vgl. S. 195.

Studien über den Durchgang von α - und β -Teilchen durch Gase¹⁾.

Von **Debendra Bose**, seinerzeit in Berlin.

Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 2. Oktober 1922.)

In der vorliegenden Arbeit wird eine Modifikation der Wilsonschen Expansionsmethode benutzt, um die Bahnen von α - und β -Teilchen in verschiedenen Spezialfällen photographisch aufzunehmen. Ein Teil der erhaltenen Resultate, nämlich die photographische Fixierung der Bahnen von H-Strahlen ist bereits 1916²⁾ veröffentlicht worden. Im folgenden sollen die weiter erhaltenen Resultate sowie die Beobachtungsmethode mitgeteilt werden, die einige Besonderheiten aufweist und sich bewährt hat.

Der Expansionsapparat besteht ganz aus Glas, ist deswegen leicht sauber zu halten. Der bewegliche Kolben des Wilsonschen Apparates ist durch ein gläsernes Ventil von großem Querschnitt ersetzt, das auf elektromagnetischem Wege plötzlich geöffnet werden kann und dann die Verbindung des Expansionsgefäßes mit einem luftverdünnten Raume herstellt. Durch geeignete Formgebung werden Wirbelungen in der Nebelkammer hintangehalten.

Die Nebelkammer V_1 (Fig. 1) von 12,5 cm Durchmesser ist in ihrem vorderen Teil auf etwa 20 cm Länge zylindrisch und durch eine mit weißem Siegelack aufge kittete Glasplatte verschlossen. In ihrem hinteren Teile, nach dem Ventil V zu, verjüngt sich die Kammer ganz allmählich, so daß bei der Expansion der vordere Teil, wo beobachtet wird, wirbelfrei bleibt. Das Ventil vermittelt die Verbindung von V_1 mit dem Raum V_2 , der durch Wasser gegen den Raum V_3 abgeschlossen ist. An V_3 kann die Wasserstrahlpumpe angeschlossen werden, so daß das Wasser in V_3 steigt und in V_2 ein luftverdünnter Raum entsteht. Die plötzliche Öffnung des Ventils V bewirkt die Expansion in V_1 , abhängig von der vorher bewirkten Senkung des Wasserspiegels in V_2 . Durch ein an die Nebelkammer angeschlossenes Manometer kann das Expansionsverhältnis gemessen werden.

Die Hebung des Ventiles V geschieht von außen durch einen Elektromagneten M_1 , welcher auf ein in Glas eingeschmolzenes Eisen-

¹⁾ Auszug aus der Berliner Dissertation. Die Arbeit ist in den Jahren 1914 bis 1918 im Physikalischen Institut der landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin ausgeführt worden und wird hier nach Besprechung mit Herrn Bose, der inzwischen nach Indien zurückgekehrt ist, von E. Regener (Stuttgart) mitgeteilt.

²⁾ Phys. ZS. **17**, 388, 1916.

stück T wirkt. Dieses zieht mit Hilfe einer Glasstange, der die Starrheit durch ein eingeschaltetes gläsernes Gelenk genommen ist, an dem Ventil V . Das Gelenk bewirkt, daß beim Ausschalten des Magnets das Ventil richtig auf den Schliff zu sitzen kommt. Die ganze Vorrichtung hält bei häufiger Benutzung sechs Monate und länger. Dann bekommt meist der äußere Schliffteil einen Sprung.

Für Versuche mit α -Strahlen wurde ein mit Polonium bedecktes Kupferblech von etwa 8×1 mm benutzt, das sich in einer kleinen

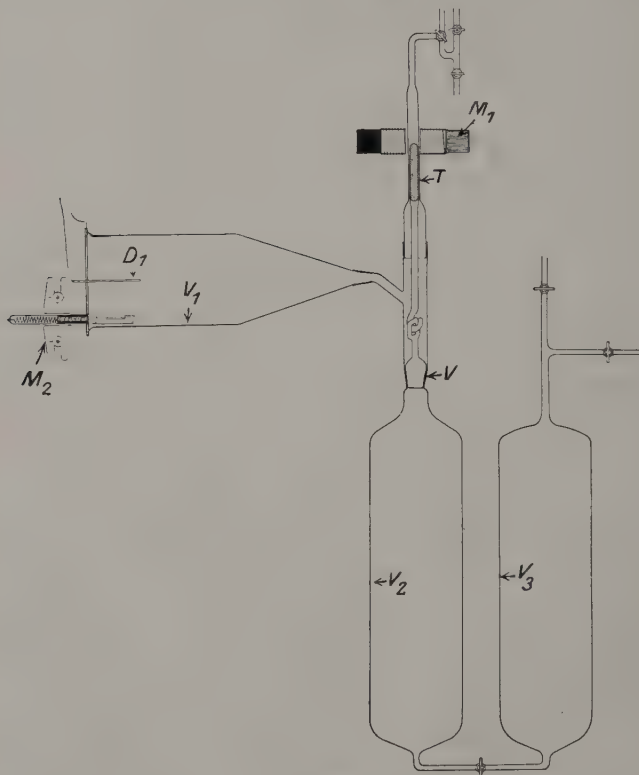


Fig. 1.

Kupferschachtel befand. Ein Glimmerschirm, der es gewöhnlich bedeckte, konnte durch den Elektromagneten M_2 (parallel mit M_1 geschaltet) von außen im geeigneten Moment weggezogen werden. D_1 ist ein Kupferdraht zur Erzeugung des elektrischen Feldes, das die überflüssigen Ionen fortschafft. Kurz vor der Expansion wurde das Feld meist abgeschaltet, da anderenfalls leicht Deformationen der Bahnen auftraten.

Für die Beleuchtung wurde die Wilsonsche Anordnung mit kleinen Abänderungen benutzt. Der Entladungsfunke von vier Leidener Flaschen ging durch den Quecksilberdampf einer angeheizten Quarzkapillare. Die Auslösung des Funkens erfolgte durch eine fallende Kugel. Die photographische Kamera stand senkrecht zu der Richtung des zur Beleuchtung dienenden Lichtkegels und in der Achse der Nebelkammer.

a) Photographischer Nachweis der Wasserstoffstrahlen. Mit dieser Anordnung wurden die Bahnen der H-Strahlen sichtbar gemacht, die durch den Stoß von α -Strahlen auf Wasserstoffatome entstehen¹⁾. Von 1038 gezählten α -Teilchen erzeugten sieben auf dem letzten Zentimeter ihrer Bahn H-Teilchen. Der Winkel zwischen den entsprechenden Bahnen der H-Teilchen und α -Teilchen lag schätzungsweise zwischen 40 und 80°. Nach den von Rutherford²⁾ und Darwin³⁾ angegebenen Formeln sollte die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß unter solchen Bedingungen $= \frac{7,7}{1000}$ sein.

Eine zweite Versuchsreihe ergab bei 1375 α -Teilchen elf wirksame Zusammenstöße, welche H-Strahlen, die im Winkel zwischen 40 bis 65° mit dem α -Teilchen abgingen, erzeugten. Theoretisch errechnet sich eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{6,5}{1000}$ für diesen Winkelbereich, während der experimentell gefundene Wert $= \frac{8}{1000}$ ist.

Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Berechnung ist recht gut. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Schätzung der Ablenkungswinkel nur eine rohe ist, da die perspektivische Verzeichnung bei der photographischen Aufnahme die wahren Winkel nicht ganz richtig wiedergibt.

b) Nachweis der großen Reichweite der H-Strahlen. Die unter a) beobachteten H-Strahlen waren fast am Ende der α -Teilchenbahnen durch Stoß erhalten worden, da die Reichweite durch einen Bremsschirm herabgesetzt war. Die Bahnen der H-Teilchen waren dementsprechend nur kurz. H-Strahlen von großer Reichweite müssen durch Stoß am Anfang der α -Teilchenbahn erzeugt werden. Da die Dimension der Nebelkammer nicht für die ganze Bahn der α - und H-Teilchen ausreichte, wurde zur Bremsung beider Strahlen in 2 cm

¹⁾ Näheres sowie eine Anzahl Abbildungen solcher Strahlen siehe die frühere Mitteilung: Phys. ZS., I. c.

²⁾ Rutherford, Phil. Mag. **21**, 674, 1911.

³⁾ Darwin, Phil. Mag. **27**, 500, 1914.

Entfernung von dem Poloniumpräparat ein Aluminiumblatt aufgestellt, welches die α -Teilchen so stark bremste, daß ihre Reichweite hinter dem Aluminium nur etwa noch 3 cm betrug. Die H-Strahlen können jetzt auch in dem Raum zwischen dem Poloniumpräparat und dem Aluminiumblatt entstehen. Eine typische solche Aufnahme ist in Fig. 2 wiedergegeben. Bei einer großen Anzahl von Aufnahmen in Wasserstoff wurden unter 1375 Ionisationsbahnen sechs gefunden, deren Länge, vom Aluminiumschirm aus gemessen, zwischen 5,4 und 6,5 cm lag, acht weitere von einer Länge zwischen 4,5 bis 4,8 cm hinter dem Schirm.

Damit die gewonnenen Aufnahmen für die Existenz von H-Strahlen von großer Reichweite beweiskräftig sind, mußte gezeigt werden, daß die längeren Bahnen nicht durch Poren oder eine Inhomogenität des Bremsschirms zustande gekommen sind. Dazu wurde das 0,0017 cm dicke Aluminiumblatt, soweit es als Bremsschirm in Wirkung trat, mit einem Mikroskop von 120facher Vergrößerung sorgfältig auf etwa vorhandene Löcher geprüft; es wurde keines wahrgenommen. Dann wurden die Aufnahmen der Reihe nach übereinandergelegt, um zu sehen, ob einige von den längeren Bahnen den Schirm an ein und derselben Stelle durchdrungen hatten. Wenn dies zutraf, dann mußte zugegeben werden, daß die längeren Bahnen durch die Inhomogenität des Schirmes zustande gekommen waren. Die Prüfung ergab aber, daß mit Ausnahme von einem Paar alle längeren Strahlen den Schirm stets in voneinander verschiedenen Punkten getroffen hatten, und zwar waren diese Stellen gleichmäßig über die ganze wirksame Fläche des Schirmes verteilt. Es erscheint also sehr wahrscheinlich, daß die längeren Ionisationsbahnen den durch Stoß erzeugten H-Strahlen zu kommen und nicht durch die Inhomogenität des Bremsschirmes entstanden sind.

Auch mit dünnen Glimmerschirmen wurden Bahnen erhalten, die beträchtlich länger als diejenigen der α -Teilchen waren. Bei einem besonders dicken Schirm betrug die Reichweite der α -Strahlen hinter dem Schirm nur einige Millimeter. Hierbei wurden einige H-Bahnen erhalten, deren Länge bis zu 2,5 cm betrug.

c) Negative Versuche, Wasserstoffstrahlen, die durch Zusammenstoß von α -Strahlen mit Wasserstoffverbindungen erzeugt sind, nachzuweisen. Schon Marsden¹⁾ hat hinter einer 10 μ dicken Paraffinschicht mit α -Strahlen Szintillationen erhalten, welche wegen ihrer großen Reichweite nicht von den α -Strahlen,

¹⁾ Phil. Mag. **30**, 240, 1915.

sondern von H-Teilchen herrühren müssen, die in der Paraffinschicht (einer Wasserstoffverbindung) gebildet sind. Versuche mit einem Gas, das Wasserstoff in Verbindung enthält, erschienen zur Erzeugung solcher H-Strahlen besonders deswegen aussichtsvoll, weil bei Anwendung eines geeigneten, dichterem Gases die Reichweite der α -Strahlen kleiner als der Durchmesser der Nebelkammer blieb, also kein Bremsschirm zur Herabsetzung der Reichweite nötig war. Es wurden deshalb Versuche mit Methan (CH_4 , Dichte 0,55) gemacht, das noch deswegen empfehlenswert war, weil jedes Molekül vier



Fig. 2.

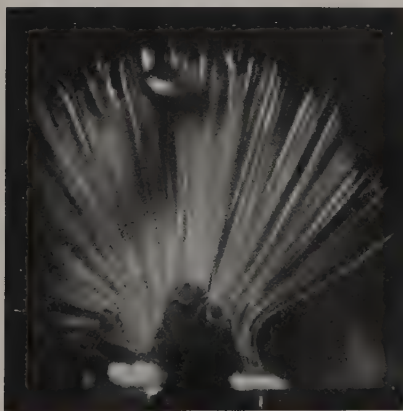


Fig. 3.

Wasserstoffatome enthält, die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Zusammenstoßes also groß zu erwarten war.

Die Versuche verliefen indessen negativ. Auf 25 Platten wurden 957 Bahnen gezählt, von denen keine einzige merklich länger als die anderen erschien. Eine sehr kleine Anzahl von Bahnen wurde erhalten, die am Ende verzweigt waren. Fig. 3 zeigt eine solcher Aufnahmen. Die Versuche wurden deshalb nicht weiter verfolgt. Sie beweisen natürlich nichts gegen die Möglichkeit, H-Strahlen auf diese Art zu erzeugen, zeigen aber, daß die Wahrscheinlichkeit ihrer Entstehung kleiner ist, als beim Stoß der α -Strahlen in reinem Wasserstoff, wo, wie unter a) gezeigt, eine viel größere Wahrscheinlichkeit gefunden wurde.

d) Verschiedene Beobachtungen. Gelegentlich wurde eine Diskontinuität der Bahnen der α -Teilchen beobachtet. Es scheint, daß diese Erscheinung mit zufälliger, aus den Versuchsbedingungen entspringender geringerer Dichtigkeit des Wasserdampfes an der Stelle der Diskontinuität zusammenhängt.

Relativ häufig wurde eine Ablenkung der α -Strahlen unter so großen Winkeln beobachtet, wie sie nach den Formeln von Darwin¹⁾ nicht zu erwarten sind. Ein Teil dieser großen Ablenkungen kann durch Zusammenstöße mit anderen, schweren Atomen hervorgerufen sein, z. B. mit den Sauerstoffatomen aus den Wasserdampfmolekülen. Fig. 4 a bis c geben solche Aufnahmen, bei denen diese Deutung vielleicht möglich ist. Die Zahl der großen Ablenkungen ist aber zu



Fig. 4 a.

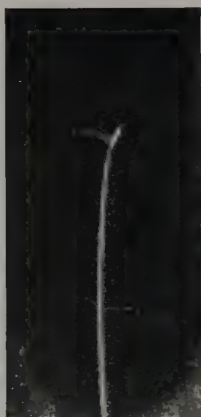


Fig. 4 b.



Fig. 4 c.

groß, um nur hierdurch erklärt zu werden. So gaben bei 1214 Bahnen 120 einen Knick in der Entfernung von 2 bis 3 mm vom Ende der Bahn, mit Ablenkungen, die mehr als 15° betrugen. Vielleicht sind die Formeln für derartig kleine Geschwindigkeiten der α -Strahlen nicht mehr gültig; es kann z. B. sein, daß beim Zusammenstoß ein merklicher Energieverlust durch Ausstrahlung stattfindet.

Eine merkwürdige Art von Ionisationsbahnen begann in der Mitte der Nebelkammer, weit entfernt von der α -Strahlenquelle als eine scharfe Bahn, die sich in zwei sehr diffuse Bahnen verzweigte. Diese Art von Bahnen hatte keine Ähnlichkeit mit den Bahnen, die die

¹⁾ Darwin, l. c.

Entstehung der H-Teilchen darstellen. Eine Erklärung für dieselben kann noch nicht gegeben werden.

e). Verhalten der α -Teilchen beim Auftreffen auf eine Kristallfläche. Die besonderen Verhältnisse an der Oberfläche fester Körper regten zu dem Versuche an, α -Strahlen unter einem schrägen Winkel auf kristallinische Körper fallen zu lassen. Als solche kommen insbesondere Wärme schlecht leitende Stoffe in Betracht; Metalle sind ungeeignet, weil es wegen ihrer großen Wärmeleitfähigkeit schwer gelingt, in der Nähe und auf der Oberfläche die für die Kondensation nötige Unterkühlung zu erhalten. Versuche mit dem schlechtleitenden Glimmer ergaben aber sehr merkwürdige Resultate.

Ein Glimmerblatt von 6×2 cm war mit Siegelack auf einem Kupferblech befestigt und schief in den Weg der α -Strahlen gestellt. War Luft in der Nebelkammer, so war das Glimmerblatt 2 cm, war Wasserstoff eingefüllt, so war es 4 cm von dem Poloniumpräparat



Fig. 5a.



Fig. 5b.

entfernt. Zwischen der Innenseite des Gefäßes V_1 (Fig. 1) und dem Träger des Poloniumpräparates oder dem Kupferblech hinter dem Glimmerblatt konnte ein elektrisches Feld angelegt werden. Von der Anwesenheit des Feldes hingen die beobachteten Erscheinungen ab.

Liegt das Feld zwischen der Kupferplatte mit dem Glimmerblatt und der Innenseite der Nebelkammer, so zeigen die Aufnahmen (Fig. 5a und b), daß die Bahnen der α -Teilchen geradlinig verlaufen bis zu der Stelle, wo sie mit der Glimmerplatte zusammentreffen. Dort erleiden sie eine scharfe Ablenkung und der Rest ihrer Bahn verläuft parallel zur Glimmeroberfläche. Dieser Teil der Bahn erscheint sehr diffus abgebildet und um so kürzer, je senkrechter der Anprall des α -Teilchens auf die Glimmerplatte erfolgte. Dies gilt sowohl für die α -Teilchenbahnen in Luft wie in Wasserstoff. Vor dem Zusammentreffen mit der geladenen Kristallfläche fangen die Bahnen an, etwas diffus zu erscheinen. In Wasserstoff macht sich dies stärker

bemerkbar als in Luft. Die Erscheinungen sind unabhängig von dem Vorzeichen des Feldes. Ähnliche Erscheinungen wurden an Glas beobachtet.

Liegt das Feld nicht an der Glimmerplatte, sondern nur zwischen dem Träger des Poloniumpräparates und der inneren Seite der Nebelkammer, so fehlen die beobachteten Besonderheiten an der Glimmerplatte. Die meist scharfen Bahnen verlaufen geradlinig bis zur Glimmerplatte, haben dort aber keine weitere Fortsetzung parallel zur Glimmerfläche.

Wollte man die Beobachtungen mit Feld primär erklären, so würde man die Tatsache haben, daß die α -Teilchen beim Auftreffen auf die Kristallfläche eine bevorzugte Ablenkung in die Richtung der Kristalloberfläche erfahren. Diese Erscheinung würde zweifellos mit unseren bisherigen Anschauungen über die Ablenkung der α -Strahlen schwer vereinbar sein. Es mahnt allerdings die Tatsache, daß ein Feld an der Glimmerplatte für das Auftreten der Erscheinung wesentlich ist, zur Vorsicht. Doch läßt sich denken, daß das Feld nur eine notwendige Bedingung zur Sichtbarmachung der Erscheinung ist. Oberflächen wie Glimmer und Glas halten nämlich beträchtliche Gas-mengen in Form einer dünnen Haut adsorbiert. Ein α -Teilchen, das längs der Oberfläche fliegt, muß in dieser Haut eine beträchtliche Ionisation hervorrufen. Liegt nun kein Feld unter der Glimmer- oder Glasfläche, so können die Ionen aus der Gashaut, wo sie stark unter der Wirkung der Adsorption stehen, nicht heraus. Ist dagegen das Feld wirksam, so werden die Ionen eines Vorzeichens aus der Gasschicht herausgestoßen und durch die Bildung von Wassertropfen bei der Expansion fixiert. Danach würde das Feld nur eine sekundäre Rolle spielen und die α -Teilchen wirklich in der Oberflächenschicht weiter verlaufen.

Bemerkenswert für die gegebene Deutung der Erscheinung sind Beobachtungen von Bumstead und Mc Guigan¹⁾, bei denen die adsorbierte Gashaut ebenfalls eine große Rolle spielt. Diese Beobachter untersuchten die Natur der δ -Strahlen, die von verschiedenen Metallflächen beim Auftreffen von α -Teilchen ausgesandt werden. Sie fanden, daß die Ionisationskurven sich für die verschiedenen Metalle sehr wenig voneinander unterscheiden. Jedoch nimmt die Größe des δ -Effektes ab mit weitgehender Verminderung der adsorbierten Gashaut. Sie vermuten infolgedessen, daß die ganze Erscheinung der δ -Strahlen allein von der adsorbierten Gasschicht abhängig ist²⁾.

¹⁾ Bumstead und Mc Guigan, Phil. Mag. **24**, 462, 1912.

²⁾ Eine erneute Durchsicht der Aufnahmen Herrn Boses führte mich zu folgender Erklärungsmöglichkeit, nach welcher die beobachtete Erscheinung an

f) Ionisationsbahnen der δ -Strahlen in Wasserstoff. Betrachtet man die Ionisationsbahnen der α -Strahlen in Wasserstoff genauer, so sieht man, daß einige von ihnen zackige Umrisse zeigen. Bei guter Vergrößerung lösen sich diese Zacken in eine Anzahl kleiner dünner Ionisationsbahnen auf (Fig. 6). Man muß sie wohl deuten als die Spuren von schnell bewegten Elektronen, die durch die Wirkung der α -Teilchen aus einigen Wasserstoffatomen entbunden sind.

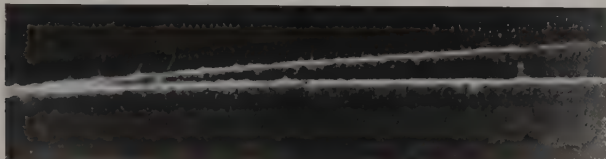


Fig. 6.

Schon Bumstead¹⁾ hat das Auftreten von δ -Strahlen in Wasserstoff von 90 bis 100 mm Druck nachgewiesen. An den hier erhaltenen Aufnahmen ist zu ersehen, daß auch bei dem verhältnismäßig hohen Druck von etwa 540 mm, wie er nach der Expansion in der Nebelkammer herrscht, die einzelnen δ -Strahlen sich in günstigen Fällen auf eine merkliche Wegstrecke durch ihre Ionisationsbahn nachweisen lassen.

g) Aufnahmen von β -Strahlen. Als Strahlungsquelle diente eine kleine Menge Radioblei, die in einem kleinen Glasröhrchen eingeschlossen war, das mit einem dünnen Kupferblech verschlossen war,

der Oberfläche der Glimmerplatte doch sekundärer Natur, d. h. erst nachträglich durch das Feld hervorgerufen ist. Herr Bose betont nämlich, daß die fraglichen α -Strahlbahnen sowohl vor dem Auftreffen wie auf der Glimmerplatte selbst diffus erscheinen (siehe Fig. 5 b). Solche diffus erscheinenden Aufnahmen erhält man von α -Strahlen, welche eine kleine Zeit vor dem wirksamen Expansionsgrad in die Nebelkammer eingetreten sind. Die Ionen dieser Strahlen haben sich dann unter der Wirkung des Feldes und der Diffusion eine Strecke weit von ihrem Entstehungsorte entfernt, bevor sie durch Kondensation mit Wassertropfchen fixiert wurden. Das auf den Aufnahmen mit der Oberfläche der Glimmerplatte parallel erscheinende Ende der α -Strahlen ist also nicht die ursprüngliche Bahn der betreffenden α -Teilchen, sondern die Ionenreihe, die nachträglich durch das Feld dorthin verschoben wurde. Allerdings müßten im allgemeinen Falle die Ionenreihen beiderlei Vorzeichens getrennt sichtbar erscheinen, was auf den Aufnahmen nicht der Fall ist. Auch müßte, wenn man einen niedrigen Expansionsgrad zuläßt, so daß nur die negativen Ionen sichtbar werden, die Erscheinung bei negativer Spannung an der Glimmerplatte besser gehen. Doch können bei den wenigen vorliegenden Aufnahmen die Bedingungen wohl passend gewesen sein, so daß mir diese Erklärungsweise nicht unmöglich erscheint. Weitere Versuche sollen gemacht werden. E. Regener.

¹⁾ Bumstead, Phys. Rev. (2) 8, 715, 1916.

das alle α -Strahlen und weicheren β -Strahlen zurückhielt. Die günstigsten Aufnahmen wurden bei einem Expansionsverhältnis von ungefähr 1,37 erhalten. Bei kleineren Expansionen beginnen die Spuren der β -Strahlen an Schärfe einzubüßen, während bei noch größeren Expansionen die einsetzende allgemeine Nebelbildung die Bahnspuren überschleiert. Es erwies sich als vorteilhaft, die Achse der photographischen Kamera in einem Winkel von 120° gegen die Richtung des zur Beleuchtung dienenden Lichtkegels zu stellen, um die schwachen Spuren der β -Strahlen gut auf die Platte zu bekommen. Der dünne Überzug von Gelatine, der bei den Versuchen mit α -Strahlen die innere Seite der Nebelkammer bekleidete, um den Niederschlag von Wasserdampf zu vermeiden, blieb bei diesen Versuchen fort, da er störende Nebelbildungen verursachte.

Die Aufnahmen, die mit dieser Anordnung von β -Strahlen erhalten wurden, erreichen nicht die Qualität der Aufnahmen von α -Strahlen, so daß von einer Reproduktion abgesehen werden muß. Über einige Folgerungen, die man über die Zerstreung von β -Strahlen, sowie über sekundäre β -Strahlen aus den Aufnahmen ablesen kann, läßt sich folgendes sagen: Die aus lauter kleinen Einzelablenkungen zusammengesetzte kumulative Streuung scheint bei langsamen β -Strahlen, die sich durch starke Ionenbildung auf den Aufnahmen kenntlich machen, die vorherrschende zu sein. Bei schnellen β -Strahlen tritt die kumulative Streuung wenig in Erscheinung, so daß sich die Teilchen über eine beträchtliche Strecke fast geradlinig zu bewegen scheinen. Dagegen treten Fälle auf, die sich deutlich als einfache (Einzel-)Streuung durch scharfen Knick unter großem Winkel in der Bahn erkennen lassen. Eine Angabe darüber, wie oft solche Einzelstreuungen auftreten, läßt sich leider nicht machen, da es bei der schwachen Ionisation, die die schnellen β -Teilchen geben, oft unmöglich ist, Knicke eines einzelnen Strahles von Überkreuzungen zweier Strahlen zu unterscheiden.

Bei der Ionisation, die durch β -Strahlen hervorgerufen wird, liegen bisher keine Beobachtungen vor, die sicher erkennen lassen, ob die β -Strahlelektronen durch Zusammenstoß mit Gasmolekülen aus den letzteren Elektronen frei machen, die Strahleigenschaft haben und das Gas ionisieren. Auf den Aufnahmen mit langsameren β -Strahlen ließen sich einige Stellen finden, wo eine Verzweigung der β -Strahlbahnen auftritt, wobei die Verzweigung meist unter einem großen Winkel von der primären Bahn abgeht. Der abgehende Strahl ist dabei meist kurz. Solche Verzweigungen wären als die Bahnen sekundärer Elektronen anzusprechen, die von dem primären β -Strahlelektron durch Stoß erzeugt sind.

Zusammenfassung.

Es wird eine ganz aus Glas hergestellte Modifikation des Wilsonschen Expansionsapparates beschrieben, bei welcher der Kolben durch ein Ventil von größerem Querschnitt ersetzt wird. Die photographischen Aufnahmen mit diesem Apparat zeigen:

a) Die Bahnen der H-Strahlen, die beim Durchgang von α -Teilchen durch Wasserstoff erzeugt werden.

b) Die große Reichweite dieser H-Strahlen.

c) Wegen der zu kleinen Zahl von Aufnahmen nicht die H-Strahlen, die beim Zusammenstoß von α -Strahlen mit Wasserstoffverbindungen entstehen sollen.

d) In einigen Fällen Ablenkungen von α -Strahlen über sehr große Winkel.

e) Merkwürdige Erscheinungen beim Auftreffen der α -Strahlen auf Glimmer- und Glasflächen.

f) Die Ionisationsbahnen der δ -Strahlen, die beim Durchgang der α -Strahlen in Wasserstoff entstehen.

g) Machen sie bei β -Strahlen zusammengesetzte und Einzelstreuungen und Verzweigungen von β -Strahlbahnen wahrscheinlich.

Die Absorptionsspektren von Thallium- und Indiumdampf.

Von **Walter Grottrian** in Göttingen.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 22. Okt. 1922.)

Die Bohrsche Atomtheorie hat gelehrt, daß von den zahlreichen Spektrallinien, die bei elektrischer Erregung in einem Gase oder Dampf in Emission auftreten, nur diejenigen bei thermischem Gleichgewicht und Fehlen jeder äußeren Erregung als Absorptionslinien erscheinen können, für die der Anfangszustand der Absorption ein Quantenzustand ist, in dem sich bei der betreffenden Temperatur genügend viele Atome oder Moleküle befinden, um die Absorption bemerkbar zu machen. Die Untersuchung der Absorptionsspektren hat damit neben anderem die prinzipielle Bedeutung gewonnen, Aufschluß zu geben über diejenigen Quantenzustände, in denen sich bei der betreffenden Temperatur die Mehrzahl der Atome oder Moleküle befindet. Während bei mehratomigen Molekülen — man denke z. B. an das Jodmolekül — die Zahl dieser Zustände sehr groß sein kann, weil die Rotations- und Schwingungsenergien im allgemeinen von der gleichen Größenordnung sind wie die Translationsenergie eines Moleküls bei gebräuchlichen Temperaturen, gibt es bei einatomigen Gasen und Dämpfen in der Regel nur einen Zustand, den Dauerzustand des Atoms, in dem sich bei nicht zu hohen Temperaturen praktisch sämtliche Atome befinden und der also auch den Anfangszustand darstellt für sämtliche Absorptionslinien, die überhaupt beobachtet werden können. Dieser Fall liegt z. B. vor bei den Dämpfen der Alkali- und Erdalkalimetalle, und da im Dauerzustand bei diesen Elementen das äußere Elektron in einer Quantenbahn mit der azimuthalen Quantenzahl $k = 1$ gebunden ist entsprechend einem s -Term ($1,5s$ bei den Alkalien, $1,5S$ bei den Erdalkalien), so werden die Linien der Hauptserien, und zwar nur diese vom unerregten Dampfe absorbiert, also für die Alkalien: $\nu = 1,5s - mp_i$ ($i = 1,2$), für die Erdalkalien: $\nu = 1,5S - mP$ und $\nu = 1,5S - mp_2$. Dies ist auch das Resultat der bisher vorliegenden Untersuchungen, die wir im wesentlichen Wood und McLennan¹⁾ verdanken und die sich mit wenigen Aus-

¹⁾ R. W. Wood, *Astrophys. Journ.* **26**, 41, 1907; *Phys. ZS.* **10**, 88 u. 466, 1909; J. C. McLennan, *Phil. Mag.* **28**, 360, 1914; J. C. McLennan u. E. Edwards, ebenda **30**, 695, 1915; J. C. McLennan, *Proc. Roy. Soc. (A)* **92**, 574,

nahmen auf Elemente der beiden ersten Vertikalreihen des periodischen Systems beschränken. Bei der grundsätzlichen Bedeutung, die der Kenntnis der Absorptionslinien eines Atoms beizumessen ist, sowohl für die Festlegung des Dauerzustandes eines Atoms als auch für die dadurch gegebene Prüfung und eventuell mögliche Vervollständigung eines vorliegenden Serienschemas, wie auch schließlich als Grundlage und Ausgangspunkt für die Entwirrung solcher Spektren, bei denen noch keine Serieneinordnung gelungen ist, scheint es äußerst wünschenswert, unsere Kenntnisse von den Absorptionsspektren der einatomigen Gase und Dämpfe durch möglichst umfangreiche weitere Untersuchungen zu vergrößern. Von diesem Gedanken ausgehend, wurde beschlossen, im hiesigen Institut neue Absorptionsversuche in Angriff zu nehmen. Die folgenden Versuche sind in ihren Anfängen gemeinsam mit Herrn Prof. J. Franck ausgeführt und stellen den ersten Teil der geplanten Untersuchung einer größeren Reihe von Elementen dar. Da die Versuche aus äußeren Umständen vorläufig abgebrochen werden müssen, sollen die bisherigen Resultate mitgeteilt werden.

Nachdem die Absorptionsspektren der Alkali- und Erdalkalimetalle durch die Untersuchungen der genannten Forscher weitgehend bekannt sind, liegt es nahe, sich der III. Vertikalreihe des periodischen Systems, den Erden, zuzuwenden, über die bisher nur eine Arbeit von Wood und Guthrie¹⁾ vorliegt, auf die sogleich noch näher eingegangen werden soll. Die Bogenspektren der Metalle Al, Ga, In, Tl sind bekannt und in Dublettserien eingeordnet²⁾. Dies Serienschema ist in den Fig. 1 bis 4 in der nach Bohr üblichen Weise graphisch wiedergegeben.

Der prinzipielle Unterschied zwischen den Dublettspektren der Erden und Alkalien ist der, daß nicht, wie bei den Alkalien, ein s -Term, sondern ein p -Term, nämlich $2p_2$, den größten der bekannten Terme darstellt. Es entsteht nun die Frage, ob damit tatsächlich das Serienschema vollständig bekannt ist, oder ob es nicht noch einen bisher unbekannten s -Term gibt, der größer als $2p_2$ ist und so liegt, daß die in Emission auf ihn als Grundbahn zurückführenden Übergänge von den p -Termen Linien ergeben, die entweder ins Ultrarote oder

1916 und (A) **95**, 273, 1919; J. Holtsmark, Phys. ZS. **20**, 83, 1919; J. J. Dobbie u. J. J. Fox, Proc. Roy. Soc. (A) **98**, 147, 1920; G. R. Harrison, Proc. Nat. Acad. of Sciences of the United States **8**, 260, 1922.

¹⁾ R. W. Wood u. D. V. Guthrie, Astrophys. Journ. **29**, 211, 1909.

²⁾ B. Dunz, Diss. Tübingen; F. Paschen u. K. Meissner, Ann. d. Phys. **43**, 1223, 1914; siehe auch A. Fowler, Report on Series in Line Spectra.

extreme Ultraviolette fallen, so daß sie sich bisher der Beobachtung entzogen haben. Vom Standpunkt der Bohrschen Atomtheorie lautet die Frage so, ob das bei den Erden hinzukommende neue Elektron im Dauerzustande des Atoms in einer azimuthal einquantigen oder zweiquantigen Bahn gebunden ist.

Foote und Mohler¹⁾ haben nun im Thalliumdampfe nach dem Elektronenstoßverfahren Resonanz und Ionisierungsspannung zu messen versucht, aus deren Größe sich ergeben müßte, ob ein derartiger, bisher optisch unbekannter s -Term existiert. Da die Deutung, die die Verff. ihren Resultaten geben, zum mindesten zweifelhaft erscheint, so lassen sich aus ihrer Arbeit keine sicheren Schlüsse ziehen, und es soll deshalb auf dieselbe hier nicht näher eingegangen werden, zumal da im hiesigen Institut neue Elektronenstoßversuche im Tl-Dampf in Angriff genommen sind. Viel einfacher läßt sich die oben gestellte Frage ja auch durch Absorptionsversuche beantworten. Denn falls $2p_2$ tatsächlich dem Dauerzustand der Erdmetalle entspricht, so müssen die Spektrallinien in Absorption beobachtbar sein, denen durch das Auswahlprinzip erlaubte Übergänge von $2p_2$ nach höheren Quantenbahnen entsprechen. Dies sind die Linien der beiden Nebenserien, der scharfen Nebenserie $\nu = 2p_2 - m s$ und der diffusen Nebenserie $\nu = 2p_2 - m d_2$. Daß die gestellte Frage in dem Sinne zu beantworten ist, daß $2p_2$ tatsächlich den größten Term darstellt, wird schon sehr wahrscheinlich gemacht durch die erwähnte Arbeit von Wood und Guthrie, die im reinen Tl-Dampf (s. Fig. 4) die Linie $\lambda = 2380$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 4d_2$ und im Gemisch von Tl- und Hg-Dampf außerdem die Linien $\lambda = 2768$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 3d_2$, sowie $\lambda = 3776$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 1,5s$ und $\lambda = 2580$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 2,5s$ in Absorption beobachteten. McLennan fand in reinem Tl-Dampf nur die Linie $\lambda = 3776$ in Absorption. Die soeben erschienene Arbeit von G. Cario²⁾ spricht ebenfalls für diese Auffassung. Auch N. Bohr hat sich auf Grund des bisher vorliegenden Materials auf diesen Standpunkt gestellt und denselben in seinen im Sommer 1922 in Göttingen gehaltenen Vorträgen auch theoretisch näher begründet. Da die Versuche von Wood und Guthrie aber keineswegs vollständig und auch nicht ganz durchsichtig erscheinen, vor allem, was den Einfluß des beigemischten Hg-Dampfes betrifft, andererseits noch weitere Probleme sich anschließen, die mit der Duplizität der p -Terme zusammenhängen, so schien es nicht zwecklos, neue Ab-

¹⁾ P. D. Foote u. F. L. Mohler, *Phil. Mag.* **37**, 33, 1919.

²⁾ G. Cario, *ZS. f. Phys.* **10**, 185, 1922.

sorptionsversuche im reinen Tl-Dampf und in Dämpfen anderer Erdmetalle anzustellen.

Das Problem, das hierbei besonders interessiert und das sich auch in der Arbeit von Cario bereits angedeutet findet, ist das folgende:

Wie aus Fig. 1 bis 4 ersichtlich, sind bei allen Erden die p -Terme doppelt, und der nächst $2p_2$ größte Term ist $2p_1$, wobei die Differenz $2p_2 - 2p_1$ bei Al sehr klein ist und erheblich wächst, wenn wir über Ga und In zum Tl übergehen. Ein Übergang von $2p_2$ nach $2p_1$ durch Absorption von Strahlung oder in umgekehrter Richtung unter Emission ist durch das Auswahlprinzip verboten, so daß $2p_1$ ein im Sinne von J. Franck metastabiler Zustand ist. Dagegen kann durch Zusammenstöße zwischen Atomen ein im Zustand $2p_2$ befindliches Atom in den Zustand $2p_1$ überführt werden, sobald die kinetische Energie der stoßenden Atome ausreicht, um den Energiebedarf zu decken, und auch der umgekehrte Übergang von $2p_1$ zu $2p_2$ ist bei einem Zusammenstoß möglich, wobei die Anregungsenergie in kinetische Energie der stoßenden Atome überführt wird¹⁾. Es wird also bei jeder Temperatur eine bestimmte Anzahl n_1 von Atomen auch im Zustande $2p_1$ vorhanden sein und ein Gleichgewicht sich so einstellen, daß das Verhältnis dieser zu der Zahl n_2 der im Zustand $2p_2$ befindlichen bei der Temperatur T gegeben ist durch die Beziehung

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{a_1}{a_2} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}, \quad (1)$$

wobei a_1 und a_2 die statistischen Gewichte der Zustände $2p_1$ und $2p_2$ sind, $\Delta\varepsilon$ die der Termdifferenz $2p_2 - 2p_1$ entsprechende Energiedifferenz und k die Boltzmannsche Konstante ist. Da bei gesättigtem Dampf mit zunehmender Temperatur sowohl die Gesamtzahl der Atome als auch das Verhältnis n_1/n_2 wächst, so muß einmal die Temperatur erreicht werden, bei der auch die Zahl der im Zustande $2p_1$ befindlichen Atome ausreicht, um diejenigen Linien in Absorption bemerkbar zu machen, deren Grundbahn $2p_1$ ist, d. h. es müssen auch die Nebenserien $\nu = 2p_1 - ms$ und $\nu = 2p_1 - md_i (i = 1, 2)$ in Absorption erscheinen. Für die grüne Tl-Linie $\lambda = 5350$ hat schon Gibson²⁾ gezeigt, daß sie bei genügend hoher Temperatur in Absorption und entsprechend auch in Emission auftritt. Die Differenz der Temperaturen, bei denen Linien gleicher Endbahn der Absorption, also z. B. die Linien $\nu = 2p_2 - 1,5s$ und $\nu = 2p_1 - 1,5s$ erscheinen, muß

¹⁾ J. Franck, ZS. f. Phys. 9, 259, 1922.

²⁾ G. E. Gibson, Phys. ZS. 12, 1145, 1911.

Fig. 1.

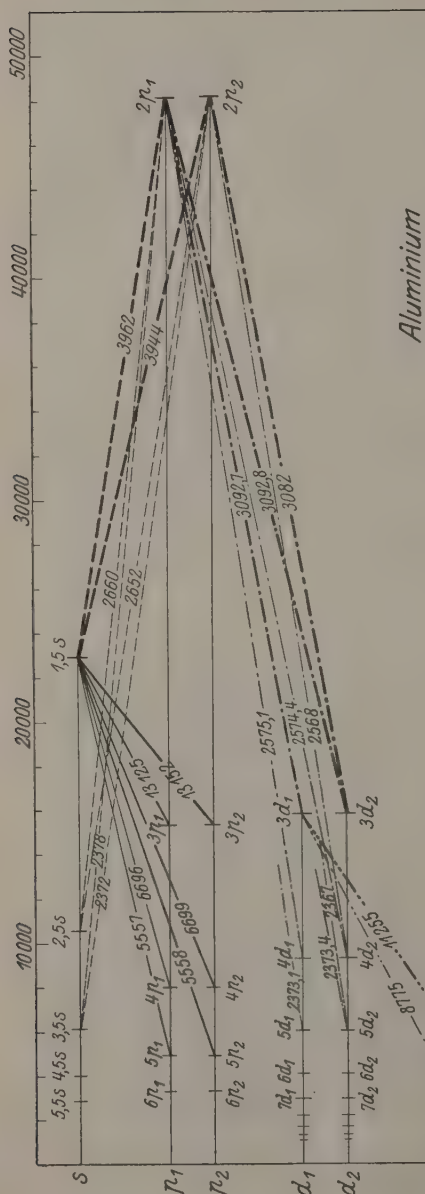


Fig. 2.

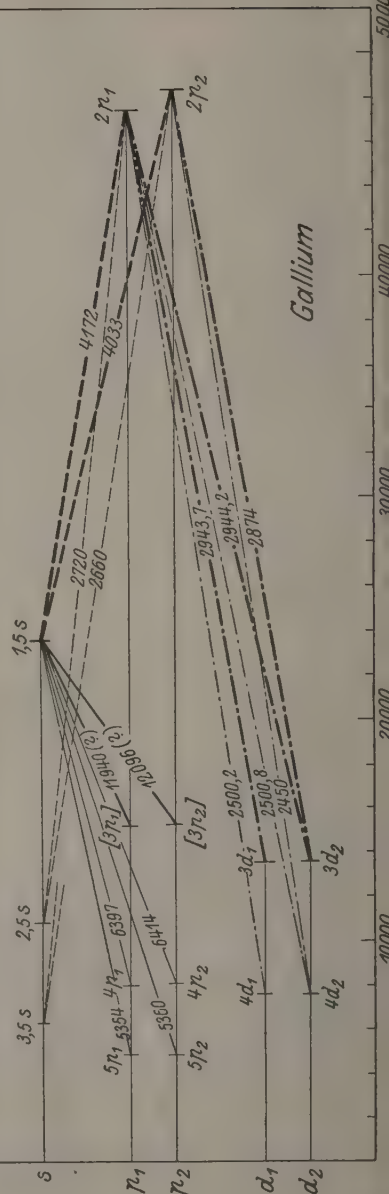


Fig. 3.

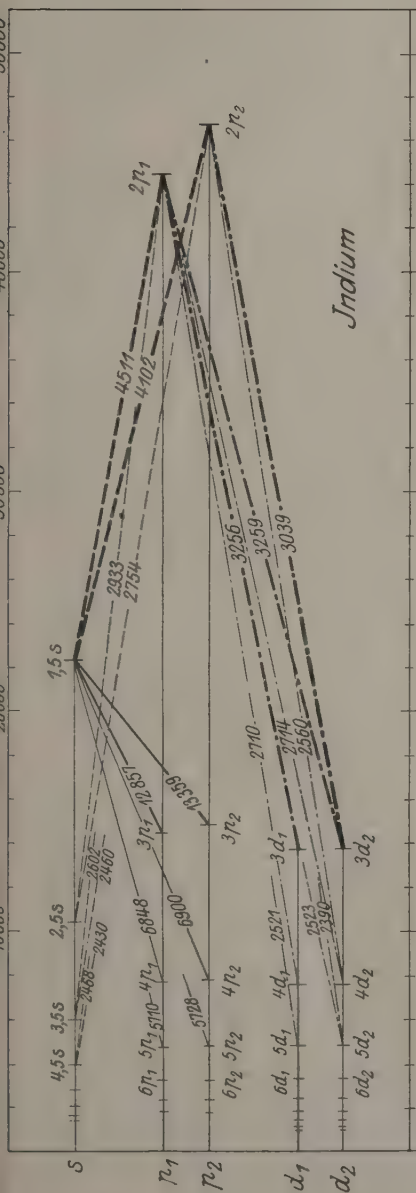
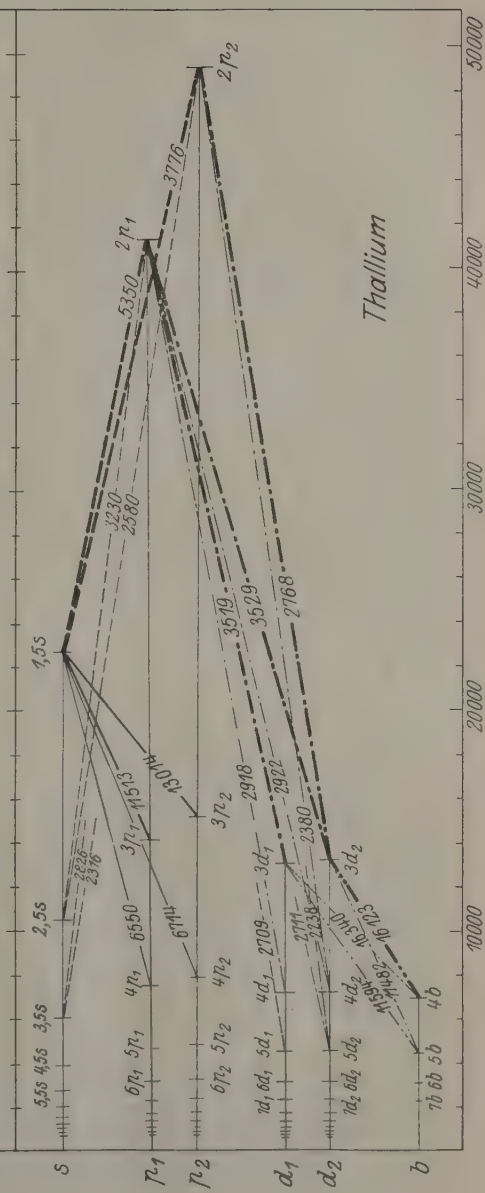


Fig. 4.



innerhalb der Reihe der Erden um so größer sein, je größer die Differenz der Terme $2p_2 - 2p_1$ ist; also muß sie bei Al klein und bei Tl groß sein¹⁾. Um diesen Schluß zu prüfen, wurde außer Tl noch In untersucht, Ga konnte leider bisher nicht beschafft werden, die Untersuchung von Al stieß auf experimentelle Schwierigkeiten, so daß mit der bisherigen Anordnung keine Resultate erzielt werden konnten.

Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung war sehr ähnlich der, die schon früher²⁾ genau beschrieben worden ist, so daß hier kurze Angaben genügen. Als Lichtquelle diente eine Glühlampe mit einem Wolframdraht von 0,8 bis 1 mm Durchmesser, deren kontinuierliches Spektrum bei stärkster Belastung mit genügender Intensität bis etwa 2250 Å.-E. ins Ultraviolette reichte. Das aus einem Quarzfenster austretende und durch eine Quarzlinse parallel gemachte Lichtbündel trat ein in einen 80 cm langen Platinofen von Heraeus, in dessen Mitte das Absorptionsrohr eingeführt werden konnte. Dies bestand aus einem zylindrischen Quarzrohr von 2,5 cm Durchmesser und 15 cm Länge mit planparallelen Endplatten aus geschmolzenem Quarz. Dasselbe wurde evakuiert, eine geringe Menge des betreffenden Metalles wurde nach kräftiger Entgasung in dasselbe hineingebracht, dann wurde abgeschmolzen. Die Temperatur wurde mit einem Pt.-Widerstandsthermometer oder Pyrometer gemessen an der Stelle, an welcher sich der Bodenkörper befand und die auf etwas niedrigerer Temperatur gehalten wurde als die übrigen Teile des Rohres, um ein Beschlagen der Quarzfenster zu verhindern. Das hindurchgegangene Licht wurde durch eine zweite Linse konvergent gemacht, so daß auf dem Spalt des Spektrographen — ein großer Quarzspektrograph von A. Hilger — ein scharfes Bild des Glühdrahtes entstand. Die Aufnahmen gingen in der Regel so vor sich, daß bei verschiedenen Temperaturen bis zu 1100 bis 1200° C hinauf, der höchsten Temperatur, die man dem verhältnismäßig dünnwandigen Quarzrohr zumuten konnte, Aufnahmen gemacht wurden, für jede Temperatur eine Platte mit einer Reihe von Aufnahmen bei verschiedener Helligkeit der Lampe und Belichtungszeit, so daß für alle Teile des Spektrums eine Aufnahme mit der für die Auffindung der Absorptionslinien günstigsten

¹⁾ Es liegt nahe, daran zu denken, die durch Gleichung (1) dargestellte Beziehung zur Bestimmung des Verhältnisses der statistischen Gewichte zu benutzen, wozu quantitative Absorptionsversuche erforderlich wären. Da solche nicht leicht und auch nicht ohne besondere Hilfsmittel durchzuführen sind, wurde dies Problem zugunsten anderer vorläufig zurückgestellt.

²⁾ J. Franck u. W. Grotrian, ZS. f. techn. Phys. 3, 194, 1922.

Schwärzung zur Verfügung stand. Die Ausmessung erfolgte teils durch Vergleich mit Emissionsspektren, teils durch Bestimmung der Wellenlängen mit Hilfe einer dem Spektrographen beigegebenen Wellenlängenskale.

Resultate. Thallium: Entgegen den Angaben von Wood und Guthrie, die im reinen Tl-Dampf von den Absorptionslinien des Atoms nur $\lambda = 2380$ beobachteten, während die übrigen Linien erst bei Zusatz von Hg-Dampf herauskamen, gelang es leicht, im reinen Dampf sämtliche Linien, die nach den vorstehenden Überlegungen zu erwarten sind, in Absorption zu beobachten.

Wenn man die Temperatur allmählich steigert, so erscheinen bei etwa 400°C die Grundlinien der beiden von $2p_2$ ausgehenden Nebenserien $\lambda = 3775,72$ und $\lambda = 2767,87$ (siehe Fig. 4) als feine Linien. Bei 500 bis 600° kommen die weiteren Linien dieser Serien heraus, die aber nur bis zum dritten bzw. vierten Gliede verfolgt werden konnten, weil die Linien höherer Laufzahl zu weit ins Ultraviolette fallen. Beobachtet wurden also:

II. Nebenserie.		I. Nebenserie.	
$\nu = 2p_2 - m s$		$\nu = 2p_2 - m d_2$	
m	λ	m	λ
1,5	3775,72	3	2767,87
2,5	2580,14	4	2379,58
3,5	2315,93	5	2237,84
4,5	2207,06		

Mit zunehmender Temperatur und entsprechend höherem Dampfdruck verbreitern sich alle diese Linien ganz erheblich, so daß sie das Aussehen von breiten Absorptionsstreifen annehmen, und zwar erfolgt diese Verbreiterung, wie es schon von Wood und Guthrie für $\lambda = 3776$ und $\lambda = 2768$ beschrieben worden ist, unsymmetrisch, stärker nach der langwelligen Seite zu. Gleichzeitig wird die Begrenzung des Absorptionsgebietes auf der langwelligen Seite unscharf, so daß sich die Gesamtbreite nicht mehr genau festlegen läßt. Diese beträgt bei 1100°C für $\lambda = 3776$ etwa 15, für $\lambda = 2768$ 16 bis 18 Å.-E. Fragen wir nach der Ursache dieser Verbreiterungserscheinungen, so ist die Deutung durch Starkeffekt der umgebenden Atome entschieden abzulehnen, da der bei diesen Temperaturen vorhandene Dampfdruck von 37 mm nach Gibson¹⁾ kaum ausreichen dürfte, um

¹⁾ Siehe Landolt-Börnstein.

einen derartigen Effekt zu erzielen, und außerdem der direkte Stark-effekt dieser Linien sicher sehr schwach ist, aus dem von Wendt und Wetzels¹⁾ beobachteten Verhalten der analogen Al-Linien zu schließen. Man wird vielmehr diese Verbreiterung ebenso wie die von $\lambda = 2536,7$ im Hg-Dampf durch Molekülbildung²⁾, vermutlich von Tl_2 , zu deuten haben, nur mit dem Unterschied, daß hier die Molekülabsorption mit der Absorptionslinie des Atoms so genau zusammenfällt, daß sie auch bei niedrigen Drucken nicht zu trennen sind, wie dies bei Hg-Dampf möglich ist. Aus dieser Lage der Bandenabsorption läßt sich genau wie bei Hg_2 der Schluß ziehen, daß die Dissoziationsarbeit der vermutlichen Tl_2 -Moleküle sehr klein sein muß. Auch hier wird man wie beim Hg-Dampf keine Auflösung der Bandenabsorption in einzelne Linien erwarten dürfen, da wegen des hohen Atomgewichts von Tl die Rotationsquanten so klein sind, daß sich zwei Linien, die sich nur um ein Rotationsquant unterscheiden, überdecken.

Außer den bisher genannten Linien kamen nun bei Steigerung der Temperatur auch die erwarteten Linien der von $2 p_1$ ausgehenden Nebenserien heraus, und zwar bei 800°C die grüne Tl-Linie $\lambda = 5350,46$ und bei etwas höherer Temperatur, etwa 850° , das Dublett $\lambda = 3529$ und $\lambda = 3519,24$, zunächst kaum erkennbar als ganz feine Linien, bei wachsender Temperatur sich verbreiternd, aber ohne den Charakter von scharfen Absorptionslinien zu verlieren. Allmählich erschienen dann auf der Platte auch weitere Linien dieser Serien. Für die Verfolgung derselben sind die Verhältnisse insofern günstiger, als die Grenze derselben bei 2417 \AA.-E. , also im bequem erreichbaren Ultraviolett, liegt. Infolgedessen gelang es auch, diese Serie ziemlich weit zu verfolgen, die diffuse Nebenserie sogar um zwei Glieder weiter als bisher in Emission nach den Angaben von Fowler gelungen ist. In der folgenden Tabelle sind die Wellenlängen der beobachteten Linien zusammengestellt.

Eine an die Seriengrenze sich anschließende kontinuierliche Absorption konnte nicht festgestellt werden. Dieselbe dürfte wohl erst bei höheren Dampfdrucken herauskommen³⁾.

Außer diesen dem Tl-Atom zuzuschreibenden Absorptionslinien erschienen nun auf den Platten einige andere Linien, die sich meist als Elementen zugehörig erwiesen, die als Verunreinigung vorhanden waren. Da das Quarzrohr vorher für Indium benutzt

¹⁾ G. Wendt und R. A. Wetzels, Ann. d. Phys. **50**, 419, 1916.

²⁾ J. Franck und W. Grotrian, l. c.

³⁾ Von einer Reproduktion der Spektren wurde Abstand genommen, da sich die feinen Absorptionslinien zur Wiedergabe wenig eignen.

II. Nebenserie.

$\nu = 2 p_1 - m s$			
m	λ	m	λ
1,5	5350,46	6,5	2538,18
2,5	3229,75	7,5	2507,94
3,5	2826,16	8,5	2487,48
4,5	2665,57	9,5	2472,57
5,5	2585,59	10,5	2461,93

I. Nebenserie.

$\nu = 2 p_1 - m d_i \ (i = 1, 2)$			
m	λ	m	λ
3	{ 3529,43	9	2493,91
	{ 3519,24	10	2477,49
4	{ 2921,52	11	2465,46
	{ 2918,32	12	2456,45
5	{ 2710,67	13	2449,49
	{ 2709,23	14	2443,92
6	{ 2609,77	15	2439,50
	{ 2608,99	16	2435,8
7	2552,53	17	2433,0
8	2517,41		

worden war, erschienen bei den höheren Temperaturen die stärksten Indiumlinien. Sodann waren bei 1200° als feine Absorptionslinien deutlich erkennbar die Grundlinien der Dubletthauptserien von Cu und Ag, und zwar $\lambda = 3247,55$ und $\lambda = 3273,97$ von Cu und $\lambda = 3280,66$ und $\lambda = 3382,86$ von Ag. Das Auftreten dieser Linien in Absorption läßt auch die Untersuchung weiterer Metalle mit verhältnismäßig hohen Schmelzpunkten nicht hoffnungslos erscheinen. Außerdem erschien bei $\lambda = 2833$ bei höheren Temperaturen eine schwache Absorptionslinie, die mit der Bleilinie $\lambda = 2833,13 \text{ \AA.-E.}$ identisch ist. Daß diese Linie tatsächlich vom unangeregten Bleidampf absorbiert wird, konnte durch besondere Versuche festgestellt werden, über welche demnächst berichtet werden soll. Drei schwach erkennbare Linien mit den Wellenlängen $\lambda = 2794, 2798$ und 2800 konnten nicht identifiziert werden. Außer diesen Atomabsorptionslinien erschien nun auf den Platten eine Reihe von mehr oder weniger diffusen Absorptionsstreifen, die sich durch ihr Aussehen deutlich als Bandenabsorptionen charakterisierten, und die also irgendwelchen molekularen Gebilden, wahrscheinlich Tl-Verbindungen, zuzuschreiben sind. Besonders bemerkenswert und charakteristisch ist eine Gruppe von zwei diffusen Linien bei 3221 und 3223, Bandkanten bei etwa 3230,

3240 und 3250 und einer diffusen Bande bei 3110, die alle schon von Wood und Guthrie beobachtet und beschrieben wurden und einer verhältnismäßig leicht flüchtigen Verbindung zuzuschreiben sind, da diese Gruppe schon bei 300° erscheint und von 400° ab in konstanter Intensität erhalten bleibt. Außerdem erscheint bei höheren Temperaturen eine Reihe von diffusen Banden, die zum Teil schon von Wood und Guthrie beschrieben sind, und auf welche näher einzugehen sich kaum lohnt, da ich feststellen konnte, daß dieselben sich bei sorgfältiger Entgasung und Destillation des Tl im Vakuum weitgehend vermeiden lassen. Aus dem Vorhandensein dieser mehratomigen Dämpfe erklären sich sicher auch die etwas merkwürdigen Beobachtungen von Wood und Guthrie, welche die eigentlichen Atomabsorptionslinien mit Ausnahme von $\lambda = 2380$ nicht im reinen Tl-Dampf, sondern erst bei Zusatz von Hg feststellen konnten. Da ihr „reiner“ Dampf starke Verunreinigungen enthielt, wie das Absorptionsspektrum direkt zeigt, so scheint es, daß die verdampfenden Tl-Atome sofort Verbindungen eingingen, das Atomspektrum konnte dann erst herauskommen, wenn durch starken Zusatz von Hg die Verunreinigungen wesentlich sich mit dem Hg verbanden. Daß bei Zusatz von sehr viel Tl zum Hg die fraglichen Banden wieder erschienen, erklärt sich dann zwanglos daraus, daß damit gleichzeitig eine große Menge von Verunreinigungen in das Rohr hineingebracht wurde.

Indium. Ein kleines Stückchen metallisches Indium, von der Firma Merck stammend, wurde nach lebhafter Erhitzung im Vakuum in das Absorptionsrohr hineingebracht, das dann abgeschmolzen wurde. Es erschien (siehe Fig. 3) von den stärksten von $2p_2$ ausgehenden Linien die Grundlinie der II. Nebenserie $\lambda = 4101,72$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 1,5s$ bei etwa 650° , die Grundlinie der I. Nebenserie $\lambda = 3039,34$ entsprechend $\nu = 2p_2 - 3d_2$ bei etwa 700° , während die entsprechenden von $2p_1$ ausgehenden Linien der II. Nebenserie $\lambda = 4511,27$ und die stärkere Linie des Dubletts der I. Nebenserie $\lambda = 3256,03$ bei etwa 800° herauskamen. Man sieht also, daß hier die Differenz der Temperaturen nur 100 bis 150° beträgt, gegenüber 400° bei Tl, was durchaus im Einklang steht mit der geringeren Differenz der Terme $2p_2 - 2p_1$ bei In, die nur etwa ein Drittel der der Tl-Terme beträgt. Bei höheren Temperaturen bis zu 1100° hinauf wurden diese Linien natürlich stärker und verbreiterten sich etwas, ohne aber den Charakter von scharfen Absorptionslinien zu verlieren. Außerdem kamen, wie zu erwarten, weitere Linien der beiden Nebenserien heraus. Die insgesamt beobachteten Linien sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

II. Nebenserie.

$\nu = 2p_2 - ms$		$\nu = 2p_1 - ms$	
m	λ	m	λ
1,5	4101,72	1,5	4511,27
2,5	2753,87	2,5	2932,60
3,5	2460,06	3,5	2601,75
4,5	2340,22	4,5	2468,01
		5,5	2399,25
		6,5	2357,6

I. Nebenserie.

$\nu = 2p_2 - md_2$		$\nu = 2p_1 - md_1, i=1,2$	
λ	m	m	λ
3	3039,34	3	{ 3258,52
4	2560,16		{ 3256,03
5	2389,56	4	{ 2713,95
			{ 2710,28
		5	{ 2522,99
			{ 2521,36
		6	{ 2430,7
			{ 2429,68

Bemerkenswert ist nun, daß außer diesen dem Serienschema sich einordnenden Linien bei Temperaturen von 1000 bis 1100° deutlich eine Absorptionslinie auftrat, deren Wellenlänge, wie durch ein auf das Absorptionsspektrum bei teilweise überdecktem Spalt geworfenes Emissionsspektrum des Indiums sicher festgestellt werden konnte, mit der Emissionslinie des In von der Wellenlänge 2836,90 zusammenfällt. Diese Linie gehört zu den unklassifizierten Linien und ist in Kayzers Handbuch mit der Anmerkung $3R$ versehen, d. h. Intensität 3 und umgekehrt. Durch die Tatsache, daß diese Linie in Emission schon umgekehrt beobachtet ist, wird die Behauptung, daß sie hier in Absorption auftritt, wesentlich gestützt. Fragen wir nun, wie das Auftreten dieser Linie zu erklären ist, so gibt es dafür nur wenig Anhaltspunkte. Im normalen Serienspektrum ist kein Platz für sie. Man könnte aber daran denken, daß bei diesem Absorptionsprozeß nicht das Elektron der 5_2 -Bahn, sondern eines von den beiden 5_1 -Elektronen des In-Atomes auf eine höhere Quantenbahn gehoben wird, doch bleibt dies eine reine Vermutung. Von den schwächeren unklassifizierten Linien, die in Kayzers Handbuch noch mit einem R versehen sind, konnte keine in Absorption gefunden werden.

Außer den Indiumlinien erschienen auf den Platten stark die Absorptionslinien des Cadmiums $\lambda = 3261,04$ und $2288,02$, die letztere bei höheren Temperaturen als breites Band, woraus hervorgeht, daß das In mit Cd stark verunreinigt war. Außerdem waren schwach vorhanden die Zn-Absorptionslinie $\lambda = 3075,88$, die Hg-Linie $2536,7$ und die stärksten Linien des Tl. Schließlich erschien auch wie bei Tl die Pb-Linie bei $\lambda = 2833,13$.

Von Absorptionsstreifen mit Bandencharakter ist besonders zu erwähnen eine Gruppe von unaufgelösten, nach Rot abgeschattigten Banden mit Kanten bei

$$\lambda = 2661, 2672, 2695, 2707, 2718, 2730 \text{ und } 2741,$$

die schon bei 200° schwach zu erscheinen begann und also wahrscheinlich auch einer verhältnismäßig leicht flüchtigen In-Verbindung zuzuschreiben ist.

Gallium konnte, wie schon erwähnt, nicht beschafft werden. Die Untersuchung von Aluminium scheiterte daran, daß Al infolge seiner bekannten reduzierenden Wirkung Quarz bei höheren Temperaturen angreift. Al bezieht sich bei wachsender Temperatur zunächst oberflächlich mit einer schwarzen Schicht, außerdem entsteht an der Wandung des Quarzgefäßes beim Erkalten ein bräunlicher Niederschlag. Um die direkte Berührung von Quarz und Al zu verhindern, wurde ein Stückchen Al, in Platinfolie eingewickelt, in das Quarzrohr eingeführt. Aber auch so ergab der Absorptionsversuch bis zu 1100° hinauf keine Andeutung der zu erwartenden Absorptionslinien. Es erschienen nur zwei Linien bei $\lambda = 2614$ und 2617 , die aber vermutlich Kanten von Banden und der sich bildenden Al-Verbindung zuzuschreiben sind. Sollte es gelingen, Al-Dampf in genügender Dichte zu erzeugen, so wäre zu erwarten, daß in ihm zufolge der sehr geringen Termdifferenz $2p_2 - 2p_1$ die von $2p_2$ und von $2p_1$ ausgehenden Absorptionslinien gleicher Endbahn, also z. B. $\lambda = 3944$ und $\lambda = 3962$ der II. Nebenserie (siehe Fig. 1), bei nahezu derselben Temperatur beobachtbar werden. Wenn sich dies auch bisher nicht nachweisen ließ, so kann doch nach den Erfahrungen bei Tl und In an der Richtigkeit dieser Behauptung kaum gezweifelt werden.

Zusammenfassung.

1. Die bekannten Seriensysteme der Bogenspektren der Erdmetalle werden graphisch dargestellt. Sie lassen erwarten, daß im unangeregten Dampf eines Erdmetalles nicht die Hauptserien, sondern die Nebenserien in Absorption auftreten.

2. Die Differenz der Temperaturen, bei denen die von $2p_2$ und $2p_1$ ausgehenden Linien gleicher Endbahn in Absorption beobachtbar werden, muß um so größer sein, je größer die Termdifferenz $2p_2 - 2p_1$ ist, muß also wachsen in der Reihe der Erden beim Übergang von Al zu Tl.

3. In Tl- und In-Dampf werden die zu erwartenden Nebenserien teilweise bis zu hohen Gliedern in Absorption beobachtet.

4. Die unter 2. genannte Temperaturdifferenz ist bei Tl etwa 400° , bei In 100 bis 150° , was der unter 2. geäußerten Erwartung entspricht.

5. Im In-Dampf erscheint bei hohen Temperaturen eine Absorptionslinie bei $\lambda = 2836,90$, die auch in Emission beobachtet, aber nicht in das Serienschema eingeordnet ist.

6. Vom Standpunkte der Bohrschen Atomtheorie ist durch die Absorptionsversuche sichergestellt, daß das bei den Erdmetallen neu hinzukommende Elektron in einer azimuthal zweiquantigen Bahn gebunden ist.

Herrn Prof. Franck sage ich für das stete fördernde Interesse an der vorliegenden Untersuchung sowie für die bereitwillige Überlassung der Mittel seines Instituts meinen aufrichtigen Dank.

Das Quarzrohr wurde aus Mitteln beschafft, die von der Helmholtzgesellschaft zur Verfügung gestellt wurden. Ich möchte nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinen Dank für die bewilligten Geldmittel auszusprechen.

Göttingen, II. Phys. Inst. d. Universität, Oktober 1922.

Über den Luftwiderstand senkrecht getroffener Kreisplatten.

Von Hans Zickendraht in Basel.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 19. Oktober 1922.)

Tieferes Eindringen in den Mechanismus des Luftwiderstandes hat an manchen Stellen das Bedürfnis nach weiterem Material an experimentellen Ergebnissen geweckt. Vorliegende Abhandlung untersucht die Frage des Luftwiderstandes senkrecht getroffener Kreisplatten bei veränderter Plattenoberfläche und Windgeschwindigkeit, ein Problem, dessen mehrfach erfolgte Bearbeitung doch bisher nur zu stark voneinander abweichenden, ja sich stellenweise sogar widersprechenden Resultaten geführt hat. Die meisten der bis 1910 erschienenen Arbeiten befassen sich in erster Linie mit der Untersuchung des Widerstandes als Funktion der Flächengröße bei konstanter Geschwindigkeit, also mit dem Flächengesetz, beachten aber nur nebenbei, daß möglicherweise eine Veränderlichkeit des Flächengesetzes mit der Geschwindigkeit bestehen könnte. Die vorzügliche kritische Zusammenstellung und Bearbeitung, die die älteren Arbeiten auf diesem Gebiete durch G. Eiffel in seinem Buche „La résistance de l'air. Examen des formules et des expériences“¹⁾ gefunden haben, erübrigt an dieser Stelle eine längere Aufzählung. Zusammenfassend sei bemerkt, daß die Autoren Hutton, Piobert, Morin und Didion, Hagen, Cailletet, Mannesmann, Le Dantec, Canovetti und neuerdings Eiffel durchweg eine mehr oder minder rasche Zunahme des spezifischen Widerstandes mit der Fläche fanden. Dem gegenüber steht das an der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt gewonnene Ergebnis nahezu völliger Konstanz der Widerstandszahl senkrecht getroffener Kreisplatten innerhalb eines großen Bereichs Reynoldsscher Zahlen²⁾. Schließlich ist auch unter gewissen Umständen eine Abnahme des spezifischen Widerstandes mit wachsender Flächengröße beobachtet worden, so von Dines³⁾, W. König⁴⁾ und dem Verfasser⁵⁾, so daß es sich wohl lohnt, der Ursache solcher Verschiedenheiten nachzuforschen.

¹⁾ Paris, H. Dunot et E. Pinat, 1910.

²⁾ C. Wieselsberger, ZS. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1915, Heft 17; Phys. ZS. **22**, 321, 1921 und **23**, 219, 1922.

³⁾ F. W. Lanchester, Aerodynamik **1**, 287. Leipzig, Teubner, 1909.

⁴⁾ W. König, Phys. ZS. **13**, 1014, 1912.

⁵⁾ H. Zickendraht, Ann. d. Phys. (4) **35**, 56, 1911.

Experimenteller Teil. 1. Apparatur: Die Messungen geschahen im freien, so sorgfältig wie möglich ausgeglichenen Luftstrom eines Schraubengebläses. Ein Elektromotor treibt eine dreiflügelige Schraube von 50 cm Durchmesser, deren Schraubenstrahl durch passend geformte Leitschaufeln grob, durch einen längeren, sich auf den Durchmesser von 35 cm verjüngenden Konus mit angesetztem zylindrischem Teile mit feinmaschigem Drahtnetz fein gleichgerichtet wird. Eine genaue Beschreibung des Apparates findet sich in der Dissertation von F. Ebi¹⁾. Zunächst war nun die räumliche und zeitliche Ungleichförmigkeit des freien Luftstrahles zu untersuchen, wobei es sich erwies, daß zur längerdauernden Konstanthaltung der Tourenzahl des Gleichstrommotors eine besonders sorgfältige Pflege des Kollektors und selbstverständlich Verwendung von Akkumulatoren als Stromquelle notwendig war. Die raschen zeitlichen Schwankungen der Windgeschwindigkeit ließen sich, was festzustellen sehr wichtig ist, nicht unter maximal 1 Proz. herabdrücken. Noch etwas größer waren die räumlichen Verschiedenheiten in der Geschwindigkeit der einzelnen Luftfäden, doch zeigte es sich, daß nach Einbringung der zu untersuchenden Kreisplatten von den räumlichen Verschiedenheiten, offenbar infolge der ausgleichenden Wirkung der allseitig symmetrisch umströmten Platte, nichts mehr zu erkennen war. Dies wurde durch Abtasten mit besonders angeordneter Sonde festgestellt.

Die Geschwindigkeitsmessung geschah mittels eines einfachen Pitotrohres, dessen Brauchbarkeit zur Ermittlung des Staudrucks von Krell²⁾ und Eiffel³⁾ genau geprüft worden ist. Der von Krell geforderten Bedingung eines genügend langen horizontalen Rohrschenkels war Rechnung getragen. Das Pitotrohr wurde so angeordnet, daß es jederzeit mit seiner Mündung genau dem Luftstrom entgegen gerichtet an den Ort der Plattenmitte gebracht werden konnte. Der Druckmessung diente eine Töplersche Drucklibelle, an deren geneigtem Meßrohre mit der Lupe noch die Zehntel Millimeter unter Vermeidung der Parallaxe durch einen Spiegel abgelesen werden konnten. Obwohl Eiffel feststellt, daß das einfache Pitotrohr um etwa 1,5 Proz. zu niedrige Geschwindigkeitswerte ergibt, so setzt er dennoch die Angaben desselben in seine Berechnungen ein, ohne den dadurch entstehenden Fehler weiter zu berücksichtigen. Ich komme unten darauf zurück.

¹⁾ F. Ebi, Inaug.-Diss. Basel 1920.

²⁾ O. Krell, Über Messung von dynamischem und statischem Druck bewegter Luft. München und Berlin, R. Oldenbourg.

³⁾ G. Eiffel, Der Luftwiderstand und der Flug. Übersetzt von Dr. E. Huth. Berlin, R. C. Schmidt, 1912.

Fünf aus Aluminium und Messing hergestellte Kreisplatten von folgenden Abmessungen wurden der Untersuchung unterworfen:

Tabelle 1.

	Platte Nr. I	II	III	IV	V
Durchmesser	11,275	8,005	5,635	3,985	2,815 cm
Fläche	99,865	50,34	24,95	12,48	6,25 cm ²

Die Ränder waren sorgfältig abgedreht und auf der Leeseite bis auf einen schmalen Rand abgeschrägt. Sie wurden von 4 mm dicken zylindrischen Stäbchen am Luftwiderstandsapparate gehalten.

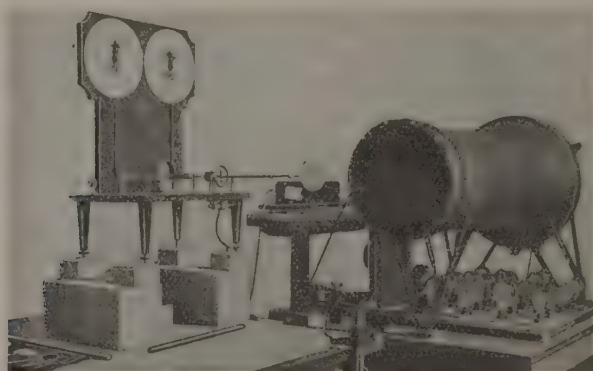


Fig. 1.

Dieser letztere ist früher genau beschrieben¹⁾ worden. Es sei deshalb hier bloß das Prinzip desselben kurz erwähnt, sowie eine Abbildung der Anordnung gegeben (Fig. 1). Ein etwa 45 cm langer, am einen Ende den Versuchskörper, am anderen Ende eine feine Zeigervorrichtung tragender Hebel ist durch Cardanische Aufhängung allseitig beweglich gemacht. An ihm wirken zwei genau kalibrierte stählerne Schraubenfedern senkrecht zueinander. Die eine soll den Auftrieb, die andere den Rücktrieb messen, den der Versuchskörper unter Einwirkung des Luftstromes erfährt. Die Messung geschieht nach einer Nullmethode, indem durch Anspannen der beiden Federn der Gesamtluftwiderstand genau ausgeglichen wird. Man gewinnt dann gleichzeitig die Horizontal- und die Vertikalkomponente.

¹⁾ H. Zickendraht, Ann. d. Phys. (4) 35, 47, 1911.

Im vorliegenden Falle wurde natürlich bloß die erstere gebraucht. Die Anordnung besitzt den Vorteil, daß sich durch die Federn starke Abweichungen von der Gleichgewichtslage, wie sie bei den pulsierenden Vorgängen beim Umströmen einer Platte entstehen, abdämpfen, so daß sie die Ablesung der Mittelwerte, aus denen der Luftwiderstand letzten Endes besteht, bedeutend erleichtert. Von der Verwendung einer besonderen Dämpfungsvorrichtung wurde abgesehen, da gerade die aufmerksame Verfolgung der eigenartigen ruckweisen Bewegungen, welche die vom Luftstrom getroffene Platte ausführt, wertvolle Fingerzeige hinsichtlich des Mechanismus des Luftwiderstandes zu geben vermag.

Der Gang einer Messung verlief folgendermaßen: Für einen bestimmten Wert der Geschwindigkeit wurde am Widerstandsapparate der Luftwiderstand der sorgfältig senkrecht zum Strome eingestellten Platte ermittelt, und zwar, da die Platte zumeist innerhalb gewisser Grenzen ruckweise veränderliche Bewegungen ausführt, diejenige Stellung zur Messung gewählt, die sich am häufigsten und gleichzeitig am ausdauerndsten einstellte. Die Bestimmung der Nullage des Apparates, d. h. derjenigen Hebelstellung, bei der die Federkraft der kalibrierten Schraubenfeder den Mittelwert der auf die Platte wirkenden Luftkräfte genau ausgleicht, geschah durch Lupeneinstellung zweier feiner Strichmarken. Bei den sehr geringen Kräften, die bei kleinen Platten und geringen Windgeschwindigkeiten auftreten, ist eine solche Feineinstellung unbedingt erforderlich. Unmittelbar nach der Plattenmessung wurde die Platte aus ihrem Halter entfernt, die Mündung des schwenkbar angeordneten Pitotrohres an die Stelle der Plattenmitte gebracht und an der Drucklibelle der Staudruck abgelesen. Um die Zuverlässigkeit der Angaben des Pitotrohres zu prüfen, habe ich eine Stauscheibe mit feiner zentraler Anbohrung und das bei den Messungen verwendete Pitotrohr miteinander verglichen und dabei folgende Werte gefunden:

Tabelle 2.

Windgeschwindigkeit	2,23	3,22	4,05	5,05	6,02	6,90 m/s
Ablesung mit Pitotrohr . . .	1,80	3,80	6,00	9,45	13,35	17,65 Skt.
Ablesung mit Stauscheibe . .	1,75	3,80	5,85	9,35	13,30	17,40 Skt.

Wie man sieht, liegen die mit der Stauscheibe gemessenen Drucke etwas unter den mit dem Pitotrohre gewonnenen Werten, so daß die Gefahr, daß die mit letzterem gemessenen Staudrucke zu klein ausfallen könnten, nicht besteht; zu große Werte kann man aber mit einem einfachen Pitotrohr nicht erhalten.

Besondere Sorgfalt erfuhr die Auswertung der Fassungskorrektion, d. h. des Luftwiderstandes der die Platte tragenden Apparatenteile. Am Hebel des Meßapparates wurde ein ebenso langes Stäbchen wie das die Platte tragende eingesetzt, die Platte an festem Halter in derselben Stellung fixiert, die sie vorher bei der Messung eingenommen hatte und so der Widerstand der Halteteile mit der Platte selbst als „Blende“ bestimmt. Nur so schafft man für die Halteteile allein dasselbe aerodynamische Feld, wie es im Falle der umströmten Platte selbst vorlag. Die Fassungskorrektionen wurden für jede Messungsreihe besonders ermittelt.

2. Berechnung der Widerstandszahlen. Nennen wir: W den Luftwiderstand in Kilogrammen auf das Quadratmeter, F' die Flächengröße in Quadratmetern, $q = \frac{1}{2} \rho v^2$ den Staudruck, wobei $\rho = \gamma/g$ die Luftdichte, v die Windgeschwindigkeit in Metern in der Sekunde, $h = R.l$ die Stauhöhe (1 mm Wassersäule auf das Quadratzentimeter = 1 kg auf das Quadratmeter), R den Reduktionsfaktor der Drucklibelle, l die an der Drucklibelle abgelesene Verschiebung in Millimetern, so wird der Luftwiderstand

$$W = c \cdot q \cdot F' = c \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot F',$$

woraus die Widerstandszahl c

$$c = \frac{2 W}{\rho v^2 F'}.$$

Nun ist aber die Windgeschwindigkeit .

$$v^2 = 2 g h / \gamma = 2 h / \rho = 2 R l / \rho.$$

Eingesetzt gibt
$$c = \frac{W}{R \cdot l \cdot F'}.$$

Gewöhnlich wird das Hundertfache dieser reinen Zahl, also $C = 100c$ angegeben¹⁾. Die Widerstandszahl steht zu den früher verwendeten Widerstandskoeffizienten in folgenden einfachen Beziehungen.

Wenn Eiffel²⁾ schreibt:

$$W = K \cdot v^2 \cdot F,$$

so ist offenbar die Widerstandszahl

$$c = \frac{2}{\rho} K.$$

¹⁾ Vgl. L. Prandtl, Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. 1. Lieferung, S. 31. München u. Berlin, R. Oldenbourg.

²⁾ G. Eiffel, Der Luftwiderstand und der Flug, S. 41.

Wählt man die frühere Göttinger Darstellung¹⁾:

$$W = \xi_{90} \gamma / g \cdot v^2 \cdot F = \Psi_0 v^2 \cdot F,$$

so ist die Widerstandszahl:

$$c = 2\xi_{90} = 2 \cdot \Psi.$$

3. Versuchsergebnisse. In den Figg. 2 bis 6 sind die an den fünf Platten gewonnenen Meßresultate zusammengestellt. Auffallend

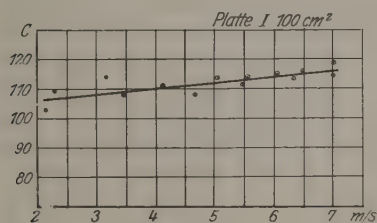


Fig. 2.

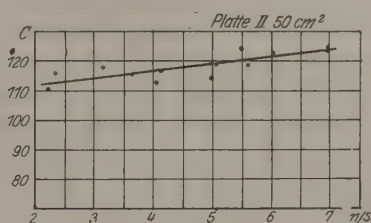


Fig. 3.

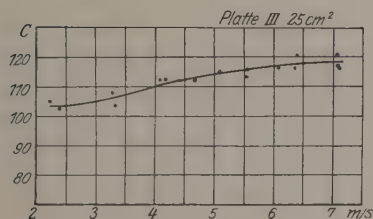


Fig. 4.

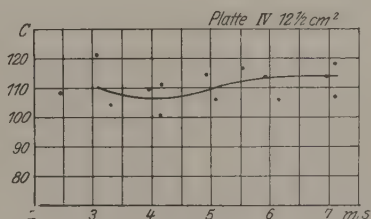


Fig. 5.

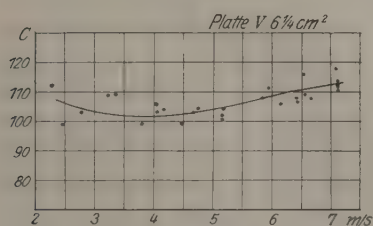


Fig. 6.

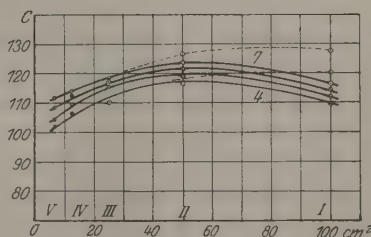


Fig. 7.

ist dabei die starke Streuung der Daten, die nur die Aufstellung von Mittelkurven für jede einzelne Platte zuließ. Man erkennt deutlich eine obere und eine untere Grenze der Widerstandszahlen, zwischen denen die eingetragene Kurve jeweils die Mitte einhält. Bei den

¹⁾ L. Prandtl, ZS. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt **1**, 159, 1910; O. Föppl, Jahrbuch der Motorluftschiffstudiengesellschaft **4**, 90, 1910/11.

kleinen Platten wie auch bei geringer Windgeschwindigkeit ist überdies die Grenze der Meßgenauigkeit des Apparats erreicht, so daß ich nur auf die bei Windgeschwindigkeiten von vier und mehr Metern in der Sekunde gewonnenen Resultate Wert lege. Die Angaben unter 4 m sind nur noch orientierender Natur. In Fig. 7 ist schließlich eine aus den Mittelkurven der Figg. 2 bis 6 gewonnene Darstellung des Verlaufs der Widerstandszahl bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten und verschiedenen Flächengrößen wiedergegeben.

Schon in dem sehr kleinen Intervall von 2 bis 7 m Windgeschwindigkeit und Flächengrößen der Kreisplatten von $6\frac{1}{2}$ bis 100 cm^2 sind die beiden Ergebnisse deutlich erkennbar:

1. Daß die Widerstandszahl mit der Windgeschwindigkeit veränderlich ist (bei kleinen Platten wurde bei bestimmten Windgeschwindigkeiten ein Minimum gefunden);
2. daß die Widerstandszahl sich mit der Plattengröße ändert (die Abnahme bei der größten der verwendeten Flächen ist nur eine scheinbare, vgl. die Diskussion weiter unten).

Diskussion der Ergebnisse. Wie ersichtlich, kommen verschiedene Beobachter zu verschiedenen Resultaten, deren gegenseitige Abweichungen voneinander sich nur durch die Versuchsbedingungen erklären lassen. Besondere Aufmerksamkeit verdient dabei der zur Messung verwendete Luftstrom, von dessen Eigenschaften meines Erachtens alles abhängt.

Der Mechanismus des Luftwiderstandes einer senkrecht getroffenen Kreisplatte ist in kurzen Zügen beschrieben der folgende: Auf der Luvseite haben wir es mit einer zu der in Richtung des Luftstromes durch die Plattenmitte gelegten Achse allseitig symmetrischen Potentialströmung zu tun. Die Flächen gleichen Drucks sind Rotationsellipsoide um diese Achse. War die ungestaute Strömung stationär, so bleibt sie es auch auf der Luvseite, vorausgesetzt, daß die zeitlich veränderlichen Vorgänge auf der Leeseite sich nicht bis zur Luvseite spürbar machen können, was unter gewissen Bedingungen nicht ausgeschlossen ist. Von der Flächenberandung löst sich auf der Leeseite zunächst ein Wirbelring ab, dessen Querschnitt sich z. B. nach der Schlierenmethode photographieren läßt¹⁾. Unter normalen Verhältnissen hätte dieser Wirbelring das Bestreben, sich unter gleichzeitiger Erweiterung von rückwärts her auf die Platte zu, also dem Strome entgegen, zu bewegen. Nun findet aber außerdem eine

¹⁾ H. Zickendraht, Ann. d. Phys. (4) **35**, 73, 1912.

Mitführung des Wirbels mit der Strömung statt. Obwohl es ja möglich erscheint, daß bei bestimmter Strömungsgeschwindigkeit sich beide Einflüsse die Wage halten, derart, daß ein dauerndes Verweilen des Wirbelringes hinter der Platte stationäre Verhältnisse schaffen würde, so ist dieser Zustand nur bei völliger Abwesenheit von Störungen zeitlicher oder örtlicher Natur zu verwirklichen. Tatsächlich sind die Verhältnisse auf der Leeseite instabil. Nach kurzer Zeit wird nämlich, wie Beobachtungen in Wasser und in Luft zeigten, der Wirbelring an irgend einer Stelle seines Umfanges rascher fortgeführt und kurz darauf gesprengt, wodurch die Symmetrie des aerodynamischen Feldes gestört wird. Der Rest des Wirbelringes wird von der Strömung mitgerissen und durch einen inzwischen neugebildeten Ring ersetzt. Die Sprengstelle wechselt fortwährend ihren Ort.

Besondere Beachtung verdient hierbei der „Vorstrom“. In bestimmter Entfernung hinter der Platte liegt in der Achse eine Stelle erhöhten Drucks, von der aus nach beiden Seiten, sowohl mit dem Strome als gegen denselben, ein Abfließen stattfindet. Der der Hauptstromrichtung entgegengesetzte Vorstrom durchsetzt den Wirbelring axial und trifft von hinten auf die Platte, einen Teil des von der Luvseite her wirkenden Drucks dadurch aufhebend. Der Vorstrom ist eng mit dem Wirbelring verknüpft. Neigt sich die durch die Wirbelseele gelegte Ebene, so trifft der Vorstrom schief auf die Leeseite der Platte und ändert dadurch die Richtung der auf die Platte wirkenden Gesamtkraft, falls Luvdruck und Vorstrom im Plattenzentrum angreifen, oder es entsteht ein zusätzliches Drehmoment, falls die vom Vorstrom ausgeübte Kraft nicht durch die Plattenmitte geht. Vom Augenblick der Sprengung des Wirbelringes an verringert sich der Vorstrom, um mit der Neubildung des Wirbels wieder zu erstehen.

Der Vorstrom ist also nach Größe und Richtung zeitlich variabel. Man erkennt somit leicht, daß die vom senkrecht gerichteten Luftstrom auf die Platte ausgeübte Kraft sich aus dem Druck auf der Luvseite, einer Saugwirkung auf der Leeseite und der Wirkung des Vorstroms zusammensetzt. Während der Luvdruck bei konstantem Luftstrom als konstant angesehen werden kann, ist die vom variablen Vorstrom beherrschte Saugwirkung auf der Leeseite nach Größe und Richtung mit der Zeit veränderlich. Ein am Apparat gemessener Luftwiderstand kann also nur als Mittelwert über eine Reihe verschiedener, innerhalb gewisser Grenzen schwankender Kräfte betrachtet werden.

Die schönen Untersuchungen von v. Karmán und Rubach¹⁾ ließen zunächst wenigstens eine Periodizität der Pulsationen, aus denen die Windkraft auf die Platte besteht, vermuten und es wurde mittels eines einfachen „Resonanzmanometers“ nach solchen gesucht. Ein solches Instrument läßt sich leicht aus einem langschenkligigen U-Rohre mit Zufluß der Meßflüssigkeit im tiefsten Punkt herstellen. Jeder Füllhöhe entspricht dabei eine bestimmte Eigenschwingungsdauer des Rohrinhalts. Da aber eine Resonanzlage für die Pulsationen trotz Anwendung eines weiten Frequenzbereichs nicht gefunden werden konnte, so mußte geschlossen werden, daß die Luftstöße hier in ungleichen Zeitabschnitten aufeinanderfolgten.

Ergibt sich nun aber der Luftwiderstand selbst als Mittelwert über eine Reihe von Luftstößen, so müssen erstens die dem verwendeten Luftstrom eventuell schon eigentümlichen, sehr schwer völlig unterdrückbaren Pulsationen berücksichtigt werden, zweitens ist zu untersuchen, ob nicht andere Gesetze für böige Luftströme, d. h. solche, die beschleunigte Luftmassen enthalten, maßgebend sind. Wie oben erwähnt, enthielt der zu vorliegender Untersuchung verwendete Luftstrom zeitliche Geschwindigkeitsschwankungen bis zu 1 Proz. Es ist daher höchst wahrscheinlich, daß solche innere Pulsationen jeweils unregelmäßige Schwankungen des Luvedrucks, das Zerreißen des Wirbelringes hinter der Platte in unregelmäßiger Aufeinanderfolge und damit die Unregelmäßigkeiten im Luftwiderstande zur Folge hatten. Eine einfache Untersuchung ergab zunächst qualitativ folgende Resultate:

Dem Luftstrom des Gebläses wurde dadurch böiger Charakter gegeben, daß unmittelbar hinter der Austrittsstelle aus der Düse ein den ganzen Querschnitt durchsetzender flacher Holzstab in rasche pendelnde Bewegung (etwa acht Schwingungen in der Sekunde) quer durch den ganzen Strahl versetzt wurde. Vergleichsmessungen im ungestörten und böigen Luftstrom lieferten die Zahlen der Tabelle 3.

Tabelle 3. Platte Nr. II. Luftdichte $\rho = 0,1195$.

Windgeschwindigkeit	Ungestörter Luftstrom	Böiger Luftstrom
4,9 m/s	C = 109,3	C = 138,3
6,8 m/s	C = 120,5	C = 130,8

Man erkennt, daß somit ein böiger Luftstrom, der in Stößen auf die Platte einwirkt, einen höheren Luftwiderstand hervorruft, wie ein ausgeglichener, ein Effekt, der schon von Lilienthal beobachtet

¹⁾ Th. v. Karmán u. H. Rubach, Phys. ZS. **13**, 49, 1912.

wurde¹⁾. Es war schließlich noch von Interesse, zu untersuchen, wie etwa ein unmittelbar vor der Platte angebrachtes grobmaschiges Sieb auf die Widerstandszahl einwirken würde. Der Versuch ergab ebenfalls eine Erhöhung der Widerstandszahl, doch soll auf diese Messungen hier nicht weiter eingegangen werden.

Der Anstieg der Widerstandszahl mit steigender Luftgeschwindigkeit, der sich aus meinen Versuchen unzweifelhaft ergibt, ist direkt auf die mit zunehmender Windgeschwindigkeit wachsende Böigkeit des verwendeten Luftstromes zurückzuführen, und es fragt sich überhaupt, inwieweit bei der Umströmung einer ebenen Platte, deren Gegenwart im gleichmäßigen Luftstrom regel- oder unregelmäßig pulsierende Vorgänge hervorruft, völlige Freiheit von Böen zu erwarten ist. Die Platte schafft sich also in ihrer unmittelbaren Umgebung die Böigkeit gleichsam selbst, ein Umstand, der meines Wissens noch nirgends gebührend beachtet wurde. Diese Verhältnisse erklären auch die Streuung der Versuchsdaten und die Schwierigkeit, untereinander vergleichbare Zahlen zu erhalten.

Fig. 7 bedarf noch besonderer Erläuterung. Der Abfall der Widerstandszahlen bei Plattengrößen oberhalb 50 cm² erklärt sich zwanglos aus der Unzulänglichkeit der zur Verfügung stehenden Apparatur. Persönlichen Mitteilungen der Herren Prandtl und Wieselsberger von der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt verdanke ich den Hinweis auf eine wertvolle Untersuchung über den Einfluß des Strahlenquerschnitts auf die gemessenen Luftwiderstände²⁾, nach deren Ergebnissen ich die an den (im Vergleich zu dem benutzten Strahlquerschnitt schon zu großen) Flächen I und II gewonnenen Resultate korrigieren konnte. Die verbesserten Werte sind in Fig. 7 für die Windgeschwindigkeiten 4 und 7 m/s gestrichelt eingetragen und zeigen, daß nur ein Anstieg der Widerstandszahlen mit der Fläche, nicht aber ein Maximum vorliegt.

An der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt fand Wieselsberger²⁾ bei senkrecht beaufschlagten Kreisplatten innerhalb des sehr weiten Bereichs Reynoldsscher Zahlen von $R = 3620$ bis $962\,000$ nahezu völlige Konstanz der Widerstandszahl und begründet dieses Ergebnis mit der Überlegung, daß die Ablösungsstelle am Scheibenrande sich nicht verschieben könne. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß die Vorgänge im „toten Wasser“, die ja den Widerstand mehr noch als die Luvvorgänge bedingen, bei variierter Fläche und Windgeschwindigkeit sich ähnlich zu bleiben brauchen. In unserem Falle fand dies

¹⁾ Otto Lilienthal, *Der Vogelflug*, S. 47. München, R. Oldenbourg, 1910.

²⁾ C. Wieselsberger, *Phys. ZS.* **23**, 223, 1922.

sicher nicht statt, so daß wir zu dem Schluß berechtigt sind, daß jede, wenn auch nur geringe Böigkeit des Luftstromes zu Abweichungen von den für stationären Wind geltenden Gesetzen führen muß. Eine bedeutende Komplikation der Verhältnisse liegt aber in dem Umstande, daß die instabilen Leevorgänge die senkrecht beaufschlagte Platte ruckweise erschüttern und damit auch in einen ursprünglich gleichförmig strömenden Wind Böigkeit hineintragen.

Zusammenfassung der Ergebnisse. An Hand von neuen Versuchen werden die sich widersprechenden Angaben früherer Autoren über den Luftwiderstand senkrecht getroffener Kreisplatten geprüft.

Der Luftwiderstand einer senkrecht beaufschlagten Platte wird als Mittelwert über eine Reihe zeitlich unregelmäßig aufeinanderfolgender Stöße charakterisiert und nachgewiesen, daß eine Platte infolge der instabilen Vorgänge auf ihrer Leeseite in einen zunächst gleichförmigen Luftstrom Böigkeit hineinträgt.

Böige Luftströme führten, wie Messungen zeigten, zu erhöhten Widerstandszahlen.

In böigen Luftströmen, deren Böigkeit mit zunehmender Geschwindigkeit wächst, wird eine Zunahme der Widerstandszahl mit der Windgeschwindigkeit beobachtet.

Es wird eine Zunahme der Widerstandszahl mit der Flächengröße nachgewiesen. Eine Erklärung hierfür kann vorläufig nicht gegeben werden.

Basel, Phys. Inst. d. Univ., Abt. f. angewandte Physik, 22. Okt.

Einige Bemerkungen zu der Abhandlung: W. Friedrich und O. Glasser, „Intensitätsverteilung der γ -Strahlen radioaktiver Substanzen im absorbierenden Medium.“

Von Rolf M. Sievert in Stockholm.

(Eingegangen am 5. November 1922.)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung¹⁾ haben die Herren W. Friedrich und O. Glasser als Benennung für die Schnittkurven, die sich durch Schneiden von Äquintensitätsflächen mit einer Ebene ergeben, das Wort „Isodosen“ vorgeschlagen. Es soll hier auf den bedenklichen Widerspruch aufmerksam gemacht werden, der durch diese Bezeichnung entsteht.

In der Einleitung des betreffenden Aufsatzes stützen sich die Verfasser auf die Definition der physikalischen Dosis nach Christen

$$D = J \cdot t \cdot \mu, \quad (1)$$

wo μ gleich dem Absorptionskoeffizienten im Gewebe ist. Die vorgeschlagene Bezeichnung ist zweckmäßig, wenn man

$$D = c \cdot J, \quad (2)$$

wobei c eine Konstante bedeutet, schreiben darf, was bei völlig homogener Strahlung erlaubt ist. Setzt sich aber die Strahlung aus Komponenten verschiedener Härte zusammen, so ist die Gleichung (2) für die Gesamtdosis natürlich nicht mehr richtig.

Denkt man sich zum Beispiel ein Radiumpräparat, das nach verschiedenen Richtungen hin durch 0, 1, 2 und 5 mm Blei hindurch Strahlen sendet, so erhält man für die in Betracht kommenden Härtekomponenten [K_1 , K_2 und K_3 nach Kohlrausch²⁾], vorausgesetzt, daß man nur die Primärstrahlen berücksichtigt, folgende in Prozenten der Gesamtintensität ausgedrückten Intensitäten³⁾

Filter in mm Pb	J_{K_1}	J_{K_2}	J_{K_3}
	Proz.	Proz.	Proz.
0	53	40	7
1	56	39	5
2	59,5	37	3,5
5	67	32	1

¹⁾ W. Friedrich und O. Glasser, ZS. f. Phys. **11**, 93, 1922.

²⁾ K. W. F. Kohlrausch, Jahrb. d. Radioakt. **15**, 64, 1918.

³⁾ Vgl. Rolf M. Sievert, Acta Radiologica **1**, 89, 1921.

Die aus Gleichung (1) berechneten Dosen sind dann in relativen Zahlen folgende

Filter in mm Pb	D_{K_1}	D_{K_2}	D_{K_3}	Summe
0	32	44	17,5	93,5
1	33,5	43	12,5	89
2	35,5	41	9	85,5
5	40	35	2,5	77,5

Es kommen also im vorliegenden Falle auf ein und derselben Äquiintensitätsfläche Dosen vor, die sich voneinander um mehr als 15 Proz. unterscheiden. Selbstverständlich können dieselben Unterschiede auch auf den „Isodosen“ vorkommen, weshalb diese Bezeichnung als irreführend angesehen werden muß. Man kann zwar die Einwendung machen, daß bei den in der Radiumtherapie benutzten Präparaten Unterschiede der hier angeführten Art keine praktische Bedeutung haben. Das ist heute wohl noch der Fall. Unsere Kenntnisse über das Wesen der biologischen Strahlenwirkungen sind aber zurzeit sehr unvollkommen, und es ist deshalb größte Vorsicht in der Einführung solcher Benennungen geboten, besonders da sie von Nichtphysikern benutzt werden sollen.

Eine andere Bemerkung sei noch gestattet.

Bei der Ermittlung der Intensitätswerte in geringen Abständen (0 bis 10 mm) an den Enden der Präparate, vgl. z. B. Fig. 3 ihrer Abhandlung, haben die Verfasser sich, soweit ersichtlich, der Extrapolation bedient. Die hierbei festgestellten Werte dürften aber gänzlich unbrauchbar sein, denn über den Verlauf der aufsteigenden Äste der Kurven in Fig. 2 gibt es keine durch Beobachtung gewonnene Aufschlüsse. Der einzig mögliche Weg zur Ableitung dieser Werte wäre also eine, unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Strahlungsquelle durchgeführte Berechnung gewesen ¹⁾.

Stockholm, im Oktober 1922.

¹⁾ Siehe Anmerkung 3 auf voriger Seite.

Die chemischen Konstanten der Halogene im ein- und zweiatomigen Zustand.

Von **F. A. Henglein** in Danzig-Langfuhr.

(Eingegangen am 6. November 1922.)

Für einatomige Gase beträgt nach Stern und Tetrode die chemische Konstante $C = -1,60 + 1,5 \log M$, wo M das Molekulargewicht des Gases ist; die Gültigkeit der Formel wurde von W. Nernst¹⁾ an mehreren Gasen experimentell geprüft.

Für mehratomige Gase kann die chemische Konstante aus der Dampfdruckformel bestimmt werden, wenn man den Verlauf der Molekularwärme des Gases vom absoluten Nullpunkt an bis zur Temperatur des Verdampfungsgleichgewichts kennt; außerdem müssen bekannt sein: Dampfdruck, Wärmetönung und Molekularwärmen des Kondensats. Nach A. Langen²⁾ kann für ein Temperaturgebiet, wo das Gas seinen normalen Zustand zeigt, der Betrag für den Abfall der Rotationsenergie mit in die chemische Konstante einbezogen werden. Für dasselbe Temperaturintervall lassen sich mit dieser Konstanten Gleichgewichte berechnen, an denen das mehratomige Gas beteiligt ist.

Da die Halogene infolge ihrer Reaktionsfähigkeit häufig an Gleichgewichten teilnehmen, besitzen ihre chemischen Konstanten besonderes Interesse.

§ 1. Die spezifischen Wärmen und der Wärmeinhalt der Halogene im festen Zustand.

Für die Berechnung der chemischen Konstanten der Halogene ist die Kenntnis ihres Wärmeinhalts erforderlich.

a) Chlor. Die spezifischen Wärmen von Chlor und sein Wärmeinhalt finden sich in den Miethingschen Tabellen³⁾ nach der Debye-funktion berechnet, mit einer den Berechnungen genügenden Genauigkeit.

b) Brom. Für die spezifischen Wärmen von Brom liegen zwei Messungen bei tiefen Temperaturen von Koref⁴⁾ und Dewar⁵⁾ vor,

¹⁾ W. Nernst, Grundlagen des Wärmesatzes 1918.

²⁾ A. Langen, ZS. f. Elektrochem. **25**, 28, 1919. W. Nernst, Theoretische Chemie 1921, S. 807.

³⁾ Miething, Tabellen zur Berechnung des gesamten und freien Wärmeinhalts fester Körper.

⁴⁾ Koref, Ann. d. Phys. **36**, 49, 1911.

⁵⁾ Dewar, Proc. Roy. Soc. **89**, 168, 1914.

aus denen sich nicht sicher eine Debyefunktion herleiten läßt. Es kann aber in folgender Weise der Wärmeinhalt von Brom bei verschiedenen Temperaturen bestimmt werden: Nach der für einatomige Stoffe gültigen Dampfdruckformel:

$$\log p_{(\text{Atm})} = -\frac{\lambda_0}{4,571 \cdot T} + 2,5 \log T - \frac{1}{4,571} \int_0^T \frac{\partial T}{T^2} \int_0^T C_p \cdot \partial T + C$$

kann das Doppelintegral und damit C_p bestimmt werden; die Dampfdrucke von Brom bei tiefen Temperaturen sind kürzlich von F. A. Henglein und A. Muchlinski¹⁾ gemessen worden, woraus sich auch λ_0 angenähert berechnen läßt. Für C machen wir die Voraussetzung, daß auch für einatomiges Brom die Stern-Tetrodesche Formel gilt, und setzen $C = 1,26$. Durch Ausprobieren findet sich, daß für $\beta v = 184$ und $a = 19 \cdot 10^{-5}$ in der Gleichung²⁾ $C_p = C_v + a T^{3/2}$ nach einer Debyefunktion der Wärmeinhalt gut wiedergegeben wird. Mit den von W. Nernst gegebenen Zahlentafeln³⁾ und den Miethingschen Tabellen für $T^{3/2}$ sind in Zahlentafel 1 die spezifischen Wärmen und der Wärmeinhalt nach Debye für verschiedene Temperaturen berechnet. Für

Zahlentafel⁴⁾ 1.

T	C_p	$U - U_0$	$-\frac{A - A_0}{T}$	$-(A - A_0)$
20	0,615	3,2	0,056	1,12
40	2,55	32,1	0,349	14,0
50	3,41	64,0	0,586	29,3
60	3,90	100	0,852	51,1
80	4,77	189	1,431	114,5
100	5,22	291	2,02	202
120	5,56	398	2,59	311
160	5,95	629	3,63	461
180	6,10	749	4,12	741
200	6,21	872	4,55	910
240	6,50	1130	5,37	1288
265,8	6,62	1295	5,86	1558

¹⁾ F. A. Henglein, G. v. Rosenberg und A. Muchlinski, ZS. f. Phys. **11**, 1, 1922.

²⁾ W. Nernst, Grundlagen des Wärmesatzes 1918, S. 55.

³⁾ W. Nernst, ebenda, S. 109 ff.

⁴⁾ Die Bezeichnungen sind nach den Miethingschen Tabellen gewählt.
Es ist:

$$U - U_0 = \int_0^T C_p \cdot \partial T,$$

$$A - A_0 = -T \int_0^T \frac{\partial T}{T^2} \int_0^T C_p \cdot dT.$$

das Temperaturgebiet $T = 82$ bis $T = 192$ fand Koref die mittlere Atomwärme 5,63. Mit $\beta\nu = 184$ und $a = 19 \cdot 10^{-5}$ berechnet sich

$$\int_{82}^{192} C_p \cdot dT = 622 \text{ cal,}$$

woraus als mittlere Atomwärme 5,65 folgt, so daß mit dem Koref-schen Wert gute Übereinstimmung besteht. Dewar fand für ungefähr $T = 50^\circ \text{C}$ 3,62 für die Atomwärme, während nach unserer Rechnung dieser Wert sich bei $T = 52$ ergibt. Es ist zu berücksichtigen, daß für zweiatomige Stoffe die Debye-funktion nicht streng gilt; ferner sind Modifikationsänderungen möglich, wie dies bereits bei anderen zweiatomigen Stoffen festgestellt wurde¹⁾.

c) Jod. Die spezifischen Wärmen von Jod wurden von Nernst und Günther gemessen. Die Berechnung nach der Debye-funktion befindet sich in den Miethingschen Tabellen.

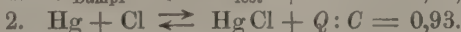
Es ist von Interesse, die Werte von $\beta\nu$ und a der drei Halogene zu vergleichen (Zahlentafel 2). Die Werte von Brom liegen etwa in der Mitte zwischen denen von Chlor und Jod, etwas näher bei Chlor; diese Reihenfolge findet sich in vielen anderen physikalischen Konstanten der Halogene wieder²⁾.

Zahlentafel 2.

	$\beta\nu$	$a \times 10^5$
Chlor	258 ³⁾	27
Brom	184	19
Jod	106 ³⁾	10

§ 2. Die chemischen Konstanten im einatomigen Zustand.

a) Chlor. Für Chlor hat der Verfasser die chemische Konstante aus zwei Gleichgewichten berechnet⁴⁾:



Der theoretische Wert nach Stern-Tetrode ist 0,72; die Übereinstimmung ist befriedigend.

b) Brom. Für Brom versuchte bereits H. Braune⁵⁾ die chemische Konstante zu berechnen, was jedoch nicht genau durchgeführt werden

¹⁾ Für Jod: Günther, Ann. d. Phys. **51**, 828, 1916; für Sauerstoff: Eucken, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 4, 1916; ebenda für CO.

²⁾ Vgl. F. A. Henglein, ZS. f. anorg. Chem. **118**, 165, 1921 u. **123**, 137, 1922.

³⁾ Aus Miethingschen Tabellen.

⁴⁾ F. A. Henglein, ZS. f. anorg. Chem. **123**, 160, 1922; das Gleichgewicht $\text{Ag} + \text{Cl} \rightleftharpoons \text{AgCl}$ liefert eine größere Konstante (1,5).

⁵⁾ H. Braune, ZS. f. anorg. Chem. **111**, 140, 1920.

konnte, da Dampfdrucke von festem Brom nicht genügend bekannt waren und über die spezifischen Wärmen keine bestimmten Annahmen gemacht werden konnten. Um die Genauigkeit der in § 1 durchgeführten Rechnung zu zeigen, ist in Zahlentafel 3 die chemische Konstante aus dem Wärmeinhalt des Kondensats und den übrigen Daten berechnet. λ_0 , die Sublimationswärme von einem Grammatom zum einatomigen Dampf, ergibt sich folgendermaßen: Die molare Sublimationswärme beim Schmelzp. 265,8 zu zweiatomigem Dampf ist durch unsere Untersuchungen nunmehr ermittelt und ist 9740 cal¹⁾; die Dissoziationswärme eines Mols beträgt beim Schmelzpunkt 46 980 cal, berechnet nach der von Bodenstein²⁾ gegebenen Gleichung:

$$Q_T = 46\,160 + 3,5 T - 0,001\,869 T^2 + 4,319 \cdot 10^{-7} T^3.$$

Daher beträgt die atomare Sublimationswärme beim Schmelzpunkt $\frac{46\,980 + 9740}{2} = 28\,360$ cal für einatomigen Dampf. λ_0 ist dann

$$\text{gleich: } 28\,360 - 265,8 \cdot 4,963 + \int_0^{265} C_p \cdot dT;$$

$$\lambda_0 = 28\,340 \text{ cal.}$$

Der Dampfdruck von einatomigem Brom berechnet sich gemäß der Gleichgewichtsbedingung:

$$K_{p(\text{Atm})} = \frac{p_{\text{Br}^2}}{p_{\text{Br}_2}}$$

$$\log p_{\text{Br}(\text{Atm})} = \frac{1}{2} (\log K_p + \log p_{\text{Br}_2}).$$

K_p berechnet sich nach der Bodensteinschen Formel:

$$\log K_{p(\text{Atm})} = - \frac{46\,160}{4,571 \cdot T} + 1,75 \log T - 4,09 \times 10^{-4} \cdot T$$

$$+ 4,726 \times 10^{-8} \cdot T + 0,55.$$

Der mittlere Wert 1,27 stimmt mit dem theoretischen nahezu überein. Nach den Darlegungen in § 1 dürfte somit auch für Brom erwiesen sein, daß die Stern-Tetrodesche Formel gilt.

c) Jod. Für Jod wurde wiederholt³⁾ versucht, die chemische Konstante zu berechnen. Ein vollkommen befriedigendes Resultat ergab sich nicht; die chemische Konstante wird günstigenfalls 0,3

¹⁾ F. A. Henglein, G. v. Rosenberg und A. Muchlinski, ZS. f. Phys. **11**, 1, 1922.

²⁾ M. Bodenstein, ZS. f. Elektrochem. **22**, 327, 1916.

³⁾ Stern, Ann. d. Phys. **44**, 497, 1914; W. Nernst, ZS. f. Elektrochem. **22**, 190, 1916; H. Braune, ZS. f. phys. Chem. **102**, 486, 1922; H. Fischvoigt, Dissertation Berlin 1921.

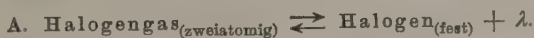
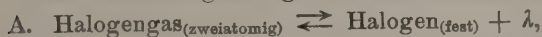
zu hoch gefunden gegenüber dem theoretischen Wert von Stern-Tetrode. Jedoch liegt kein Widerspruch zur Theorie vor, insbesondere wenn man mit einer Ungenauigkeit in den Dampfdruckmessungen rechnet¹⁾.

Zahlentafel 3.

T	p_{Br_2} mm Hg F. A. Henglein u. A. Muchlinski	$\log p_{\text{Br}_2}$ (Atm)	$\log K_p$ (Atm)	$\log p_{\text{Br}}$ (Atm)	λ_0 $4,571 \frac{T}{T}$	$2,5 \log T$	$\frac{1}{4,571} \int_0^T \frac{\partial T}{T^2} \int_0^T C_p \cdot \partial T$	C
241,1	6,37	-2,077	-37,266	-19,671	25,72	5,955	1,201	1,29
227,0	1,83	-2,619	-39,908	-21,264	27,32	5,890	1,137	1,30
222,8	1,05	-2,860	-40,757	-21,808	27,84	5,870	1,122	1,28
210,0	0,25	-3,483	-43,564	-23,523	29,53	5,805	1,059	1,26
177,6	0,0022	-5,539	-52,456	-28,998	34,92	5,623	0,901	1,20

§ 3. Die chemischen Konstanten im zweiatomigen Zustand.

Ihre Berechnung erfolgt aus zwei verschiedenen Gleichgewichten:



a) Chlor. Die chemische Konstante von Chlor_(zweiatomig) wurde vom Verfasser kürzlich berechnet²⁾ und zu $0,00 \pm 0,05$ im Temperaturgebiet $T = 120$ bis $T = 170$ gefunden. Es machte sich ein kleiner Gang in den Konstanten bemerkbar; mit steigender Temperatur wurde sie größer.

b) Brom. In der Gleichung:

$$\log p_{(\text{Atm})} = -\frac{\lambda_0}{4,571 \cdot T} + 3,5 \log T - \frac{1}{4,571} \int_0^T \frac{\partial T}{T^2} \int_0^T 2 \cdot C_p \cdot \partial T + C'$$

bedeutet λ_0 die Verdampfungswärme zu zweiatomigem Brom und ist nach § 2 gleich: $2 \times 28340 - 46160 = 10520$ cal. Aus unseren Dampfdruckmessungen ergeben sich danach für C' die in Zahlentafel 4 zusammengestellten Werte.

Es zeigt sich auch bei Brom, daß C' nicht voll konstant ist.

¹⁾ Die Angaben über die Verdampfungswärme von Jod weichen stark ab; z. B. gibt J. Dewar (Chem. News 78, 325, 1898) für Zimmertemperatur 14430 cal an, dagegen finden Baxter, Hickey und Holmes (Journ. Amer. Chem. Soc. 29, 127, 1907) 15100 cal.

²⁾ F. A. Henglein, ZS. f. Phys. 11, 1, 1922.

Zahlentafel 4.

T	$\log p_{\text{Br}_2}$ (Atm)	$\frac{\lambda_0}{4,571 \cdot T}$	$3,5 \log T$	Glied mit Doppelintegral	C'
241,1	-2,077	9,546	8,337	2,402	1,53
227,0	-2,619	10,139	8,246	2,274	1,55
222,8	-2,860	10,330	8,218	2,244	1,50
210,0	-3,483	10,960	8,127	2,118	1,47
177,6	-5,539	12,959	7,872	1,802	1,35

c) Jod. Für Jod liegen unterhalb $T = 273$ Dampfdruckmessungen von Naumann und Haber und Kerschbaum¹⁾ vor. Mittels der Formel:

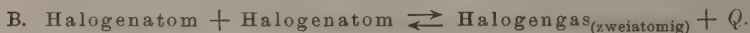
$$\log p_{(\text{Atm})} = -\frac{15100}{4,571 T} + 3,5 \log T - \frac{1}{4,571} \int_0^T \frac{\partial T}{T^2} \int_0^T 2 C_p \cdot \partial T + C'$$

berechnen sich die in nachstehender Zahlentafel zusammengestellten Werte von C' .

Zahlentafel 5.

T	$\frac{\lambda_0}{4,571 \cdot T}$	p mm Hg (Haber und Kerschbaum)	$\log p_{(\text{Atm})}$	$3,5 \log T$	Glied mit Doppelintegral	C'
252,2	13,10	0,002 5	-5,48	8,41	3,50	2,71
244,3	13,52	0,000 88	-5,94	8,36	3,44	2,66
240,8	13,70	0,000 58	-6,13	8,34	3,41	2,64
226,8	14,56	0,000 084	-6,96	8,25	3,25	2,60
224,8	14,70	0,000 057	-7,12	8,23	3,26	2,61

Die von Baxter, Hickey und Holmes gemessenen Dampfdrucke oberhalb $T = 273$ schließen sich jedoch nicht gut an. Aus ihren Messungen ergibt sich eine Verdampfungswärme, aus der für λ_0 etwa 15580 cal folgen und C' etwa $3,20^2)$.



Für das Dissoziationsgleichgewicht des Halogenmoleküls gilt allgemein die Gleichung:

$$\log K_{p(\text{Atm})} = -\frac{Q_0}{4,571 \cdot T} + 2 \times 2,5 \log T - 3,5 \log T + 2 C - C'$$

für das Temperaturgebiet, in dem C' , die chemische Konstante des zweiatomigen Moleküls, wirklich konstant ist. C bedeutet die chemische Konstante im einatomigen Zustand.

a) Chlor. Für Q_0 ist 54000 zu setzen; $\log K_p$ berechnet sich nach der vom Verfasser³⁾ gegebenen Formel; $2 C = 1,44$.

¹⁾ Haber und Kerschbaum, ZS. f. Elektrochem. **20**, 296, 1914.

²⁾ Es läßt sich somit aus den verschiedenen Messungen kein sicherer Schluß ziehen.

³⁾ F. A. Henglein, ZS. f. anorg. Chem. **123**, 137, 1922.

Zahlentafel 6.

T	$\log K_p$	$\frac{54\,000}{4,571 \cdot T}$	$1,5 \log T$	$2C - C'$	C'
170	-64,76	69,49	3,345	1,38	+ 0,06
160	-69,11	73,83	3,306	1,41	+ 0,03
140	-79,76	84,38	3,219	1,40	+ 0,04
120	-93,92	98,45	3,118	1,41	+ 0,03

Mittel: + 0,04 \pm 0,02

b) Brom. Nach Bodenstein ist $Q_0 = 46\,160$, nach der Bodensteinschen Formel ergeben sich die Werte für $\log K_p$; $2C = 2,52$.

Zahlentafel 7.

T	$\log K_p$	$\frac{46\,160}{4,571 \cdot T}$	$1,5 \log T$	$2C - C'$	C'
241,1	-37,266	41,88	3,57	1,04	1,48
227,0	-39,908	44,49	3,53	1,05	1,47
222,8	-40,757	45,32	3,52	1,04	1,48
210,0	-43,564	48,09	3,48	1,05	1,47
177,6	-52,456	56,86	3,37	1,03	1,49

Mittel: 1,48 \pm 0,01

c) Jod. Q_0 ist nach Bodenstein 34500; die Bodensteinsche Formel¹⁾ für das Dissoziationsgleichgewicht gibt die Werte für K_p ; $2C = 3,12$.

Zahlentafel 8.

T	$\log K_p$	$\frac{34\,500}{4,571 \cdot T}$	$1,5 \log T$	$2C - C'$	C'
252,2	-25,68	-29,94	3,60	0,66	2,46
240,8	-27,11	-31,34	3,57	0,66	2,46
224,8	-29,40	-33,58	3,53	0,66	2,46

Aus den untersuchten Gleichgewichten ergeben sich für die chemischen Konstanten der Halogene im zweiatomigen Zustand für Temperaturen unter $T = 273$ die in Zahlentafel 9 zusammengestellten Werte:

Zahlentafel 9.

	Chem. Konstante einatomig	Chem. Konstante zweiatomig	\log Atomgewicht
Chlor	+ 0,72	+ 0,02	1,550
Brom	+ 1,26	+ 1,50	1,903
Jod	+ 1,56	+ 2,55	2,104

¹⁾ M. Bodenstein, ZS. f. Elektrochem. 22, 327, 1916.

Wie im einatomigen Zustand steigen die chemischen Konstanten im zweiatomigen Zustand ebenfalls mit dem log des Atomgewichts bzw. Molekulargewichts an.

In der guten Übereinstimmung der nach zwei verschiedenen Methoden berechneten chemischen Konstanten darf andererseits ein Beweis für die Gültigkeit der Stern-Tetrodeschen Formel für die einatomigen Halogene gesehen werden¹⁾.

Es ist noch von Interesse, zu untersuchen, wie sich die chemischen Konstanten im zweiatomigen Zustand mit der Temperatur ändern. In allen drei Fällen zeigt sich ein Ansteigen mit wachsender Temperatur. Die unter B. aufgeführten Formeln liefern für höhere Temperaturen aus den experimentell bestimmten K_p die chemischen Konstanten in Zahlentafel 10.

Zahlentafel 10.

Chlor		Brom		Jod	
T	C'	T	C'	T	C'
987	0,11	1177	1,64	1073	2,57
1050	0,13	1379	1,67	1273	2,63
1127	0,15	1558	1,70	1473	2,66

Schließlich seien noch die von A. Langen bestimmten chemischen Konstanten anderer mehratomiger Stoffe mit denen der Halogene verglichen:

Stoff	Chemische Konstante	Stoff	Chemische Konstante
Jod	+ 2,55	Stickstoff . . .	- 0,05
Brom	+ 1,50	Kohlensäure . .	- 0,41
Stickoxyd . . .	+ 0,92	Ammoniak . . .	- 2,45
Sauerstoff . . .	+ 0,8	Wasserstoff . .	- 3,77
Chlor	+ 0,02		

Von allen Stoffen haben Brom und Jod die höchste chemische Konstante.

Zusammenfassung.

Aus dem Dissoziations- und Verdampfungsgleichgewicht der Halogene werden die chemischen Konstanten im ein- und zweiatomigen Zustand berechnet. Der Wärmehalt von festem Brom wird bestimmt; es wird eine Debye-funktion für die Berechnung der spezifischen Wärmen von festem Brom angegeben.

Danzig, Physikal.-chem. Institut d. Techn. Hochschule, Nov. 1922.

¹⁾ Berechnet man die chemische Konstante im einatomigen Zustand aus A. und B., so folgt für: Cl 0,70 (0,72 theor.); Br 1,25 (1,26); J 1,65 (1,56).

reflektierte Strahl 2 nach dem zu F' in bezug auf L konjugierten Punkt K geht, während der an der Rückseite von P reflektierte Strahl 1 durch den seitlich verschobenen Punkt K' läuft. Lummer hat gezeigt, daß die Strahlen 1 und 2 sich in der vorderen Brennebene \mathfrak{F} von L schneiden, und daß nur sie es sein können, die die beobachtete Interferenzerscheinung hervorbringen.

Die Interferenzkurven sind, wie Lummer theoretisch abgeleitet und experimentell bestätigt hat, äquidistante vertikale Gerade, die symmetrisch zu einem Zentralstreifen angeordnet sind, der etwas seitlich der optischen Achse liegt. Die Streifenabstände werden um so kleiner, je weiter der Spiegel aus seiner „Nullstellung“, d. h. aus der Brennebene der Linse entfernt wird. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Richtung er verschoben wird. Die Erscheinung ist also symmetrisch zur Nullstellung des Spiegels. Befindet er sich in der Nullstellung selbst, so treten keine Interferenzstreifen mehr auf, sondern das ganze Gesichtsfeld ist gleichmäßig hell.

Die Theorie führt aber nur dann zu dieser einfachen Interferenzerscheinung, wenn ideal abbildende Linsen vorausgesetzt sind. Daß Lummer trotzdem seine theoretischen Resultate experimentell bestätigen konnte, liegt in erster Linie daran, daß er in verhältnismäßig großen Entfernungen von der Nullstellung beobachtet hat und außerdem als Linsensysteme Fernrohrobjektive benutzte, die sphärisch gut korrigiert zu sein pflegen.

§ 2. Dagegen erhält man in unmittelbarer Nähe der Nullstellung des Spiegels Interferenzkurven, die von den Lummerschen durchaus abweichen. Diese Abweichungen rühren von den Abbildungsfehlern des Linsensystems her und sind je nach dem Korrektionszustande desselben und je nach den sonstigen Versuchsbedingungen (Plattendicke) mehr oder weniger ausgeprägt. Bei einem sphärisch unterkorrigierten System sind die Kurven rechts und links von dem Zentralstreifen nach der Mitte zu konkav gekrümmt, solange sich der Spiegel außerhalb der Brennweite befindet, und werden konvex, nachdem er durch seine Nullstellung hindurchgewandert ist¹⁾. Wer im Lesen der Interferenzbilder etwas Übung hat, gewinnt schon durch die subjektive Beobachtung der Kurven bei Spiegelverschiebung in sehr reizvoller Weise ein gutes qualitatives Bild von dem Korrektionszustand des Systems. In der Nullstellung des Spiegels ist die Empfindlichkeit besonders groß. Die geringsten Spuren eines Abbildungs-

¹⁾ Vgl. die Abbildungen auf S. 1048 und 1049 in der zitierten Arbeit von Waetzmann.

fehlers machen sich hier durch das Auftreten von Interferenzkurven bemerkbar.

§ 3. Bei der quantitativen Durcharbeitung der Methode¹⁾, die nach dem Kriege in Angriff genommen wurde und bereits ziemlich weitgehend durchgeführt ist, stellte sich folgende Schwierigkeit heraus: Jeder der beiden interferierenden Strahlen geht zweimal durch die Linse, und zwar im allgemeinen Falle in verschiedenen Abständen von dem Linsenmittelpunkt. Für die zonenweise Berechnung des Korrektionszustandes ist man deshalb auf Mittelbildung aus vier verschiedenen Entfernungen angewiesen. Wenn die Versuchsbedingungen geeignet gewählt werden — genügend dünne planparallele Platte und im Verhältnis zur Brennweite des Systems große Entfernung des Beobachtungsapparates B —, ergeben sich trotzdem gute Resultate. Es erscheint aber möglich, durch Veränderung der Versuchsanordnung die genannten Fehler zu beseitigen und damit die Meßgenauigkeit noch zu erhöhen.

§ 4. Zunächst muß dafür gesorgt werden, daß das von der planparallelen Platte ausgehende Strahlenpaar die Linse nicht zweimal, sondern nur einmal durchsetzt. Zu diesem Zwecke kehrt man zu der ursprünglichen Jaminschen Anordnung mit zwei Platten zurück. Neben dem zu untersuchenden optischen System muß dann aber ein zweites von genau bekannten Eigenschaften in den Strahlengang eingeführt werden, damit die durch das erste System erzeugten starken Winkeländerungen der Strahlen wieder ausgeglichen werden. Man wird also — für Beobachtung im reflektierten Licht — zu einer Anordnung geführt, wie sie in Fig. 2 skizziert ist²⁾.

L_1 und L_2 müssen so aufgestellt werden, daß der hintere Brennpunkt F'_1 von L_1 mit dem vorderen F'_2 von L_2 nahe zusammenfällt. An Stelle der Spiegelverschiebung in der ursprünglichen Anordnung tritt jetzt die Verschiebung eines der beiden optischen Systeme. Ist die Brennweite von L_1 größer als die von L_2 , so wird noch der Abstand a der beiden aus L_2 austretenden Strahlen gegenüber ihrem ursprünglichen Abstand a_0 verkleinert, und zwar im Verhältnis der Brennweiten von L_1 und L_2 .

§ 5. Bei der experimentellen Prüfung der obigen Überlegungen stießen wir auf Schwierigkeiten, wenn die Brennweiten von L_1 und L_2 sehr verschieden gewählt wurden. Mit wachsender Größe des Unterschiedes wurde das vorher tadellos scharfe Interferenzbild immer

¹⁾ E. Bratke, Über die Waetzmanssche Interferenzmethode zur Untersuchung optischer Systeme. Diss. Breslau 1922.

²⁾ E. Bratke, l. c.

verwaschener. Ähnliche Schwierigkeiten ergaben sich, wenn die Dicken der beiden Platten P_1 und P_2 wesentlich verschieden waren. Es wurde deshalb zunächst mit Linsensystemen gleicher oder nahezu gleicher Brennweite und mit planparallelen Platten gleicher Dicke gearbeitet. Die Platten wurden aus dem Michelsonschen Interferometer entnommen und waren beiderseitig unversilbert. Leider reichte ihre Größe nicht aus, um das ganze Interferenzbild zu bekommen. Infolgedessen geben die Kurvenaufnahmen in Fig. 3 nur ein sehr unvollkommenes Bild der Erscheinung. Sie sind aus einer Reihe von

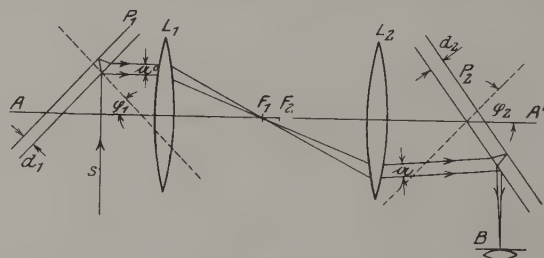


Fig. 2.

Aufnahmen herausgegriffen, um wenigstens ein Beispiel für eine typische Art von Interferenzkurven zu geben. Photographiert wurde auf Hauff-Flavin-Platten mit der Hg-Linie 578μ .

Die Bilder der Fig. 3 beziehen sich auf ein Fernrohrobjektiv (Stellung L_1) von etwa 340 mm Brennweite und ein Rapidaplanat von

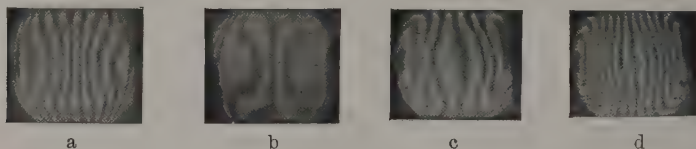


Fig. 3.

etwa der gleichen Brennweite. Die Kurvenformen der Bilder *a* bis *d* werden durchlaufen, wenn L_1 von der Ausgangsstellung *a* aus mehr und mehr von L_2 entfernt wird. Die gesamte Verschiebung bei dem Übergange von *a* nach *d* beträgt etwa 8 mm. Die Bilder zeigen die charakteristischen Kurvenformen eines zonal korrigierten Systems (innere Zonen unterkorrigiert, äußere Zonen überkorrigiert).

Hierbei befindet sich also das gut korrigierte und in seinen Fehlern als bekannt angenommene Fernrohrobjektiv in der Stellung L_1 . Die Kurvenformen sind dann durch die Fehler des Aplanats in Stellung L_2 bestimmt und von der Entfernung des Beobachtungsapparates

weitgehend unabhängig. Werden dagegen die beiden optischen Systeme vertauscht, so daß das Aplanat in die Stellung L_1 kommt, so sind die Kurvenformen je nach der Entfernung des Beobachtungsapparates, der eine sehr kleine Eintrittsöffnung besitzt, verschieden. Bei kleiner Entfernung herrschen die für das Fernrobobjektiv charakteristischen senkrechten Streifen vor, bei größerer Entfernung dagegen die für das Aplanat charakteristischen, komplizierteren Formen. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen. Wie eine einfache, geometrische Überlegung lehrt, durchsetzen die zur Erscheinung beitragenden interferierenden Strahlen nur die Mitte des Aplanats, wenn sich der Beobachtungsapparat in einer Entfernung von L_2 befindet, die etwa gleich der doppelten Brennweite von L_2 ist. Wird dagegen die Entfernung wesentlich vergrößert, so wirken auch die Außenzonen des Aplanats mit, so daß sich seine Abbildungsfehler bemerkbar machen müssen.

In Fig. 4 sind zum Vergleich einige Aufnahmen gegeben, die an dem gleichen Aplanat mit der ursprünglichen Anordnung (Fig. 1) gewonnen wurden. Die Kurvenformen der Bilder *a* bis *d* werden durchlaufen, wenn der Spiegel von der Ausgangsstellung *a* aus von der

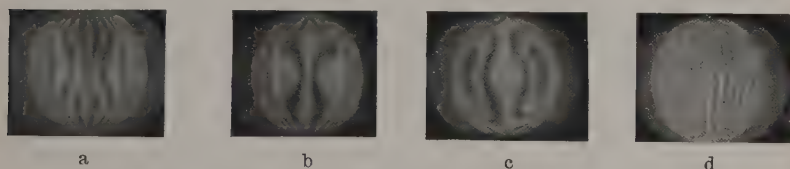


Fig. 4.

Linse mehr und mehr entfernt wird. Es wurde kein Wert darauf gelegt, die Spiegelabstände von der Linse so zu wählen, daß sich die Bilder der Figuren 4 und 3 paarweise genau entsprechen.

Zusammenfassung.

Im Anschluß an eine früher beschriebene Interferenzmethode zur Untersuchung der Abbildungsfehler optischer Systeme werden Kurvenaufnahmen mit einer abgeänderten Versuchsanordnung, durch welche eine Erhöhung der Meßgenauigkeit erreicht werden soll, mitgeteilt.

Breslau, Physikalisches Institut, Oktober 1922.

Polare und axiale Vektoren in der Physik.

Von **Fritz Emde** in Stuttgart.

(Eingegangen am 26. Oktober 1922.)

Bei den Physikern ist die Ansicht sehr verbreitet, es sei experimentelle Tatsache, daß die elektrische Feldstärke ein polarer, die magnetische ein axialer Vektor ist¹⁾. Es ist auffällig, daß man die Beweise fast immer nur angedeutet, nie ausgeführt findet. Nach meiner Meinung kann keine der bekannten elektromagnetischen Erscheinungen als Beweis gelten. Da die Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren oft nicht scharf getrennt wird von der Unterscheidung zwischen Monovektoren und Bivektoren (Strecken und Plangrößen), so wollen wir, ehe wir auf die angeblichen Beweise eingehen, zunächst die hier in Frage kommenden Begriffe möglichst deutlich und so einfach erklären, daß man sich auch ohne besondere Vorstudien ein Urteil bilden kann.

I. Geometrie und Kinematik.

1. Ein polarer Vektor kann dargestellt werden entweder durch einen Stab, der an einem Ende schwarz, am andern weiß gefärbt ist (Kompaßnadel: a oder b oder ...), oder durch ein Ebenenstück, das auf einer Seite schwarz, auf der andern weiß gefärbt ist (Doppelschicht: A oder B oder ...). Die Reihenfolge der Farben schwarz und weiß muß willkürlich festgesetzt werden. Es komme stets erst schwarz, dann weiß (Richtungssinn: von schwarz nach weiß).

Statt des Stabes mit verschieden gefärbten Enden kann man auch einen Pfeil setzen.

2. Ein axialer Vektor kann dargestellt werden entweder durch ein Ebenenstück mit Umlaufsinn („Drehscheibe“) oder durch einen rotierenden dünnen Zylinder von bestimmter Länge (Strecke mit Drehpfeil, „Drehstrecke“).

Pfeil und Drehstrecke werden als Monovektoren (Strecken) zusammengefaßt, Doppelschicht und Drehscheibe als Bivektoren [Plangrößen]²⁾.

¹⁾ Siehe z. B. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 1. Aufl., S. 38 („die magnetische Feldstärke ist in Wahrheit nicht ein Vektor, sondern ein schiefssymmetrischer Tensor“); W. Pauli jr., Enzykl. math. Wiss. 5, 19, S. 631 (wo von einer „naturgemäßen Darstellung“ und einer „künstlichen Bildung“ die Rede ist).

²⁾ Vgl. hierzu J. A. Schouten, Die Zahlensysteme der geometrischen Größen. Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 13 (etwa 1917).

3. Bei der Addition und bei der innern Multiplikation von polaren Vektoren und bei der von axialen Vektoren zeigt sich kein Unterschied zwischen beiden.

4. Bei der äußern Multiplikation von zwei gleichartigen Vektoren entsteht ein axialer Vektor, nämlich:

a) aus zwei Pfeilen a und b eine Drehscheibe $[ab]$;

b) aus zwei Doppelschichten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} eine Drehstrecke $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ (parallel der Schnittlinie);

c) aus zwei Drehscheiben $[ab]$ und $[cd]$ eine Drehstrecke (parallel der Schnittlinie);

d) aus zwei Drehstrecken $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ und $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ eine Drehscheibe.

5. Multipliziert man eine Doppelschicht \mathfrak{A} (im Grassmannschen Sinne) äußerlich mit einem Pfeil b oder eine Drehscheibe $[ab]$ äußerlich mit einer Drehstrecke $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$, so entsteht eine Zahl. Über das Vorzeichen dieser Zahl besteht kein Zweifel. Solche Zahlen sollen „gerade“ Skalare genannt werden.

6. Multipliziert man eine Drehscheibe $[ab]$ äußerlich mit einem Pfeil c oder eine Doppelschicht \mathfrak{A} äußerlich mit einer Drehstrecke $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, so ergibt sich auch eine Zahl. Aber das Vorzeichen dieser Zahl kann erst bestimmt werden, nachdem festgesetzt ist, ob die axialen Vektoren den polaren nach einer Rechtsschraube oder nach einer Linksschraube zugeordnet werden sollen. Ohne eine solche willkürliche Zuordnung kann man nur sagen, ob man in zwei Fällen gleiche oder verschiedene Vorzeichen bekommt. Zahlen dieser Art sollen „ungerade“ Skalare heißen.

7. Durch vektorische Multiplikation eines axialen Vektors $[ab]$ oder $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ mit einem polaren g oder \mathfrak{S} entsteht ein polarer Vektor¹⁾. Der erhaltene polare Vektor, der bekanntlich entweder eine zur Ebenenschar des Drehpfeils des axialen Vektors parallele Strecke oder eine dazu senkrechte Doppelschicht ist, entsteht aus dem gegebenen polaren Vektor durch Drehung um einen rechten Winkel im Sinne des Drehpfeils, wenn der axiale Vektor der erste Faktor des Produkts ist, der polare Vektor der zweite. Der Richtungssinn des erhaltenen polaren Vektors ist unabhängig von einer willkürlichen Zuordnung der axialen Vektoren zu den polaren und hängt nur von der Reihenfolge der beiden Faktoren ab.

Beispiel aus der Kinematik: Umfangsgeschwindigkeit = Winkelgeschwindigkeit \times Ortsvektor.

¹⁾ Vgl. hierzu H. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 180 (Werke I, 2, S. 136) oder E. Jahnke, Vorlesungen über Vektorenrechnung (Leipzig, Teubner, 1905), S. 104.

8. Ein Volumenelement $dv = [d_1 r d_2 r] d_3 r$ ist ein ungerader Skalar, wenn man das Flächenelement $[d_1 r d_2 r]$ als Drehscheibe auffaßt.

Wenn man aber das Flächenelement als Doppelschicht $d\mathfrak{F}_3$ auffaßt, so ist das Volumenelement $dv = d\mathfrak{F}_3 d_3 r$ ein gerader Skalar.

Die Berechnung von Raumintegralen läuft auf eine dreifache Integration hinaus, so daß hierbei das Volumenelement als ungerader Skalar auftritt. Auch bei der Volumenberechnung in der Form Grundfläche \times Höhe ist die Grundfläche prinzipiell erst als „Drehscheibe“ zu berechnen und kann also nicht als gegebene Doppelschicht angesehen werden.

9. Der Rotor eines polaren Vektors ist ein axialer Vektor und umgekehrt.

10. Bildet man von dem Vektor

$$\mathfrak{B} = j \sin x + k \cos x$$

den Rotor, so erhält man:

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \frac{\partial [i \mathfrak{B}]}{\partial x} = [i j] \cos x + [k i] \sin x,$$

und wenn man davon wiederum den Rotor nimmt:

$$\text{rot rot } \mathfrak{B} = - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} = j \sin x + k \cos x.$$

Hier ist also $\text{rot } \mathfrak{B}$ die „Ergänzung“ von \mathfrak{B} und $\text{rot rot } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, oder da $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ ist, $\nabla^2 \mathfrak{B} + \mathfrak{B} = 0$. Wenn man nur die Feldpunkte, die auf einer Parallelen zur x -Achse liegen, ins Auge faßt, so beschreiben die Endpunkte der zugehörigen Vektoren \mathfrak{B} eine linksgängige Schraubenlinie (vorausgesetzt, daß nach üblicher Festsetzung i, j, k ein Rechtssystem bilden).

II. Dynamik und Elektrizitätslehre.

11. Da Masse = Massendichte \times Volumen und da das Volumen ebensogut als ein gerader wie als ein ungerader Skalar angesehen werden kann, so bleibt es unentschieden, ob Masse und Massendichte gleichartige oder ungleichartige Skalare sind, und wenn sie ungleichartige sein sollten, welche von beiden ein gerader und welche ein ungerader Skalar ist. Ganz entsprechende Überlegungen lassen sich an die Gleichung: Elektrizitätsmenge = Elektrizitätsdichte \times Volumen knüpfen.

Von vornherein wird man geneigt sein, das Volumen als einen geraden Skalar anzusehen. Aber bei der tatsächlichen Volumenberechnung ist das Volumen ein ungerader Skalar.

12. In der Gleichung: Kraft = Masse \times Beschleunigung ist die Beschleunigung ein polarer Vektor. Da aber die Masse ein gerader oder ein ungerader Skalar sein kann, so ist die Kraft nicht notwendig ein polarer Vektor. Ähnlich ist es bei der Gleichung: Elektrische Stromdichte = Elektrizitätsdichte \times Geschwindigkeit der Elektrizität.

In der Gleichung: Kraft = Elektrizitätsmenge \times elektrische Feldstärke ist der Charakter keiner der drei vorkommenden Größen feststehend.

13. Dielektrizitätskonstante, elektrische Leitfähigkeit und Permeabilität sind wesentlich positive Materialkonstanten und werden daher als gerade Skalare anzusehen sein. Deshalb sind alle elektrischen Vektoren als gleichartig anzusehen, ebenso alle magnetischen Vektoren.

Natürlich könnte man auch umgekehrt die Gleichartigkeit der Vektoren annehmen und daraus auf gerade Skalare schließen. Im Grunde ist beides zwar plausibel, aber willkürlich und unbeweisbar. Doch soll weiterhin an der Annahme der Gleichartigkeit festgehalten werden. Sonst könnten wir auf die angeblichen Beweise für die Polarität der elektrischen Vektoren gar nicht eingehen.

14. Die Maxwellschen Gleichungen setzen die zeitliche Änderung eines elektrischen Vektors proportional dem Rotor eines magnetischen Vektors und umgekehrt. Daher sind die elektrischen und die magnetischen Vektoren ungleichartig.

15. Der Poyntingsche Vektor (die Dichte des elektromagnetischen Energiestroms) ist daher ein polarer Vektor. Da er auch = Energiedichte \times Strömungsgeschwindigkeit der Energie gesetzt werden kann und da die Geschwindigkeit ein polarer Vektor ist, so ist die Dichte der elektromagnetischen Energie ein gerader Skalar.

16. Aus der Gleichung $\mathfrak{f} = [\mathfrak{G} \mathfrak{B}] = \varrho [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$, in Worten: Kraftdichte = Stromdichte \times magnetische Induktion, folgt, daß die Kraftdichte ein polarer Vektor ist, da ja \mathfrak{G} und \mathfrak{B} ungleichartige Vektoren sind. Dividiert man durch die Elektrizitätsdichte ϱ , von der man nicht weiß, ob sie ein gerader oder ein ungerader Skalar ist, so erhält man $\mathfrak{f}/\varrho = \mathfrak{G} = [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$. Von den hier vorkommenden Größen weiß man nur, daß die Kraftdichte \mathfrak{f} und die Elektrizitätsgeschwindigkeit \mathfrak{v} polare Vektoren sind.

17. Aus der Elektrolyse kann man nicht schließen, daß die elektrischen Vektoren polar sind. Denn es ist unentschieden, ob in der Gleichung $\mathfrak{G} = \varrho \mathfrak{v}$ die Elektrizitätsdichte ϱ ein gerader oder ein ungerader Skalar ist.

18. Wenn man Glas und eine Schicht von Zinkamalgame oder eine Kupferplatte und eine Zinkplatte erst in Berührung bringt und dann voneinander entfernt, so entsteht dazwischen ein elektrisches Feld vom Glas zum Zinkamalgame oder vom Zink zum Kupfer. Daraus kann man aber nicht schließen, daß das elektrische Feld ein polarer Vektor sei, sondern man kann daraus nur auf eine gewisse polare Konstitution jener Substanzen schließen. Auch aus der Erscheinung der Pyroelektrizität kann man nicht auf den Charakter des elektrischen Feldes schließen, sondern nur auf eine gewisse polare Konstitution des Turmalins.

19. Die Gleichung für das durch Bewegung im Magnetfeld erregte elektrische Feld $\mathfrak{E} = [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ erlaubt nur den Schluß, daß die elektrischen und die magnetischen Vektoren von verschiedenem Charakter sind. Daraus folgt weiter, daß $\varrho\mathfrak{E} = [\mathfrak{G}\mathfrak{B}]$ ein polarer Vektor ist, daß also entweder ϱ ein gerader Skalar und \mathfrak{E} ein polarer Vektor oder ϱ ein ungerader Skalar und \mathfrak{E} ein axialer Vektor ist. Dasselbe folgt aber auch schon aus $\text{div } \mathfrak{D} = \varrho$ und $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, wo ε ein gerader Skalar ist. Eine Entscheidung darüber, ob die elektrischen oder die magnetischen Vektoren polare sind, liefert auch nicht der in seinem Vorzeichen von Metall zu Metall so schwankende Hall'sche Effekt, da sich bei ihm keine andern Beziehungen geltend machen¹⁾. (Er besteht bekanntlich darin, daß ein elektrischer Strom, der in einem Streifen von dünnem Wismutblech fließt, ein elektrisches Querfeld erregt, wenn durch den Wismutstreifen ein starkes Magnetfeld tritt.) Das vektorische Produkt $[\mathfrak{G}\mathfrak{B}]$ aus dem elektrischen Vektor \mathfrak{G} und dem magnetischen Vektor \mathfrak{B} ist nicht wieder ein elektrischer Vektor (woraus sonst allerdings sofort folgen würde, daß das elektrische Feld ein polarer Vektor ist), sondern der mechanische Vektor $\mathfrak{k} = \varrho\mathfrak{E}$.

20. Die Unmöglichkeit, zu entscheiden, ob die elektrischen Vektoren polare und die magnetischen axiale sind oder umgekehrt, hängt aufs engste zusammen mit der Unmöglichkeit, die elektrischen und die magnetischen Einheiten restlos auf die mechanischen zurückzuführen. Beide Unmöglichkeiten haben ihren Grund darin, daß die elektromagnetischen Größen in den Gleichungen stets paarweise auftreten.

21. Wenn der Vektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{j} \sin x + \mathfrak{k} \cos x$ eine physikalische Bedeutung hätte, so könnte er von seiner „Ergänzung“ nicht unterschieden werden, und es würde die Gleichung $\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{B}$ bestehen.

¹⁾ Vgl. hierzu F. Koláček, Wied. Ann. 55, 503, 1895.

Der Vektor \mathfrak{B} könnte also weder polar noch axial sein, oder er müßte beides zugleich sein.

22. In der vierdimensionalen Vektorenrechnung der Relativitätstheorie haben die Monovektoren vier, die Bivektoren sechs Bestimmungszahlen. Die Anhänger der Vektorenrechnung Grassmannscher Richtung haben hierin eine Bestätigung ihrer Ansicht erblickt, daß es auch in der Physik notwendig sei, die „Stufenzahl“ Grassmanns zu berücksichtigen und zwischen Monovektoren und Bivektoren zu unterscheiden. Einige Physiker haben die vierdimensionalen Monovektoren als polare, die vierdimensionalen Bivektoren als axiale Vektoren aufgefaßt, was aber ebenso willkürlich ist wie bei den Vektoren des dreidimensionalen Raumes. Bei der physikalischen Anwendung der vierdimensionalen Vektorenrechnung ergibt sich kein Anlaß, zwischen den vierkomponentigen Trivektoren (in den vierdimensionalen Raum eingelagerten dreidimensionalen Raumstücken) und den ebenfalls vierkomponentigen Monovektoren zu unterscheiden. Das beweist, daß es physikalisch nicht auf die Stufenzahl, sondern nur auf die Komponentenzahl (Anzahl der Bestimmungszahlen) ankommt und daß also für die Physik keinerlei Notwendigkeit vorliegt, im dreidimensionalen Raum die Vektoren zu klassifizieren. Die physikalischen Vektoren würden sich nicht ohne Willkür auf die Klassen verteilen lassen.

III. Zusammenfassung und Folgerungen.

23. Aus dem Vorangehenden folgt: Nur bei den kinematischen Vektoren kann man mit Sicherheit entscheiden, ob sie polar oder axial sind. Bei den dynamischen und elektromagnetischen Vektoren kann man es nicht. Die Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren ist daher für die Dynamik und für die Elektrizitätslehre bedeutungslos. Als Objekte der Vektorenrechnung sind die beiden Arten von Vektoren völlig gleich zu behandeln.

24. Angenommen, es sei von einem physikalischen Vektor entschieden, daß er ein polarer ist. Dann könnte er ebensogut durch einen Pfeil, wie durch eine Doppelschicht dargestellt werden. Keine der beiden Darstellungen würde sich als die richtigere erweisen lassen. Ebensowenig ließe sich bei einem axialen physikalischen Vektor entscheiden, ob er richtiger durch eine Drehscheibe oder durch eine Drehstrecke darzustellen wäre. Beide Darstellungen leisten genau dasselbe. Die Unterscheidung zwischen Strecken und Ebenenstücken (Plangrößen) ist daher für die Dynamik und die Elektrizitätslehre bedeutungslos. Als Objekte der Vektorenrechnung sind beide völlig gleich zu behandeln.

25. In der Dynamik (Statik und Kinetik) und Elektrizitätslehre läßt sich nirgends eine Rechtfertigung dafür finden, daß man die Vektorenrechnung erstens mit der Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren und zweitens mit der Unterscheidung zwischen Strecken und Plangrößen belastet. Man verliert nichts und gewinnt eine große Vereinfachung, wenn man diese Unterscheidungen unbeachtet läßt.

Die Unterscheidung zwischen Strecken und Plangrößen (Monovektoren und Bivektoren) ist dagegen selbstverständlich in der Geometrie durchführbar, die Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren in der Kinematik.

Die Stellung der Uhr in der Relativitätslehre.

Von **Franz Riedinger** in Jena.

[Eingegangen am 15. August 1922¹).]

Inhalt: 1. Die Stellung der allgemeinen Zeit. — 2. Die Gleichzeitigkeit an demselben Orte stattfindender Ereignisse. — 3. Der Begriff der Uhr. — 4. Die Auswahl der Uhren. — 5. Zusammenfassung.

1. Die Stellung der allgemeinen Zeit. Nach der Einsteinschen Relativitätslehre hat der Begriff der Zeit in der Physik nur dann einen Sinn, wenn unter ihm die Anzeige einer Uhr verstanden wird, die sich an dem Orte des der Zeit nach zu wertenden Vorganges oder Zustandes befindet, und die Anzeigen der an verschiedenen Orten befindlichen Uhren zueinander in eine gewisse, immer nur für ein System geltende Beziehung gesetzt werden²). Daraus ergibt sich für die Relativitätslehre³) die Ablehnung der in der klassischen Mechanik auftretenden allgemeinen Zeit⁴), die für alle Systeme gemeinsam gilt, und zwar durch Uhren gemessen wird, aber dem Begriffe nach auch ohne Uhren gegeben ist, ja schon von dem Begriffe der Uhr vorausgesetzt wird. Daß jedoch tatsächlich, trotz dieser Ablehnung, auch von der Relativitätslehre die allgemeine Zeit vorausgesetzt werde, ist schon vielfach geltend gemacht worden⁵), jedoch, soviel mir bekannt ist, stets auf Grund von sehr allgemeinen Erwägungen, so daß Bedenken bestehen könnten, ob nicht diesen Erwägungen etwa Voraussetzungen zugrunde liegen, die von der Relativitätslehre gerade bestritten werden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein zu untersuchen, inwieweit ganz bestimmte Punkte der Relativitätslehre die allgemeine Zeit voraussetzen, da es wohl nur dadurch, daß man ins einzelne geht, möglich ist, dafür zu sorgen,

¹) Aus äußeren Gründen verspätet abgedruckt.

²) Vgl. z. B. A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. 17, § 1, 1905.

³) Auch da, wo in der vorliegenden Arbeit von der Relativitätslehre schlechthin gesprochen ist, ist darunter die Einsteinsche verstanden, die z. B. von Weinstein (Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie, Leipzig 1913, S. 413) ausdrücklich von der Minkowskischen unterschieden wird.

⁴) Mit dem Ausdruck „allgemeine Zeit“ folge ich Max Frischeisen-Köhler (s. z. B. Wissenschaft und Wirklichkeit, Leipzig u. Berlin 1912, S. 325).

⁵) Siehe z. B. Paul Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig u. Berlin 1910, S. 396; Max Frischeisen-Köhler, l.c., S. 323—328, und Das Zeitproblem, Jahrb. d. Philos. 1, 163 f., 1913; Richard Hönigswald, Zum Streit über die Grundlagen der Mathematik, Heidelberg 1912, S. 99 und Naturphilosophie, Jahrb. d. Philos. 1, 82 f., 1913; Friedrich Reinhard Lipsius, Naturphilosophie und Weltanschauung, Leipzig 1918, S. 97 f.

daß bei der Untersuchung keine Voraussetzungen gemacht werden, die nicht auch die Anhänger der Relativitätslehre selbst zugrunde legen.

Schon in dem Begriff, daß eine Uhr geht, wird (wie in dem Begriff jeder Veränderung überhaupt) die allgemeine, unabhängig von der Uhr verlaufende Zeit vorausgesetzt. Denn der Begriff der Veränderung setzt zwei Zustände voraus, einen früheren und einen späteren, und das Wesen der allgemeinen Zeit besteht nur darin, daß jeder Augenblick (Zeitpunkt) einerseits später ist als ein anderer, und andererseits früher als wieder ein anderer. Das Gehen einer Uhr setzt also voraus, daß unabhängig von der Uhr eine Zeit verläuft. Mit der gerade betrachteten Uhr ist diese Zeit aber in keiner besonderen Weise verknüpft, da ja ihre Unabhängigkeit von der Uhr gerade vorausgesetzt war; sie spielt also allen Uhren (und überhaupt allen Veränderungen gegenüber) dieselbe Rolle und gilt daher für alle Systeme. Auf diese Beziehung zwischen den Begriffen Früher und Später einerseits und einem gewissen Zeitbegriff andererseits hat, freilich in anderer Endabsicht, schon Campbell hingewiesen¹⁾.

Im besonderen spielen in der Relativitätslehre synchron gehende Uhren eine Rolle, da ja in jedem System die Zeit durch in dem System ruhende, synchron gehende Uhren geliefert werden soll. Für den Synchronismus im Sinne der Relativitätslehre gilt dabei folgende Begriffsbestimmung²⁾:

„Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „A-Zeit“ t_A von A nach B ab, werde zur „B-Zeit“ t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „A-Zeit“ t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Bei diesem Hin- und Hergehen eines Lichtstrahls besteht zwischen dem Fortschreiten des Lichtstrahls, sobald er die erste Uhr verlassen hat, und dieser Uhr keinerlei Verbindung. Die Voraussetzung, daß die erste Uhr während des Hin- und Hergehens des Lichtstrahls überhaupt weitergegangen ist, gründet sich also selbst auf eine andere Voraussetzung. Diese andere Voraussetzung ist nicht etwa die oben behandelte Voraussetzung des Gehens der Uhren überhaupt, denn diese besagt noch nichts über das Weitergehen während eines Vorganges, der sich nicht am Orte der Uhr abspielt. Die neue Voraussetzung gründet sich wiederum auf die allgemeine Zeit, da der Begriff „während“ oder ein gleichwertiger Begriff ohne Beziehung

¹⁾ Norman Campbell, Relativitätsprinzip und Äther, Phys. ZS. 13, 126, Anm. 1, 1912.

²⁾ Einstein, Zur Elektrodynamik usw., S. 894.

auf die allgemeine Zeit dabei nichtssagend wäre, ein solcher Begriff jedoch hier unentbehrlich ist, wenn man das ausdrücklich sagen will, was stillschweigend vorausgesetzt wird. Auf das Bedenkliche, das für die Relativitätslehre in dem Gebrauch solcher Begriffe liegen kann, hat schon von Mangoldt aufmerksam gemacht¹⁾. Dieser Begriffsbestimmung des Synchronismus liegt jedoch nicht nur der Begriff der allgemeinen Zeit zugrunde, sondern sogar auch der gewöhnliche Begriff des Zeitraums, da ja in dieser Begriffsbestimmung die Aussage liegt, daß sich zwei räumlich getrennte Vorgänge innerhalb ein und desselben Zeitraumes abspielen (nicht etwa nur innerhalb zweier gleicher Zeiträume). Da ein Zeitraum von zwei Zeitpunkten begrenzt wird, so wird also auch der gewöhnliche Begriff des Zeitpunktes und dadurch auch der gewöhnliche Begriff der Gleichzeitigkeit stillschweigend vorausgesetzt, denn Gleichzeitigkeit im gewöhnlichen Sinne bedeutet ja nichts anderes als das Geschehen in demselben Zeitpunkte.

Der Begriff des Zeitpunktes, der für den Begriff des Zeitraums notwendig ist, kann für die Begriffsbestimmung des Synchronismus auch nicht etwa dadurch geliefert werden, daß unter dem Zeitpunkte, in dem der Zeitraum anfängt, während dessen der Lichtstrahl hin- und hergehen soll, der Wert verstanden wird, den die erste Uhr anzeigt, wenn der Lichtstrahl von ihr abgeht. Denn solange unter der Zeit nichts anderes verstanden werden soll als die jeweilige Anzeige der gerade betrachteten Uhr, mißt jede Uhr nur für den Ort Zeiträume, an dem sie sich befindet, und es haben Zeiträume, die einen von der Uhr entfernten Vorgang betreffen, keine Beziehung zu der Uhr. Man würde daher, wenn man als den Anfangszeitpunkt die betreffende Anzeige der ersten Uhr gelten lassen wollte, den Zeitraum an etwas anknüpfen, das voraussetzungsgemäß nichts mit ihm zu tun hat, da ja dieser Zeitraum eben keiner der Zeiträume ist, die diese mit ihrer Geltung auf ihren Ort beschränkte Uhr messen kann.

Daß der Begriff der allgemeinen Zeit und der der gewöhnlichen Gleichzeitigkeit untrennbar miteinander zusammenhängen, läßt sich auch ganz allgemein zeigen. Zunächst ist es zwar nicht ohne weiteres einleuchtend, worin denn das für zwei an verschiedenen Orten vor sich gehende Ereignisse Gemeinsame liege, das doch unterstellt wird, sobald man aussagt, daß die beiden Ereignisse gleichzeitig (im gewöhnlichen Sinne) sind; denn scheinbar steht dieser Gemeinsamkeit der Umstand entgegen, daß zwischen zwei Stellen des Raumes keine

¹⁾ H. von Mangoldt, Längen- und Zeitmessung in der Relativitätstheorie, Z. d. V. d. Ing. **54**, 682, 1910; Phys. ZS. **11**, 737, 1910.

Verbindung vorhanden ist. Demgegenüber ist jedoch zu bedenken, daß die unabhängig verlaufende Zeit, wenn überhaupt einmal vorausgesetzt, für alle Ereignisse gemeinsam ist, gleichgültig, wo sich die Ereignisse abspielen. Es spielt daher ein irgendwie ausgewählter Zeitpunkt allen Ereignissen gegenüber dieselbe, weil von allen Ereignissen unabhängige Rolle, so daß die Möglichkeit der Aussage, daß ein Zeitpunkt für zwei räumlich getrennte Ereignisse gemeinsam ist, die beiden Ereignisse also gleichzeitig sind, gegeben ist, sobald die allgemeine Zeit vorausgesetzt wird.

Die Relativitätslehre macht ferner die Voraussetzung, daß es räumlich getrennte Uhren geben könne, die dauernd synchron gehen. Diese Voraussetzung liegt z. B. deutlich vor, wenn Einstein sagt¹⁾:

„Diese Festsetzung enthält noch eine physikalische Hypothese, an deren Zutreffen man ohne empirische Gründe kaum zweifeln wird. Es ist nämlich angenommen, daß all diese Uhren „gleich rasch“ gehen, wenn sie von gleicher Beschaffenheit sind. Exakt formuliert: Wenn zwei an verschiedenen Stellen des Bezugskörpers ruhend angeordnete Uhren so eingestellt werden, daß eine Zeigerstellung der einen mit derselben Zeigerstellung der anderen gleichzeitig (im obigen Sinne) ist, so sind gleiche Zeigerstellungen überhaupt gleichzeitig (im Sinne obiger Definition).“

Daß die Voraussetzung dauernd synchron gehender Uhren für die Relativitätslehre in der Tat unentbehrlich ist, folgt schon daraus, daß es nur unter dieser Voraussetzung z. B. möglich ist, daß sich ein Körper mit unveränderlicher Geschwindigkeit zwischen zwei Uhren hin und her bewegt, da sich bei nicht dauernd synchron gehenden Uhren im allgemeinen für diesen Vorgang nicht stets dieselbe Zeitdauer ergeben, die Geschwindigkeit des Körpers also nicht unveränderlich sein würde.

Zu dieser Voraussetzung ist folgendes zu bemerken: Das oben behandelte Verfahren zur Prüfung des Synchronismus gibt zunächst nur an, wie die Zeigerstellung der betreffenden beiden Uhren gewesen ist, als das Verfahren angewendet wurde. Dies allein besagt über den dauernden Synchronismus noch nichts; denn die Bedingung des Synchronismus könnten die beiden Uhren zufällig einmal erfüllt haben, ohne daß daraus über ihr ferneres Verhalten etwas geschlossen werden könnte. Damit der Synchronismus dauernd vorhanden ist, kommt man nicht umhin, mit Einstein anzunehmen, daß die Uhren „gleich rasch“ gehen. Nun besteht aber das Gehen einer Uhr in

¹⁾ A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Braunschweig 1917, S. 16.

gewissen Veränderungen, die die Uhr in sich erleidet, Veränderungen, von denen man ohne die Voraussetzung der allgemeinen Zeit allerdings sehr wohl die reine Aufeinanderfolge der verschiedenen Zustände angeben kann; ein bestimmter Gang ist dadurch aber noch nicht gegeben, da dieser einer Uhr erst dann zukommt, wenn man angeben kann, in welchen Zeiträumen sich die Veränderungen abspielen. Es würde daher der Relativitätslehre die Grundlage für eine Angabe über den Gang der Uhren fehlen, sofern von der Relativitätslehre die allgemeine Zeit nicht vorausgesetzt würde.

Auch wenn man voraussetzte, daß die eine Uhr regelmäßig Lichtzeichen aussendete und diese Zeichen nicht nur zur Prüfung, sondern auch zur Beeinflussung der andern Uhr dienten, so könnte man trotzdem für den dauernden Synchronismus die allgemeine Zeit nicht entbehren. Eine solche Verbindung von Uhren setzt Brill voraus¹⁾:

„In beiden Systemen seien entlang der Linie, längs deren sie aneinander vorbeigleiten, Uhren verteilt, die in jedem System durch optische oder elektrische Signale (wobei selbstverständlich auch die minimale Zeit für Hin- und Rückweg in Betracht kommt) gleich gerichtet und in gleichem Gang erhalten werden.“

Damit die Zeichen für dauernden Synchronismus sorgen könnten, müßte aber für die erste Uhr ein bestimmter Gang und damit die allgemeine Zeit vorausgesetzt werden, weil ja sonst keine Berechtigung zu der Annahme bestände, daß der Synchronismus nicht nur zufällig einmal, sondern dauernd vorhanden wäre.

2. Die Gleichzeitigkeit an demselben Orte stattfindender Ereignisse. Besondere Verhältnisse liegen vor bei dem Begriff der Gleichzeitigkeit von Ereignissen, die an demselben Orte stattfinden. Da dieser Punkt zwar in der Relativitätslehre eine wichtige Rolle spielt, gleichwohl aber meines Wissens bisher noch nicht genauer behandelt worden ist, so möchte ich auf ihn hier etwas näher eingehen.

Die Relativitätslehre setzt voraus, daß die Gleichzeitigkeit einer gewissen Zeigerstellung einer Uhr und eines am Orte der Uhr stattfindenden Ereignisses feststellbar sei. So sagt Einstein²⁾:

„Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über gleichzeitige Ereignisse sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an“, so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse“ und fügt die Fußanmerkung hinzu:

¹⁾ A. Brill, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1914, S. 11 f.

²⁾ A. Einstein, Zur Elektrodynamik usw., S. 893.

„Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.“

Oder an einer andern Stelle¹⁾:

„Ein Punkt hat die X_4 -Koordinate $x_4 = t$, bedeutet: Eine relativ zum Koordinatensystem ruhend angeordnete, mit dem Punkteignis räumlich (praktisch) zusammenfallende Einheitsuhr, welche nach bestimmten Vorschriften gerichtet ist, hat $x_4 = t$ Perioden zurückgelegt beim Eintreten des Punkteignisses“
mit der Fußanmerkung:

„Die Konstatierbarkeit der „Gleichzeitigkeit“ für räumlich unmittelbar benachbarte Ereignisse oder — präziser gesagt — für das raumzeitlich unmittelbare Benachbartsein (Koinzidenz) nehmen wir an, ohne für diesen fundamentalen Begriff eine Definition zu geben.“

In Hinsicht auf die Feststellbarkeit der Gleichzeitigkeit einer gewissen Zeigerstellung einer Uhr und eines am Orte der Uhr stattfindenden Ereignisses liegt in der Tat insofern ein Sonderfall vor, als es hierbei möglich ist, die Gleichzeitigkeit festzustellen, ohne daß dabei Signale in Frage kommen. Es stoße z. B. ein über das Zifferblatt einer Uhr hingleitender Körper gegen einen Zeiger dieser Uhr. Dann kann man aussagen, daß der Körper den Zeiger dann getroffen habe, als der Zeiger auf einen gewissen Teilstrich des Zifferblattes wies. Dies ist eine strenge Bestimmung der Gleichzeitigkeit des Zusammenfallens des Zeigers mit dem betreffenden Teilstrich einerseits und des Zusammentreffens des Körpers mit dem Zeiger anderseits, ohne daß dabei Signale verwendet werden. Ganz allgemein liegt die Möglichkeit dieser Bestimmung immer dann vor, wenn das betreffende Ereignis in einer Veränderung besteht, die der Zeiger selbst erleidet; also z. B. auch dann, wenn der Zeiger eine Änderung seiner Beleuchtung dadurch erleidet, daß die Uhr von einem Lichtzeichen getroffen wird, ein Fall, der ja in der Relativitätslehre eine besondere Rolle spielt.

Daß der Fall, in dem das betreffende Ereignis am Orte der Uhr stattfindet, in der soeben dargelegten Weise ausgezeichnet ist, hat seinen Grund in folgendem. Zunächst liegt dann, wenn zwei Ereignisse gleichzeitig an demselben Orte stattfinden, eine Besonderheit vor, auf die Langevin hingewiesen hat. Er bemerkt darüber²⁾:

¹⁾ A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49, 774, 1916.

²⁾ Paul Langevin, L'évolution de l'espace et du temps, Scientia 10, 41, 1911.

„Dans les conceptions nouvelles, un seul cas subsiste et doit subsister où le changement du système de référence est sans effet: c'est celui où les deux événements coïncident à la fois dans l'espace et dans le temps; cette double coïncidence doit avoir en effet un sens absolu puisqu'elle correspond à la rencontre des deux événements et que de cette rencontre peut jaillir un phénomène, un événement nouveau, ce qui a nécessairement un sens absolu.“

Langevin erläutert dies dann noch näher durch ein Beispiel. Daß jedoch nicht nur die Beurteilung der Tatsache, daß zwei Ereignisse gleichzeitig an demselben Orte stattfinden, von keinem Bezugssystem abhängig ist, sondern warum dieser Fall auch für die Feststellung und die Begriffsbestimmung der Gleichzeitigkeit eine besondere Rolle spielt, beruht darauf, daß sich in diesem Falle die Feststellung der Gleichzeitigkeit auf die Feststellung beschränkt, daß an zwei Körpern, die einander berühren, an der Berührungsstelle eine Veränderung eintritt (z. B. indem der erwähnte Zeiger, der einen Teilstrich berührt, an der Berührungsstelle von einem fremden Körper oder von einem Lichtzeichen getroffen wird), so daß also, weil in diesem Falle kein Raumunterschied zwischen den beiden Ereignissen vorhanden ist, die ganze Betrachtung auf ein und denselben Punkt beschränkt ist. Für die von Einstein zwar als möglich angenommene, aber nicht angegebene Begriffsbestimmung der Gleichzeitigkeit an demselben Orte stattfindender Ereignisse liegen also in der Tat Handhaben vor, die für die Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten stattfindender Ereignisse nicht gegeben sind.

Der Grund, aus dem in diesem Falle die Feststellung der Gleichzeitigkeit in einer besonderen Form auftritt, zeigt aber andererseits auch, an welche Beschränkung diese Feststellung gebunden ist. Da nämlich die Besonderheit des Falles darin liegt, daß die beiden Ereignisse räumlich nicht voneinander getrennt sind, so liegt sie auch nur dann vor, wenn diese Bedingung streng erfüllt ist. Liegt auch nur der geringste Raum dazwischen, so ist es ja nicht mehr möglich, die oben erörterten Angaben über das Zusammenfallen der beiden Ereignisse zu machen. So ist es z. B. unmöglich, in der auseinander-gesetzten Weise anzugeben, daß ein Körper einen Teilstrich eines Zifferblattes gerade dann berührt habe, als ein Zeiger der betreffenden Uhr auf einen andern Teilstrich wies, so nahe auch die beiden Teilstriche einander sein mögen; denn hier fehlt ja gerade der Anhalt, der es vorher ermöglicht hatte, die Angabe der Gleichzeitigkeit zu machen. Wäre eine solche Angabe hier möglich, so könnte man sie ebenso für zwei beliebig weit voneinander vor sich gehende Ereignisse

machen, da ja die Größe der Entfernung dabei offenbar unwesentlich ist. Die Möglichkeit einer entsprechenden Angabe für zwei beliebig weit voneinander vor sich gehende Ereignisse wird ja aber von der Relativitätslehre ausdrücklich bestritten. Bei dieser Sachlage ist es unzulässig, diese Möglichkeit der Feststellung der Gleichzeitigkeit zu übertragen auf „Ereignisse an (annähernd) demselben Orte“ oder auf „räumlich unmittelbar benachbarte Ereignisse“, weil durch die Aufhebung des strengen Zusammenfallens gerade der Umstand aufgehoben wird, der die Voraussetzung der Feststellbarkeit der Gleichzeitigkeit in diesem Sonderfalle war.

Beiläufig sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß es auch unzulässig wäre, hier von der Entfernung Null auf eine unendlich kleine Entfernung überzugehen; denn dabei würde ein Unterschied dem Wesen nach, nicht etwa nur dem Grade nach, auftreten, weil gerade das strenge Zusammenfallen oben Voraussetzung war. Es wäre ein solcher Übergang hier ebenso unzulässig, wie es z. B. unzulässig wäre, die Sätze, die über den Stoß gelten, also für Körper vom Abstände Null, auf Körper von unendlich kleinem Abstände zu übertragen, oder wie es unzulässig wäre, die Eigenschaft der Lemniskate, im Mittelpunkte zwei Tangenten zu haben, einem dem Mittelpunkte unmittelbar benachbarten Punkte beizulegen.

Noch ist gegen die Gleichstellung eines angenäherten Zusammenfallens mit dem strengen Zusammenfallen folgendes einzuwenden. Die Angabe, daß zwei Ereignisse einander räumlich unmittelbar benachbart stattfinden, will offenbar besagen, daß zwar ein Abstand vorhanden sei, aber so klein sei, daß er keinen wesentlichen Einfluß habe. Ein solches Urteil setzt aber zur Prüfung seiner Berechtigung schon das Vorliegen der Relativitätslehre voraus, darf also nicht der Ableitung der Relativitätslehre zugrunde gelegt werden. Ferner: wäre es zulässig, auf ein räumlich unmittelbar benachbartes Ereignis überzugehen, so wäre es auch möglich, sich (sozusagen mit unendlich kleinen Schritten) in beliebig große Entfernungen zu begeben, so daß schließlich mit dem zuerst betrachteten Ereignis ein beliebig weit entferntes in Hinsicht auf die Zeit verglichen werden könnte, ohne daß es dazu irgendwelcher Signale bedürfte.

3. Der Begriff der Uhr. Über die Bedeutung der Uhr für die Relativitätslehre bemerkt Einstein¹⁾:

„Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die

¹⁾ A. Einstein, Zur Elektrodynamik usw., S. 892.

Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen.“

Zu dieser Auffassung ist zu bemerken, daß in den früheren Theorien nicht die Angaben von Uhren aufgetreten sind, sondern die Zeit selbst. Sogar bei den Versuchen, aus denen die Theorien abgeleitet worden sind, ist als das wesentliche nicht das von den Uhren unmittelbar angezeigte angesehen worden. Duhem bemerkt über die Rolle, die beim wissenschaftlichen Versuch die Instrumente spielen, folgendes¹⁾:

„*Donc, lorsqu'un physicien fait une expérience, deux représentations bien distinctes de l'instrument sur lequel il opère occupent simultanément son esprit; l'une est l'image de l'instrument concret qu'il manipule en réalité; l'autre est un type schématique du même instrument, construit au moyen de symboles fournis par les théories; et c'est sur cet instrument idéal et symbolique qu'il raisonne, c'est à lui qu'il applique les lois et les formules de la Physique.*“

Schon die grundsätzliche Auffassung Einsteins über die Stellung der Uhr gibt also sicherlich zu Bedenken Veranlassung.

Über das, was unter einer Uhr zu verstehen sei, bemerkt Einstein²⁾:

„Die Zeit pflegen wir mit einer Uhr zu messen. Eine Uhr nennen wir dabei ein System, welches genau denselben Vorgang automatisch wiederholt.“

Diese Begriffsbestimmung umfaßt zunächst beabsichtigtermaßen mehr, als man gemeinhin unter dem Begriff der Uhr versteht, da ja Einstein z. B. den einer Spektrallinie entsprechenden Schwingungsvorgang als Grundlage einer Uhr gelten lassen will. Unter diese Begriffsbestimmung fällt jedoch z. B. auch eine Pendeluhr, deren Pendel man samt der Hemmung entfernt hat und die infolgedessen ungehemmt abläuft; denn auch dann würde ein gewisser Vorgang, z. B. der Umlauf des Sekundenzeigers, automatisch wiederholt werden, da ja der Einfluß, den die weggenommenen Teile früher ausübten, nicht die automatische Wiederholung des Vorgangs schlechthin, also seine Wiederholung in Hinsicht auf das rein Räumliche, betraf, sondern nur bewirken sollte, daß dieser Vorgang jedesmal denselben Zeitraum brauchte. Auch kann nach dieser Begriffsbestimmung

¹⁾ P. Duhem, *La Théorie physique. Son objet et sa structure*. Bibliothèque de philosophie expérimentale II, Paris 1906, S. 252. (Übersetzung von Friedrich Adler, Leipzig 1908, S. 204 f.)

²⁾ Albert Einstein, *Die Relativitätstheorie*. Kultur d. Gegenwart, III. Teil, III. Abt., 1. Bd., Leipzig und Berlin 1915, S. 708.

z. B. der Herzschlag eines lebenden Wesens den betreffenden Vorgang bilden, ja es dürfte kaum eine immer wiederkehrende Aufeinanderfolge von Zuständen geben, die man nicht, auf dieser Begriffsbestimmung fußend, heranziehen könnte.

Die Unzulänglichkeit dieser Begriffsbestimmung liegt jedoch in folgendem. Jeder solche sich wiederholende Vorgang ist nicht nur abhängig von denjenigen Einflüssen, die sich bei der Betrachtung in den Vordergrund drängen und gewöhnlich zunächst nur in Betracht gezogen werden, sondern außerdem noch von Einflüssen, die zwar dem Grade nach gering sein mögen, trotzdem aber nicht außer acht gelassen werden dürfen, wenn es sich um eine Begriffsbestimmung handelt. Foerster bemerkt darüber¹⁾:

„Ganz besonders wichtig sind in dieser Beziehung [für die Zeitmessung] alle in sich wiederkehrenden Bewegungsformen, wenngleich sie streng genommen auch nie unter denselben Bedingungen wiederkehren, also alle Schwingungen und Umdrehungen von Körpern.“

Wie weit dabei, streng genommen, die Nebeneinflüsse reichen, hat Henri Poincaré hervorgehoben²⁾:

„Dans la réalité physique, une cause ne produit pas un effet, mais une multitude de causes distinctes contribuent à la produire, sans qu'on ait aucun moyen de discerner la part de chacune d'elles.

Les physiciens cherchent à faire cette distinction; mais ils ne la font qu'à peu près, et quelques progrès qu'ils fassent, ils ne la feront jamais qu'à peu près. Il est à peu près vrai que le mouvement du pendule est dû uniquement à l'attraction de la Terre; mais en toute rigueur, il n'est pas jusqu'à l'attraction de Sirius qui n'agisse sur le pendule.

Dans ces conditions, il est clair que les causes qui ont un jour produit un certain effet ne se reproduisent jamais qu'à peu près.“

Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß bei dem von Poincaré behandelten Falle die Anziehung durch ferne Massen nur ein Beispiel ist; tatsächlich hängen die Pendelschwingungen noch unter anderem vom Druck und der Temperatur der Luft ab, also von Einflüssen, die ihrerseits wieder von den verschiedensten Umständen abhängen.

Aus diesem Zusammenhange zwischen jeder Uhr und der gesamten übrigen Welt ergibt sich, daß es überhaupt unmöglich ist,

¹⁾ Foerster, Ueber Zeitmaße und ihre Verwaltung durch die Astronomie, Virchow-Holtzendorffsche Sammlung, Heft 5, Berlin 1866, S. 13.

²⁾ H. Poincaré, La mesure du temps, Revue de Métaphysique et de Moral 6, 4 f., 1898. (Übersetzung von E. Weber: Der Wert der Wissenschaft, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, S. 31.)

sofern man so streng verfahren will, wie man es bei einer Begriffsbestimmung tun muß, eine Uhr von dem übrigen Weltall abzusondern. Es kann eine solche Absonderung zwar bei der Anwendung der Physik zulässig sein, indem man dabei Einflüsse unberücksichtigt läßt, die streng genommen vorhanden, aber für den gerade vorliegenden Fall ohne Belang sind, sie ist aber unzulässig, wenn es sich um die Grundlegung der Physik handelt, wo noch ganz ungeklärt ist, was belangvoll ist und was nicht.

Der Umstand, daß eine Uhr weiter reicht, als es nach der Auffassung des täglichen Lebens der Fall ist, ist übrigens gelegentlich auch von Einstein in Betracht gezogen worden. Zu der das sogenannte Uhrenparadoxon betreffenden Stelle der ersten Einsteinschen Abhandlung über die Relativitätslehre¹⁾:

„Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhuhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfenen, an einem Erdpole befindliche Uhr“
findet sich nämlich beim Abdruck in dem bekannten Sammelbände²⁾ die Fußanmerkung:

„Im Gegensatz zu „Pendeluhr“, welche — physikalisch betrachtet — ein System ist, zu welchem der Erdkörper gehört; dies mußte ausgeschlossen werden.“

Durch die ausdrückliche Einführung der Unruhuhr wird aber dem von Einstein aufgeworfenen Bedenken nicht Rechnung getragen. Denn ebenso wie beim Gehen einer Pendeluhr das Pendel einerseits und die übrige Uhr samt dem Erdkörper andererseits gegeneinander schwingen, ebenso schwingen die Unruh einerseits und die übrige Uhr samt dem Erdkörper andererseits gegeneinander; auch zur Unruhuhr gehört also der Erdkörper, und die Unterscheidung zwischen der Pendeluhr und der Unruhuhr ist daher hier zwecklos.

Die Unmöglichkeit, die einzelnen Uhren von dem übrigen Weltall abzusondern, hat übrigens zur Folge, daß von vornherein ein innerer Widerspruch vorliegt, wenn man den Ort einer Uhr in die grundlegenden Betrachtungen einführt; denn die Festsetzung des Ortes einer Uhr würde immer voraussetzen, daß man die Uhr als einen Punkt auffassen könnte, was eben wegen des untrennbaren Zusammenhanges der Uhren mit dem übrigen Weltall eine unzuverlässige Voraussetzung ist. Solche Bedenken sind offenbar Lorentz gegenwärtig

¹⁾ Einstein, Zur Elektrodynamik usw., S. 905.

²⁾ H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig und Berlin 1913, S. 38.

gewesen; er bemerkt gelegentlich über den Zeiger einer bei ihm auftretenden Uhr¹⁾:

„der Zeiger wird so klein gedacht, daß wir für all seine Punkte x , y und $z = 0$ setzen können.“

Dieses Hilfsmittel ist aber unzulänglich, da auch eine beliebig weit getriebene Verkleinerung des Zeigers den erwähnten Zusammenhang nicht aufheben kann, auf die Größe des Zeigers also gar nichts ankommt.

Abgesehen von diesen allgemeinen Bedenken gegen einen von der Uhr ausgehenden Aufbau der Physik bestehen gegen gewisse besondere, nunmehr zu behandelnde Versuche, die Uhr einzuführen, noch besondere Bedenken.

Laue gibt für die Uhr die Begriffsbestimmung²⁾:

„Wir messen die Zeit an einem Orte mit Uhren, brauchen aber dabei nicht an die gebräuchlichen mechanischen Instrumente zu denken, bei welchen die Periode elastischer Schwingungen als Zeitmaß dient, sondern wir können die Zeit an dem Fortschreiten jedes physikalischen Vorganges ablesen, wenn wir nur seine Ursachen so genau beherrschen, daß keine unbekannte oder quantitativ unkontrollierbare Ursache mitwirken kann.“

Gegen diese Begriffsbestimmung ist einzuwenden, daß, worauf Weyl hingewiesen hat³⁾,

„das Verhalten der Maßstäbe und Uhren vor Aufstellung der physikalischen Gesetze einigermaßen problematisch bleibt.“

Daß dieses Bedenken Uhren gegenüber (und überhaupt jedem physikalischen Vorgang gegenüber) gerechtfertigt ist, liegt auf der Hand; die Berechtigung dieses Bedenkens bewegten Maßstäben gegenüber leuchtet ebenfalls ein, besonders wenn man berücksichtigt, daß Maßstäbe schon den Begriff des starren Körpers voraussetzen, einen Begriff, dessen Rolle in der Relativitätslehre keineswegs von vornherein klar übersichtbar ist⁴⁾. Ich halte es nicht für gerechtfertigt, daß Einstein trotz seinen eigenen Bedenken gegen den starren Körper Maßstäbe folgendermaßen als starre Körper eingeführt hat⁵⁾:

¹⁾ H. A. Lorentz, Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen, gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Bearbeitet von W. H. Keesom, Leipzig u. Berlin 1914, S. 11.

²⁾ M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Braunschweig 1911, S. 35; 2. Aufl., 1913, S. 36.

³⁾ Hermann Weyl, Raum—Zeit—Materie, Berlin 1918, S. 139.

⁴⁾ Vgl. hierzu A. Einstein, Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie, Ann. d. Phys. **23**, 380—382, 1907.

⁵⁾ A. Einstein, Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes, ebenda **38**, 356, 1912.

„Der Maßstab sowie die Koordinatenachsen sind als starre Körper aufzufassen. Dies ist erlaubt, trotzdem der starre Körper nach der Relativitätstheorie keine reale Existenz besitzen kann. Denn man kann den starren Meßkörper durch eine große Anzahl kleiner nicht starrer Körper ersetzt denken, die so aneinander gereiht werden, daß sie keine Druckkräfte aufeinander ausüben, indem jeder besonders gehalten wird.“

Diese Ausbildung des Meßkörpers läßt den starren Körper nur etwas in den Hintergrund treten, ohne ihn aber entbehrlich zu machen; denn um die kleinen Körper in der gewünschten gegenseitigen Lage zu erhalten, bedarf es ja eines starren Körpers.

Angesichts der durchaus berechtigten Weylschen Bedenken ist die Lauesche Begriffsbestimmung der Uhr also ungeeignet, an die Spitze der Relativitätslehre zu treten.

Weyl selbst gibt folgende Begriffsbestimmung¹⁾:

„Kehrt ein vollständig isoliertes (keine Einwirkung von außen erfahrendes) physikalisches System einmal zu genau demselben Zustand zurück, in dem es sich bereits in einem früheren Moment befand, so wiederholt sich von da ab die gleiche zeitliche Zustandsfolge, und der Vorgang ist ein zyklischer. Ein solches System nennen wir allgemein eine Uhr.“

Hiergegen ist einzuwenden, daß aus der Übereinstimmung zweier aufeinander folgender Zustände nur dann auf ihre fortgesetzte Wiederkehr geschlossen werden kann, wenn der zweite Zustand dem ersten nicht nur räumlich, sondern auch in jeder anderen Hinsicht geglichen hat. Sonst wäre z. B. zu folgern, daß ein Körper, der in einem mit Luft gefüllten Behälter zunächst an dessen obere Wandung anprallt, dann dort zurückgeworfen wird und schließlich nach Abprallen von der unteren Wandung zur oberen Wandung zurückkehrt, dieses Spiel unbegrenzt lange fortsetzen müßte, während er doch tatsächlich schon infolge der Reibung an der Luft schließlich die obere Wandung nicht mehr erreichen würde. Es müssen eben die beiden Zustände einander z. B. auch in Hinsicht auf die Geschwindigkeiten gleichen, wenn man aus der einmaligen Wiederholung des ersten Zustandes auf seine unbegrenzte Wiederholung soll schließen können. Da aber die Feststellung einer Geschwindigkeit ihrerseits schon die Meßbarkeit der Zeit und damit den Begriff der Uhr voraussetzt, so ist diese Weylsche Begriffsbestimmung ebenfalls als Ausgangspunkt unzulässig.

Weyl hat wegen der von ihm erkannten Bedenken gegen die Möglichkeit, die Uhr bei der Aufstellung der physikalischen Gesetze

¹⁾ Raum—Zeit—Materie, S. 7.

schon vorauszusetzen, noch einen anderen Weg vorgeschlagen. Die betreffende, oben schon zum Teil angeführte Stelle lautet¹⁾:

„Da das Verhalten der Maßstäbe und Uhren vor Aufstellung der physikalischen Gesetze einigermaßen problematisch bleibt, ist theoretisch die Bemerkung von Interesse, daß wir zur Festlegung der Raum-Zeit-Koordinaten in einem zulässigen Bezugssystem prinzipiell mit viel einfacheren Meßinstrumenten ausreichen, die wir von vornherein beherrschen: nämlich mit Lichtsignalen und kräftefrei sich bewogenden Massenpunkten, selbst wenn uns für die letzteren nur ein enger Geschwindigkeitsbereich zur Verfügung steht.“

Über die Möglichkeit einer Zeitmessung nur durch kräftefrei sich bewogende Massenpunkte ist folgendes zu bemerken. Faßt man zwei Massenpunkte ins Auge, von denen der eine dort in einem System ruht, wo in diesem System die Zeit gemessen werden soll, und der andere sich in diesem System kräftefrei in einer Bahn bewegt, die durch den ruhenden Massenpunkt hindurchgeht, so liegt keine Berechtigung zu der Annahme einer geschlossenen Bahn des bewegten Punktes vor, und es ist daher nicht möglich, ein Abzählen der Zusammenkünfte der beiden Massenpunkte zur Zeitmessung dienen zu lassen. Wollte man statt eines einzigen bewegten Punktes eine Schar von Punkten anwenden und die Zeit durch Abzählen der durch den Ort des ruhenden Punktes hindurchwandernden Punkte messen, so würde dies daran scheitern, daß man (bei der Unzulässigkeit, eine starre Verbindung der bewegten Punkte vorauszusetzen) keine Regelung für die Art der Aufeinanderfolge der bewegten Punkte treffen könnte, ohne dabei schon Zeitabstände oder Geschwindigkeiten zu benutzen, eine völlig regellose Aufeinanderfolge aber offenbar unbrauchbar wäre. Andererseits auf das Abzählen von Durchgängen verzichten und der Zeitmessung Messungen des veränderlichen Abstandes des bewegten Punktes oder Messungen des von diesem durchlaufenen Winkelbereichs zugrunde legen zu wollen, könnte nicht zum Ziele führen, weil man dazu Bestimmungen der Lage des bewegten Punktes vornehmen müßte, aus denen doch für die Zeitmessung am Orte des ruhenden Punktes vor der Aufstellung der Relativitätslehre kein Stoff entnommen werden könnte:

Eine nur mit Hilfe von Lichtzeichen arbeitende Uhr im Weylschen Sinne könnte wohl nur in der von Einstein folgendermaßen angegebenen Vorrichtung bestehen²⁾:

¹⁾ Raum—Zeit—Materie, S. 139 f.

²⁾ Einstein, Lichtgeschwindigkeit und Statik usw., S. 366.

„Als Uhr können wir uns dabei etwa zweier Spiegel von der Distanz 1 cm bedienen, indem wir die Zahl der Hin- und Hergänge eines Lichtsignals zählen.“

Die Zeitangaben dieser Uhr, die Budde die Einsteinsche Lichtuhr genannt hat¹⁾, wären jedoch abhängig von dem gegenseitigen Abstände der beiden Spiegel, mithin würde diese Uhr den starren Körper oder die Gesetze über das Verhalten nichtstarrer Körper voraussetzen, also als Grundlage für die Relativitätslehre ungeeignet sein.

Weder mit kräftefrei sich bewegenden Massenpunkten allein noch mit Lichtzeichen allein läßt sich also eine Uhr herstellen, die das leistete, was sie nach Weyls Ansicht soll leisten können. Wie etwa eine Uhr, bei der solche Massenpunkte und Lichtzeichen zusammen verwendet würden, das Verlangte sollte leisten können, ist nicht ersichtlich. Denn es ist nicht abzusehen, wie eine der oben behandelten Uhren, bei denen nur kräftefrei sich bewegende Massenpunkte verwendet wurden, durch die Anwendung von Lichtzeichen zu einer brauchbaren Uhr ergänzt werden könnte, und entsprechendes gilt für die Ergänzung der Lichtuhr durch solche Massenpunkte.

Ich kann daher die Weylsche Auffassung nicht teilen, daß man die erforderlichen Sätze über die Uhren zunächst mit den soeben behandelten Hilfsmitteln ableiten und dadurch den Bedenken entgegen könne, die sich der Benutzung der übrigen Uhren als Grundlage der Physik entgegenstellen.

Beiläufig sei noch die gelegentlich von Einstein eingeführte²⁾ „Gravitationsuhr“ behandelt,

„bestehend aus einer Masse m , die um eine festgehaltene Masse m' bei konstantem Abstand R unter alleiniger Wirkung der Gravitationskraft von m' umläuft.“

Als zur Grundlegung der Relativitätslehre geeignet ist diese Uhr von Einstein nicht bezeichnet worden, sondern es ist von ihm nur ihr Verhalten bei Zugrundelegung der Relativitätslehre untersucht worden. Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, daß hier, abgesehen von den oben entwickelten Bedenken gegen die Heraushebung einer Uhr aus dem übrigen Weltall, noch das Bedenken obwaltet, daß vor der Aufstellung der Relativitätslehre noch gar keine Berechtigung vorliegt, auch nur anzunehmen, daß sich für die bewegte Masse überhaupt eine geschlossene Bahn ergibt. Es gelten daher auch hier

¹⁾ E. Budde, Kritisches zum Relativitätsprinzip. Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16, 591, 1914.

²⁾ Einstein, Lichtgeschwindigkeit und Statik usw., S. 367.

die Bedenken, die oben gegen die Uhr aus kräftefrei sich bewegenden Massenpunkten geltend gemacht worden sind.

Ganz allgemein sei zu den Versuchen, die Zeit an die Uhren anzuknüpfen, darauf aufmerksam gemacht, daß man der Zeit eine eigentümliche Beschaffenheit verleiht, wenn man sie (auch dem Begriffe nach) erst dadurch als gegeben ansieht, daß die Wiederholungen eines gewissen Vorganges beachtet werden. Die klassische Mechanik geht ja umgekehrt vor; sie legt die ununterbrochen ablaufende Zeit zugrunde, und erst bei der Messung dieser Zeit spielen sich wiederholende Vorgänge eine Rolle. Geht man dagegen von diesen Vorgängen aus, um den Begriff der Zeit festzulegen, so verfließt die so bestimmte Zeit nicht mehr ununterbrochen, sondern ihrem Wesen nach sprungweise. Man kann freilich bei der Anwendung dieser Art von Zeit die Sprünge durch Wahl geeigneter Vorgänge immer kleiner machen, kommt aber infolge der Grundanschauung, daß die Zeit (auch ihrem Begriff nach) nur durch die Wiederholung des betreffenden Vorganges gegeben sei, niemals auf eine ununterbrochen verfließende Zeit, da man den Grenzwert Null der Sprünge nie als erreicht ansehen darf, ohne die Grundlage des Ganzen aufzuheben. Es sei noch angemerkt, daß der Einführung des Grenzwertes Null noch das Bedenken entgegensteht, daß der Begriff der Null überhaupt hier unstatthaft ist. Denn als gegeben ist für die Zeit hier nur die Tatsache angesehen, daß sich ein Vorgang wiederholt. Zwischen zwei Vorgängen liegt dabei nichts, was einer Betrachtung zugänglich wäre, da ja erst die Vollendung der Wiederkehr des Vorganges das sein soll, wodurch die Zeit geschaffen wird. Es besteht infolgedessen zwar die Möglichkeit, einen solchermaßen bestimmten Zeitraum durch einen kleineren zu messen, damit läßt sich aber (auch in Gedanken) der Wert Null nicht erreichen, da ja dadurch der zu messende Zeitraum zwar auf einen kleineren zurückgeführt wäre, beim Übergang auf den Grenzwert Null aber die Annahme untergeschoben werden würde, als sei es denkbar, daß sich zwar ein Vorgang wiederhole, die Wiederholungen aber nicht voneinander getrennt seien, eine Annahme, die offenbar in sich selbst widerspruchsvoll wäre. Vergleiche mit verwandten geometrischen Betrachtungen würden an sich schon nicht beweiskräftig sein, weil erst nachgewiesen werden müßte, daß das, was für den Raum gilt, auch für die Zeit gelte; davon abgesehen aber ist leicht zu erkennen, daß in der Geometrie in der Tat nichts im Wege steht, beispielsweise zwei Punkte in einen zusammenfallen zu lassen, solange man nicht annehmen will, daß der Raum (auch dem Begriff nach) erst durch voneinander getrennte Punkte gegeben sei.

Ich habe es für angezeigt gehalten, auf diese Eigenschaft der Zeit, sprungweise fortzuschreiten, wenn man sie erst aus den Wiederholungen eines Vorganges ableitet, hinzuweisen, weil diese Eigenschaft Beachtung verdienen dürfte, wenn man diese Zeit mathematisch behandeln will.

Haas will bei der Behandlung der Relativitätslehre die Uhren ganz vermeiden¹⁾. Er führt infolgedessen im allgemeinen von vornherein verschiedene Zeiten ein, die je einem System eigen sein sollen, ohne daß ihr Ablaufen an Veränderungen von Uhranzeigen geknüpft wird. Dieses Verfahren entspricht dem der klassischen Mechanik, die ja auch die Zeit als ursprüngliche Veränderliche einführt und die physikalischen Vorgänge an den Ablauf der Zeit knüpft, also die Uhren auf die Zeit gründet und nicht umgekehrt. Die Berechtigung der klassischen Mechanik hierzu kann hier unerörtert bleiben; für die Relativitätslehre ist jedoch diese Art der Einführung unzulässig (wobei ganz außer Betracht gelassen werden kann, ob Haas wirklich seine Absicht stets folgerichtig durchführt). Denn wenn die Relativitätslehre ihre verschieden ablaufenden Zeiten nicht auf das Ablaufen der physikalischen Vorgänge gründet, also keine Uhren zugrunde legt, so schreibt sie diesen Zeiten Unabhängigkeit von den physikalischen Vorgängen zu. Damit verlieren aber diese Zeiten eine Eigenschaft, die sie gerade nach der Relativitätslehre haben sollen, nämlich die Eigenschaft, daß jede dieser Zeiten nur für ein bestimmtes System gilt. Denn ohne eine schon von vornherein als gegeben angenommene Verknüpfung mit physikalischen Vorgängen eines bestimmten Systems läuft ja jede dieser Zeiten sozusagen mit allen andern durcheinander, und es fehlt jede Möglichkeit, nachträglich die verschiedenen Zeiten den verschiedenen Systemen zuzuordnen.

Will die Relativitätslehre verschiedene Zeiten einführen, so ist der Haassche Weg also ungangbar, und es bliebe in der Tat nichts Anderes übrig, als (wie es von der Relativitätslehre gewöhnlich geschieht) den Versuch zu machen, mit den Uhren anzufangen und die Zeiten an die Uhren zu knüpfen, ein Vorgehen, das jedoch, dem oben dargelegten zufolge, ebenfalls auf unzulässigen Grundlagen beruht.

Zu der Reichenbachschen Axiomatik²⁾ Stellung zu nehmen, ist bei der Knappheit ihrer Darlegung kaum möglich. Immerhin läßt sich jedoch folgendes bemerken. In den sogenannten Lichtaxiomen

¹⁾ Arthur Haas, Einführung in die theoretische Physik usw., 2. Bd., 1. u. 2. Aufl., Berlin und Leipzig, 1921, S. IV.

²⁾ Hans Reichenbach, Bericht über eine Axiomatik der Einsteinschen Raum-Zeit-Lehre. Phys. ZS. 22, 683—687, 1921.

ist der Begriff der Uhr als „Hilfsbegriff“ eingeführt, von dem jedoch ausdrücklich bemerkt ist¹⁾, daß er

„gar nichts über materielle Uhren aussagt“.

Ist dies der Fall, so scheint mir das, was Reichenbach unter den Angaben dieser Uhren versteht, dasselbe zu sein wie das, was Haas unter seinen verschiedenen Zeiten versteht, und es würde infolgedessen dasselbe geltend zu machen sein wie gegen das Haassche Verfahren. Andererseits treten in den Axiomen III und V Angaben darüber auf, daß die Möglichkeit bestehe, einen Uhrablauf auszuwählen, der gewissen Bedingungen genügt. Über die Axiome war aber bemerkt worden²⁾:

„Die Axiome enthalten dann diejenigen fundamentalen Tatsachen, deren Bestehen der Theorie Existenzberechtigung verleiht; sie sind prinzipiell empirische Behauptungen, die also durch das Experiment nachgeprüft werden können.“

Nun ist es aber von vornherein unmöglich, das unmittelbare Ergebnis von Versuchen zur Grundlage der Physik zu machen, sondern es gehört gerade schon die Physik dazu, um das unmittelbare Ergebnis von dem Einfluß der Störungen zu befreien³⁾. Was insbesondere das Verhalten von Uhren betrifft, so ist es ja gerade eine beständige Erfahrung, daß keine Angabe einer Uhr brauchbar ist, solange nicht auf Grund von Theorien aus den unmittelbaren Angaben diejenigen entwickelt worden sind, die die Uhr geliefert hätte, wenn nicht gewisse ungewollte Einflüsse auf sie gewirkt hätten. Jeder Versuch zeigt also gerade, daß es unmöglich ist, irgend ein Verhalten von Uhren herbeizuführen, das irgendwelchen Anforderungen streng genügt. Der Inhalt der betreffenden Axiome könnte also aus den Versuchen erst mit Hilfe der Theorie gewonnen werden, daher nicht selbst als Grundlage der Theorie dienen, wofür ja auch der Umstand spricht, daß die Versuche sicherlich auf materiellen Uhren beruhen, während diese Axiome gerade keine materiellen Uhren betreffen sollen.

Die Reichenbachschen Darlegungen scheinen mir daher verschiedenen Bedenken offen zu stehen.

4. Die Auswahl der Uhren. Abgesehen von den Bedenken, die oben gegen die Möglichkeit einer Begriffsbestimmung der Uhr entwickelt worden sind, ist noch darauf hinzuweisen, daß keineswegs alle unter die oben behandelten Begriffsbestimmungen fallenden Uhren für die Relativitätslehre als Uhren brauchbar sind.

¹⁾ Hans Reichenbach, Bericht über eine Axiomatik der Einsteinschen Raum-Zeit-Lehre. Phys. ZS. 22, 684, 1921, vor der Definition 2.

²⁾ Ebenda S. 683.

³⁾ Vgl. Anm. 1, S. 273.

Man denke sich beispielshalber an einer Uhr (Uhr dabei im alltäglichen Sinne verstanden) außer dem Zeiger, der an dem Zifferblatt die Umläufe des den Sekundenzeiger tragenden Rades anzeigt (also außer dem Minutenzeiger) noch einen zweiten Zeiger, der an einem zweiten Zifferblatt die Umläufe eines zweiten Rades anzeigt, das mit dem ersten Rade gekuppelt ist. Welchen von den beiden Zeigern man als die Zeit (im Sinne der Relativitätslehre) anzeigend ansehen will, ist zunächst beliebig; der Vorgang, dessen Wiederholungen gezählt werden, ist im einen wie im andern Falle der Umlauf eines Rades. Es verkörpert also jede solche Uhr zwei Teiluhren, von denen jede so gut eine Uhr ist wie die andere. Es sei als die erste Teiluhr die bezeichnet, zu der der Minutenzeiger gehört, und als die zweite Teiluhr die andere; die Anzeige der ersten Teiluhr sei mit t_1 und die der zweiten mit t_2 bezeichnet. Die Kupplung der beiden Räder soll so beschaffen sein (was sich z. B. durch ein Kurvengetriebe leicht erreichen läßt), daß zwischen t_1 und t_2 die Gleichung besteht

$$t_2 = t_0 + t_1^n.$$

Dabei ist t_0 der Wert, der von der zweiten Teiluhr dann angezeigt wird, wenn von der ersten Teiluhr der Wert Null angezeigt wird, es ist also der allgemeine Fall vorausgesetzt, daß nicht beide Teiluhren zusammen Null anzeigen; n ist eine beliebige Zahl.

Es seien zwei solche Uhren (jede bestehend aus zwei Teiluhren) angenommen, die erste in einem Punkte A und die zweite in einem Punkte B . Ein Lichtzeichen werde in der bekannten Weise zwischen den Uhren hin und her geschickt. Das Zeichen gehe von A bei der Anzeige t_{1a} der ersten Teiluhr der in A befindlichen Uhr ab, werde in B bei der Anzeige t_{1b} der ersten Teiluhr der in B befindlichen Uhr zurückgeworfen und kehre nach A bei der Anzeige t'_{1a} der ersten Teiluhr der in A befindlichen Uhr zurück. Sollen die ersten beiden Teiluhren synchron gehen, so muß die erste Teiluhr der in B befindlichen Uhr so eingestellt sein, daß

$$t_{1b} = \frac{t_{1a} + t'_{1a}}{2}.$$

Bezeichnen t_{2a} , t_{2b} und t'_{2a} die Werte, die gemäß dem vorausgesetzten Zusammenhange der beiden zu einer Uhr gehörenden Teiluhren an den zweiten Teiluhren angezeigt werden, wenn die ersten Teiluhren die soeben angegebenen Werte anzeigen, so ist

$$\begin{aligned} t_{2a} &= t_{0a} + t_{1a}^n \\ t'_{2a} &= t_{0a} + t_{1a}'^n \end{aligned}$$

Damit auch die zweiten Teiluhren miteinander synchron gehen, muß die zweite Teiluhr der in B befindlichen Uhr so eingestellt sein, daß

$$t_{2b} = t_{2a} + \frac{t'_{2a}}{2} = t_{0a} + \frac{t_{1a}^n}{2} + \frac{t'_{1a}}{2},$$

wobei $t_{2b} = t_{0b} + t_{1b}^n$. Damit sind die zweiten Teiluhren so eingestellt, daß für dieses soeben behandelte Hin- und Hergehen des Lichtzeichens die Synchronismusbedingung bei den ersten und den zweiten Teiluhren erfüllt ist.

Es sei beim Abgehen eines zweiten Lichtzeichens t_{1a} übergegangen in $t_{1a} + T$; dann ist t'_{1a} übergegangen in $t'_{1a} + T$ und, wenn Synchronismus der ersten Teiluhren auch jetzt vorliegen soll, t_{1b} in $t_{1b} + T$. Dem vorausgesetzten Zusammenhange gemäß ist die zu der Anzeige $t_{1a} + T$ der ersten Teiluhr der in A befindlichen Uhr gehörende Anzeige der zweiten Teiluhr $t_{0a} + (t_{1a} + T)^n$, die zu $t'_{1a} + T$ gehörende Anzeige $t_{0a} + (t'_{1a} + T)^n$ und die zu $t_{1b} + T$ gehörende Anzeige $t_{0b} + (t_{1b} + T)^n$. Drückt man t_{0b} und t_{1b} mit Hilfe der oben abgeleiteten Gleichungen durch t_{0a} , t_{1a} und t'_{1a} aus, so erhält man schließlich nach einigen Umformungen

$$t_{0b} + (t_{1b} + T)^n = t_{0a} + \frac{t_{1a}^n + t_{1a}'^n}{2} - \left(\frac{t_{1a} + t'_{1a}}{2} \right)^n + \left(\frac{t_{1a} + t'_{1a}}{2} + T \right)^n.$$

Sollte jetzt auch Synchronismus der zweiten Teiluhren vorliegen, so müßte, da die Anzeigen der zweiten Teiluhr der in A befindlichen Uhr $t_{0a} + (t_{1a} + T)^n$ und $t_{0a} + (t'_{1a} + T)^n$ sind, die Gleichung bestehen

$$t_{0b} + (t_{1b} + T)^n = \frac{[t_{0a} + (t_{1a} + T)^n] + [t_{0a} + (t'_{1a} + T)^n]}{2},$$

es müßte also sein

$$\begin{aligned} t_{0a} + \frac{t_{1a}^n + t_{1a}'^n}{2} - \left(\frac{t_{1a} + t'_{1a}}{2} \right)^n + \left(\frac{t_{1a} + t'_{1a}}{2} + T \right)^n \\ = \frac{[t_{0a} + (t_{1a} + T)^n] + [t_{0a} + (t'_{1a} + T)^n]}{2} \end{aligned}$$

Wie leicht zu zeigen, ist dies jedoch für

$$n > 1$$

nur der Fall für

$$n = 2.$$

Nur wenn in jeder der Uhren die Anzeigen der einen Teiluhr quadratisch mit denen der anderen Teiluhr zunehmen, ist es also bei dem vorausgesetzten Zusammenhange möglich, daß die Synchronismusbedingung bei den ersten und den zweiten Teiluhren dauernd erfüllt ist. Übrigens zeigt auch dies, daß der Begriff des dauernden Synchronismus nicht ohne weiteres zugrunde gelegt werden darf, da eben die Tatsache, daß ein Uhrenpaar einmal dieser Bedingung genügt hat, noch nicht zu der Annahme berechtigt, daß es dies dauernd tun wird.

Gleichwohl liegt ein Unterschied zwischen den verschiedenen Arten von Uhren vor, der eine bestimmte Art herauszuheben erlaubt. Dieser Unterschied besteht darin, daß die Lichtgeschwindigkeit von den oben behandelten beiden Arten von Teiluhren in verschiedener Weise gewertet wird. Ergibt sie sich nämlich z. B. bei Zugrundelegung der ersten Teiluhren als von der Länge des durchlaufenen Weges unabhängig, so ergibt sie sich bei Zugrundelegung der zweiten Teiluhren für $n > 1$ als mit wachsendem Wege immer kleiner werdend (weil ja die Zeitangaben der zweiten Teiluhren dann rascher wachsen als die ersten, also der für die Einheit des Weges verbrauchte Zeitraum bei Zugrundelegung der zweiten Teiluhren immer größer wird). Wegen der Unstatthaftigkeit einer Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Weglänge hätte man daher nur diejenigen Arten von Uhren als in Betracht kommend anzusehen, bei deren Zugrundelegung sich eine von der Weglänge unabhängige Lichtgeschwindigkeit ergibt. Dieser einschränkende Zusatz gehörte daher noch zu den Begriffsbestimmungen der Uhr hinzu, um aus den verschiedenen Arten der sich wiederholenden Vorgänge die unbrauchbaren auszuschneiden.

Welche Arten von Uhren dieser einschränkenden Bedingung genügen, könnte nur durch Versuche entschieden werden. Wären die bisher bei der zahlenmäßigen Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit benutzten Uhren ungeeignet als Uhren im Sinne der Relativitätslehre gewesen, so könnte ein Vergleich der erhaltenen Werte einen Schluß zu ziehen erlauben, inwiefern die durch diese Uhren festgelegte Zeit von der nach der Relativitätslehre zugrunde zu legenden Zeit abgewichen wäre. Die bisher vorliegenden Bestimmungen dürften kaum für einen Schluß in dieser Richtung genügen. Immerhin verdient es, hervorgehoben zu werden, daß der einer Spektrallinie entsprechende Schwingungsvorgang nicht ohne weiteres als geeignete Grundlage einer Uhr für die Relativitätslehre angesehen werden darf, sondern daß es vorerst einer Untersuchung bedürfte, ob nicht die bisherigen Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit dem entgegenstehen; im Hinblick auf die Wichtigkeit, die einer etwaigen Linienverschiebung des Sonnenspektrums von den Anhängern der Relativitätslehre beigemessen wird, wäre es gut, wenn wenigstens Klarheit darüber bestände, ob überhaupt gerade hier Uhren im Sinne der Relativitätslehre vorliegen.

5. Zusammenfassung. Aus den Untersuchungen des ersten Abschnitts ergibt sich über die Stellung der allgemeinen Zeit folgendes. Abgesehen davon, daß der Begriff des Gehens einer Uhr überhaupt schon die allgemeine Zeit voraussetzt, ist dies bei dem Begriff der synchron gehenden Uhren deutlich daraus ersichtlich, daß erst unter

der Voraussetzung der allgemeinen Zeit Aussagen darüber gemacht werden können, wie eine Uhr ihre Anzeige ändert, während ein Lichtzeichen von ihr zu einer anderen Uhr geht und dann wieder zurückkehrt. Daraus ist noch zu folgern, daß nicht nur die allgemeine Zeit schlechthin vorausgesetzt wird, sondern auch der gewöhnliche Begriff ein und desselben Zeitraums, während dessen sich an getrennten Orten Vorgänge abspielen. Der gewöhnliche Begriff des Zeitraums setzt aber seinerseits den gewöhnlichen Begriff des Zeitpunktes, weil notwendig zur Begrenzung des Zeitraums, voraus, und mit dem gewöhnlichen Begriff des Zeitpunktes wiederum ist auch schon der Begriff der Gleichzeitigkeit im gewöhnlichen Sinne gegeben.

Auch ergibt sich aus der Untersuchung des von der Relativitätslehre bewußt und notwendigerweise vorausgesetzten Begriffs der dauernd synchron gehenden Uhren, daß von der Relativitätslehre den Uhren ein gewisser Gang zugeschrieben werden muß, ein Begriff, der seinerseits ebenfalls die allgemeine Zeit voraussetzt.

Aus den auf ganz bestimmte Punkte der Relativitätslehre gerichteten Untersuchungen des ersten Abschnitts war also zu folgern, daß die Relativitätslehre nicht umhin kann, selbst schon die gewöhnlichen Begriffe der Zeit, des Zeitraums, des Zeitpunktes und der Gleichzeitigkeit voranzusetzen.

Der im zweiten Abschnitt untersuchte Begriff der Gleichzeitigkeit an demselben Orte stattfindender Ereignisse ist von Einstein als ein Grundbegriff, der jedoch noch einer Überbrückung bedürfe, behandelt worden. Als eine Besonderheit des Zusammenfallens zweier Ereignisse in zeitlicher und räumlicher Hinsicht ist schon von Langevin festgestellt worden, daß ein solches Zusammenfallen eine neue Erscheinung ergibt, die von jedem Bezugssystem unabhängig ist. Darüber hinaus ergibt sich als Besonderheit dieses Falles für die Zeitbestimmung, daß hier überhaupt nur ein Raumpunkt zu betrachten ist, in Folge wovon alle Schwierigkeiten wegfallen, die sich durch die Verwendung von Signalen von endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergeben können. Die Begriffsbestimmung dieses Falles der Gleichzeitigkeit braucht daher nur mit solchen physikalischen Angaben zu arbeiten, die ein und denselben Raumpunkt betreffen, so daß bei diesem Falle die Zeit gar nicht die sonstige Rolle spielt. Andererseits zwingen aber die Verhältnisse, die diesen Fall der Gleichzeitigkeit anders zu behandeln erlauben als die Gleichzeitigkeit im übrigen, zu einer Beschränkung in der Benutzung dieses Falles. Denn weil die besondere Behandlung erst dadurch ermöglicht ist, daß dabei zwischen zwei Ereignissen kein Raumunterschied vorhanden ist, darf der besondere Fall auch nur dann

als vorliegend angesehen werden, wenn diese Bedingung streng erfüllt ist. Während also einerseits nachgewiesen werden konnte, daß der Stoff zu der von Einstein als möglich vermuteten Begriffsbestimmung durch die Besonderheit dieses Falles in der Tat bereitgestellt wird, ergab sich anderseits die Unzulässigkeit, diesem Begriff mit Einstein eine Besonderheit auch dann zuzuschreiben, wenn das räumliche Zusammenfallen nur angenähert vorliegt.

Nach einer Hinweisung darauf, daß schon für die Verwertung wissenschaftlicher Versuche nicht Uhrenablesungen selbst, sondern erst die mit Hilfe von Theorien aus diesen Ablesungen abgeleiteten Zeitangaben brauchbar sind, wird im dritten Abschnitt dargelegt, daß die Einsteinsche Begriffsbestimmung, nach der eine Uhr ein System ist, das genau denselben Vorgang automatisch wiederholt, als Grundlage einer Theorie unzureichend ist, weil sie nicht dem Umstande gerecht wird, daß bei jedem sich wiederholenden Vorgange auf das als Uhr gewählte System neben den beabsichtigten Einwirkungen von dem übrigen Weltall unvermeidlich Einflüsse ausgeübt werden, die zwar dem Grade nach gering sein mögen, grundsätzlich aber doch immer vorhanden sind, woraus sich die Unmöglichkeit ergibt, auf diesem Wege eine Begriffsbestimmung zu geben, durch die wirklich eine Uhr von dem übrigen Weltall abgegrenzt und eine genaue Wiederholung des betreffenden Vorganges sichergestellt werden könnte. Daraus folgt, daß zwar bei der Anwendung schon bestehender physikalischer Gesetze Uhren brauchbar sind, weil dabei die dem Grade nach unwesentlichen Einflüsse unbeachtet bleiben oder ihrem Betrage nach in Rechnung gestellt werden können, für die Grundlegung der Physik aber, wo es noch keine Unterscheidungsmöglichkeit zwischen wesentlichen und unwesentlichen Einflüssen gibt, die Uhr ungeeignet ist.

Gegen die Begriffsbestimmungen der Uhr von Laue und von Weyl wird der Einwand erhoben, daß dabei teils schon die physikalischen Gesetze im allgemeinen und teils wenigstens gewisse, nicht von vornherein gegebene Begriffe, wie der des starren Körpers oder der der Geschwindigkeit, vorausgesetzt werden; entsprechende Bedenken werden gegen eine Zeitmessung durch sich bewegendende Massenpunkte oder durch die Einsteinsche Lichtuhr geltend gemacht.

Dem Haasschen Versuch, bei der Begründung der Relativitätslehre die Uhren ganz zu vermeiden und ohne weiteres verschiedene Zeiten einzuführen, wird entgegengestellt, daß es für die Relativitätslehre wesentlich und daher unerläßlich ist, die Zeit an physikalische Vorgänge anzuknüpfen, im Gegensatz zur klassischen Mechanik, bei der die Zeit als vor den physikalischen Vorgängen gegeben angenommen

wird; bei Voraussetzung der Unabhängigkeit der verschiedenen Zeiten von den physikalischen Vorgängen würde die der Relativitätslehre wesentliche Eigenschaft verloren gehen, daß zunächst keiner Zeit eine Bedeutung über das System hinaus zukommt, dem sie angehört.

Während also einerseits die Relativitätslehre nicht darauf verzichten kann, die Zeiten an die Uhren anzuknüpfen, wenn sie sich nicht mit einem ihr wesentlichen Grundgedanken in Widerspruch setzen will, liegt anderseits weder eine befriedigende Begriffsbestimmung der Uhr vor, von der nicht schon die Physik mehr oder weniger vorausgesetzt würde, noch ist ein Weg ersichtlich, auf dem eine solchen Bedenken nicht offenstehende Begriffsbestimmung gegeben werden könnte.

Aus den Untersuchungen des vierten Abschnitts ergibt sich zunächst, daß sich eine Mehrzahl nach verschiedenen Gesetzen gebauter Uhren, von denen jede der Einsteinschen Begriffsbestimmung der Uhr genügt, nicht so einstellen lassen (von Sonderfällen abgesehen), daß fortlaufend innerhalb aller Gruppen gleichartiger Uhren die Synchronismusbedingung erfüllt ist. Der dadurch bewirkten Ungewißheit, welche Gruppen von Uhren als die maßgeblichen anzusehen seien, läßt sich begegnen, indem man der Begriffsbestimmung die bisher in dieser Richtung noch nicht verwertete Bedingung hinzufügt, daß sich die Lichtgeschwindigkeit, mit den maßgeblichen Uhren gemessen, als unabhängig von dem vom Licht durchlaufenen Wege ergeben muß. Welche Arten von Uhren dieser noch hinzuzufügenden Bedingung genügen, ließe sich nur durch Versuche entscheiden; die bisherigen Untersuchungen über die Größe der Lichtgeschwindigkeit dürften jedoch zu einem Urteil darüber nicht genügen, ob sich bei ihnen die Lichtgeschwindigkeit als unabhängig vom durchlaufenen Wege erwiesen hat, ob also die bei diesen Untersuchungen zugrunde gelegte Zeit überhaupt die Zeit gewesen ist, die nach der Relativitätslehre zugrunde zu legen gewesen wäre. Es bleibt daher z. B. noch offen, ob der einer Spektrallinie zugrunde liegende Schwingungsvorgang überhaupt unmittelbar als Grundlage einer Zeitmessung im Sinne der Relativitätslehre dienen kann, wodurch z. B. die Bedeutung in Frage gestellt wird, die einer etwa beobachteten Linienverschiebung des Sonnenspektrums zukommt, so daß ganz abgesehen von den Meinungsverschiedenheiten, die über das Vorhandensein dieser Linienverschiebung bestehen, von der Seite der Relativitätslehre aus noch die Grundlage dafür fehlt, die Verschiebung in einen zahlenmäßigen Zusammenhang mit dem von der Relativitätslehre geforderten Unterschied des Ganges von auf der Sonne befindlichen Uhren gegen den auf der Erde befindlicher zu bringen.

Die Lage der Atome in den optisch aktiven Kristallen NaClO_3 und NaBrO_3 .

Von **L. Vegard** in Christiania.

Mit zehn Abbildungen. (Eingegangen am 17. November 1922.)

Die kubisch kristallisierenden Substanzen NaClO_3 und NaBrO_3 haben wegen ihrer starken optischen Aktivität ein ganz besonderes Interesse erregt, und sie sind der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen¹⁾.

Sie kristallisieren nach Groth in der tetraedrisch-pentagondodekaedrischen Klasse. In derselben Klasse kristallisiert auch eine andere Gruppe, deren typische Vertreter das Bleinitrat und die wasserfreien Nitrate der Erdalkalimetalle sind. Diese Substanzen sind aber optisch inaktiv.

Für die Aufklärung der Frage über den Zusammenhang zwischen optischer Aktivität und der Anordnung der Atome war eine genaue Bestimmung des Raumbitters der beiden isomorphen Gruppen von Substanzen von erheblicher Bedeutung.

Auch von dem Zusammenhange mit dem optischen Drehungsvermögen abgesehen, wird eine Raumbitterbestimmung dieser Substanzen an sich Interesse haben. So wird z.B. jede genau durchgeführte Kristallgitterbestimmung für die Aufklärung der chemischen Bindung und ihren Zusammenhang mit der Kristallstruktur beitragen, und gleichzeitig wird man die Grundlage für die Bestimmung der Zusammenhänge fester Körper gewinnen.

Mit diesem Ziele vor Augen habe ich schon seit fünf Jahren die Röntgenanalyse der beiden erwähnten isomorphen Gruppen angefangen. Zuerst wurde das Braggsche Ionisationsverfahren in Anwendung gebracht. Indessen haben sich andere Aufgaben in den Vordergrund gedrängt, und diese Untersuchungen wurden beiseite geschoben, bis sie im Jahre 1919 — und zwar unter Anwendung der Debyeschen Pulvermethode — wieder aufgenommen wurden.

Die Bestimmung der Atomlage der beiden Substanzgruppen war recht schwer und forderte die Ausführung einer ganz erheblichen Rechnungsarbeit. Die Deutung der Röntgenspektrogramme und die Bestimmung der Dimensionen des Elementargitters ließen sich sicher und eindeutig durchführen.

¹⁾ Siehe P. Groth, *Chemische Kristallographie*, 2. Bd., S. 78.

Durch eine Reihe von Rechnungen wurde ich auch ziemlich bald auf die richtigen Gittertypen geführt. Das Gitter der Nitrates forderte die Bestimmung von drei Parametern, dasjenige der Halogenate von fünf Parametern.

Bei der letzten Ausführung der Berechnungsarbeit hat mir Herr stud. real. Egil Andersen in vorzüglicher Weise assistiert.

Die Berechnung wurde zuerst für die Nitrates durchgeführt; die Ergebnisse sind schon kürzlich veröffentlicht worden¹⁾.

Als wir mit der Ausrechnung der Parameterwerte der Halogenate beschäftigt waren, erschien eine Arbeit von Kolkmeijer, Bijvoet und Karssen²⁾ über die Struktur von NaClO_3 und NaBrO_3 .

Es zeigte sich, daß unsere Ergebnisse insofern übereinstimmen, als wir zu demselben Gittertypus gelangt waren. In dem Falle aber, wo die Lage sämtlicher Atome durch einen oder mehrere Parameter festgelegt ist, wird die gegenseitige Lage der Atome und dadurch der ganze Aufbau des Gitters ganz wesentlich von der Parameterbestimmung abhängen müssen, und es wäre deshalb wünschenswert, eine von derjenigen der beiden erwähnten Forscher unabhängige Parameterbestimmung durchzuführen. Ich ließ daher meinen Assistenten, Herrn Andersen, die Rechnung fortsetzen, ohne ihm von den gefundenen Parameterwerten Mitteilung zu geben. Wir arbeiteten soweit wie möglich systematisch, indem wir zuerst versuchten, die Lage der Na-, O- und Br- bzw. Cl-Atome derartig zu fixieren, daß man gewisse Hauptzüge der Intensitätsverteilung im Röntgenspektrum theoretisch herleiten könnte, und wir untersuchten nach und nach verschiedene Stellungen der Atome, welche auch die Volumenbedingungen einigermaßen befriedigen könnten.

Für eine Reihe von Hauptlagen wurden die Differentialquotienten für jede Intensität in bezug auf die fünf Parameter ausgerechnet. Hierdurch konnte man erkennen, ob man durch eine relativ geringe Verrückung der Atome in bestimmter Richtung die Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und den berechneten Intensitäten verbessern könnte.

In dieser Weise gelangten wir zuletzt zu einer Atomanordnung, die eine befriedigende Übereinstimmung ergab.

Es zeigte sich aber, daß die von uns gefundene Anordnung der Atome, besonders in bezug auf die Lage des Sauerstoffs, sich ganz

¹⁾ L. Vegard, ZS. f. Phys. **9**, 395, 1922; Kristiania Vid. Selsk. Skr., mat.-nat. Kl., 1922, Nr. 3.

²⁾ N. H. Kolkmeijer, J. M. Bijvoet und A. Karssen, Kon. Akad. van Wet. Amsterdam **23**, 644—653, 1921, Nr. 4.

erheblich von der von den Herren Kolkmeijer, Bijvoet und Karssen gefundenen unterschied. Eine Anordnung ungefähr wie die von den oben erwähnten Herren angegebene war auch von uns geprüft, aber als unmöglich wieder verworfen worden. Mit den von uns gefundenen Parameterwerten kommen die Atome in eine ganz besonders einfache Gruppierung, welche auch die Volumenbedingungen sehr gut erfüllte.

Da also unser Ergebnis sich recht bedeutend von demjenigen der Herren Kolkmeijer, Bijvoet und Karssen unterscheidet, soll — im Anschluß an die schon veröffentlichten Ergebnisse der Kristall-

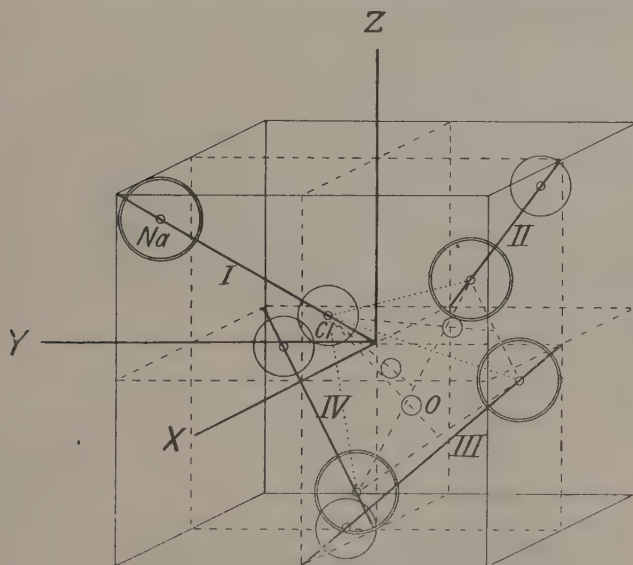


Fig. 1.

analyse der isomorphen Nitate — im folgenden ein kurzer Bericht über die Bestimmung der Kristallstruktur von NaClO_3 und NaBrO_3 gegeben werden.

Die Röntgenphotogramme (Fig. 9) sind mit Cu-Strahlen aufgenommen. Die benutzte Apparatur ist dieselbe wie die, welche bei den schon veröffentlichten Arbeiten¹⁾ angewandt wurde.

Die Ergebnisse der Ausmessung und Identifizierung der Linien sind in der Tabelle gegeben. Für jede Substanz sind die gefundenen Werte von $\sin \varphi$ sowohl als die daraus berechneten Werte von $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \Sigma h^2$ angegeben. Die beobachteten Intensitäten der

¹⁾ ZS. f. Phys. **5**, 17, 1921; **9**, 395, 1922.

Linien sind schätzungsweise bestimmt und durch die Zahlen 0, 1, 2 ... 10 bezeichnet.

a ist die Seitenlänge des Elementargitters.

Der Typus des gefundenen Raumgitters ist in Fig. 1 angegeben. Für die Struktur liegt, wie schon von Bragg erkannt ist, ein flächenzentriertes Gitter zugrunde. Trotzdem aber bildet keines der Atomzentren ein flächenzentriertes Gitter. Wie auch von den Herren Kolkmeijer, Bijvoet und Karssen angegeben, liegen die Atome mit trigonaler Symmetrie um die vier Achsen I, II, III und IV verteilt. Die Na- und Cl-Atome müssen aus Symmetriegründen auf den Achsen selbst liegen.

Die Cl-Atome seien um eine Strecke l_1 gegen die nächstliegende Ecke des Würfels verschoben. Die Na-Atome mögen um eine Strecke l_2 gegen die gegenüberliegende Ecke des kleinen Würfels verschoben sein. Beziehen wir die Lage sämtlicher Atome auf das in der Fig. 1 angedeutete Koordinatensystem, so kann man die Koordinaten der beiden Atome in einfacher Weise durch l_1 und l_2 ausdrücken. Sind weiter die drei Koordinaten (x, y, z) eines Sauerstoffatoms gegeben, so ist die Lage der übrigen Sauerstoffatome bestimmt.

Bei der Rechnung ist es vorteilhaft, die folgenden fünf Parameter einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2\pi \frac{l_1}{d} \\ \beta &= 2\pi \frac{l_2}{d} \\ \gamma &= 2\pi \frac{x}{a}, \quad \delta = 2\pi \frac{y}{a}, \quad \varepsilon = 2\pi \frac{z}{a} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

d ist die Diagonale des Elementarwürfels.

Die Intensität der Linien finden wir mit Hilfe der Gleichung

$$J = \frac{\nu(S_1^2 + S_2^2)}{2 \cdot \Sigma h^2}. \quad (2)$$

ν ist die Zähligkeit der betreffenden Reflexionsebene. S_1 und S_2 sind die Strukturaktoren der Ebene.

Schon früher, bei der Behandlung der Nitrate, haben wir gesehen, daß nicht alle „Ebenen gleicher Indizes“ denselben Strukturfaktor geben. Die Verhältnisse sind in dieser Beziehung dieselben bei den Natriumhalogenaten wie bei den untersuchten Nitraten¹⁾. Es gilt in beiden Fällen folgendes: Wenn die ν Flächen nicht alle denselben Strukturfaktor besitzen, zerfallen sie in zwei Gruppen mit der gleichen

¹⁾ Zs. f. Phys. 9, 395, 1922 und Kristiania Vid. Selsk. Skr., mat.-nat. Kl., 1922, S. 12, Nr. 3.

Anzahl Glieder $\nu/2$, und alle Ebenen derselben Gruppe geben denselben Strukturfaktor.

Für die Natriumhalogenate ist der Strukturfaktor durch die Gleichung (3) gegeben (s. folgende Seite).

Netzebene		NaClO_3 $a = 6,58 \text{ \AA.}$				NaBrO_3 $a = 6,72 \text{ \AA.}$			
$h_1 h_2 h_3$	Σh^2	$\sin \varphi$	$\Sigma h^2 b$	Intensität		$\sin \varphi$	$\Sigma h^2 b$	Intensität	
				beob.	ber.			beob.	ber.
100	1	—	—	0	0	—	—	0	0
110	2	0,1643	1,97	1	12	0,1634	2,03	1	2
111	3	0,1997	2,84	6	38	0,2000	3,04	5	59
200	4	0,2340	3,99	6	67	0,2337	4,14	4	54
210	5	0,2605	4,96	7	34	0,2529	4,87	7	74
211	6	0,2859	5,97	5	71	0,2807	6,00	5	72
220	8	—	—	0	10	—	—	0	8
221	9	0,3508	8,99	3	19	0,3439	9,01	3	25
300	10	—	—	0	4	—	—	1	8
310	11	0,3897	11,09	3	25	0,3827	11,14	3	23
222	12	—	—	0	7	0,3989	12,12	3	15
320	13	0,4214	12,97	2	12	0,4115	12,90	3	29
321	14	0,4379	14,00	10	100	0,4280	13,97	10	100
400	16	—	—	0	8	—	—	1	11
322	17	0,4832	17,05	3	32	0,4720	16,97	2,5	39
410	18	0,4955	17,93	1	9	—	—	1	15
330	19	0,5093	18,94	2	18	0,4999	19,03	2,5	23
411	20	0,5237	20,03	1	12	—	—	0,5	11
331	21	0,5368	21,04	3	24	0,5263	21,09	5	29
420	22	—	—	0	3	—	—	0	0,5
421	23	—	—	0	3	0,5602	23,90	1,5	12
422	24	—	—	0	1	—	—	0	6
430	25	—	—	0	1	—	—	0	6
500	26	0,5966	25,99	7	48	0,5834	25,92	7	58
431	27	0,6100	27,17	3	27	0,5967	27,12	4	40
510	29	0,6293	28,91	3	27	0,6176	29,05	5	35
332	30	0,6420	30,10	2	6	0,6284	30,08	2	10
520	32	—	—	0	0	—	—	0	1
521	33	0,6747	33,24	1	8	0,6598	33,15	1,5	6
440	34	—	—	1	22	—	—	1	24
441	35	0,6939	35,16	1	8	—	—	—	9
522	36	—	—	1	25	0,6879	36,04	2	30
433	37	—	—	0	11	—	—	0	4
530	38	0,7210	37,96	1	13	0,7070	38,06	3	27
531	40	0,8785	39,83	1	6	—	—	1	7
442	41	0,7497	41,04	7	55	0,7338	41,01	7	58
600	42	—	—	—	—	—	—	—	—
610	43	—	—	—	—	—	—	—	—

(3)

$$\begin{aligned}
 S = & \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \alpha \right) \cdot \cos \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \alpha \right) \cos \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \alpha \right) \\ - i \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \alpha \right) \sin \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \alpha \right) \sin \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \alpha \right) \end{array} \right\} \\
 & + \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi - h_1 \beta \right) \cos \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi - h_2 \beta \right) \cos \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi - h_3 \beta \right) \\ - i \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi - h_1 \beta \right) \sin \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi - h_2 \beta \right) \sin \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi - h_3 \beta \right) \end{array} \right\} \cdot (-1)^{h_1 + h_2 + h_3} \\
 & \left[\begin{array}{l} \cos \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \gamma \right) \cos \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \delta \right) \cos \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \varepsilon \right) \\ + \cos \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \delta \right) \cos \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \varepsilon \right) \cos \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \gamma \right) \\ + \cos \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \varepsilon \right) \cos \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \gamma \right) \cos \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \delta \right) \\ - i \left\{ \begin{array}{l} \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \gamma \right) \sin \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \delta \right) \sin \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \varepsilon \right) \\ + \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \delta \right) \sin \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \varepsilon \right) \sin \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \gamma \right) \\ + \sin \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \pi + h_1 \varepsilon \right) \sin \left(\frac{h_2 - h_3}{2} \pi + h_2 \gamma \right) \sin \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \pi + h_3 \delta \right) \end{array} \right\} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

O.

Man unterscheidet zweckmäßig die folgenden zwei Fälle:

I. Alle Indizes sind paarzählig oder alle unpaarzählig, (4 a)

II. $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwei paarzählig, eine unpaarzählig oder} \\ \text{eine „ zwei „} \end{array} \right\}$ (4 b)

$$S = \left. \begin{aligned} & \text{Br} \cos h_1 \alpha \cos h_2 \alpha \cos h_3 \alpha \pm \text{Na} \cos h_1 \beta \cos h_2 \beta \cos h_3 \beta \\ & + O \left\{ \begin{array}{l} \cos h_1 \gamma \cos h_2 \delta \cos h_3 \varepsilon \\ \cos h_1 \delta \cos h_2 \varepsilon \cos h_3 \gamma \\ \cos h_1 \varepsilon \cos h_2 \gamma \cos h_3 \delta \end{array} \right\} \\ & + i [\text{Br} \sin h_1 \alpha \sin h_2 \alpha \sin h_3 \alpha \mp \text{Na} \sin h_1 \beta \sin h_2 \beta \sin h_3 \beta \\ & + O \left\{ \begin{array}{l} \sin h_1 \gamma \sin h_2 \delta \sin h_3 \varepsilon \\ \sin h_1 \delta \sin h_2 \varepsilon \sin h_3 \gamma \\ \sin h_1 \varepsilon \sin h_2 \gamma \sin h_3 \delta \end{array} \right\}] \end{aligned} \right\} \quad (4 a)$$

$$S = \left. \begin{aligned} & \text{Br} \cos h_1 \alpha \sin h_2 \alpha \sin h_3 \alpha \mp \text{Na} \cos h_1 \beta \sin h_2 \beta \sin h_3 \beta \\ & + O \left\{ \begin{array}{l} \cos h_1 \gamma \sin h_2 \delta \sin h_3 \varepsilon \\ \cos h_1 \delta \sin h_2 \varepsilon \sin h_3 \gamma \\ \cos h_1 \varepsilon \sin h_2 \gamma \sin h_3 \delta \end{array} \right\} \\ & + i [\text{Br} \sin h_1 \alpha \cos h_2 \alpha \cos h_3 \alpha \pm \text{Na} \sin h_1 \beta \cos h_2 \beta \cos h_3 \beta \\ & + O \left\{ \begin{array}{l} \sin h_1 \gamma \cos h_2 \delta \cos h_3 \varepsilon \\ \sin h_1 \delta \cos h_2 \varepsilon \cos h_3 \gamma \\ \sin h_1 \varepsilon \cos h_2 \gamma \cos h_3 \delta \end{array} \right\}] \end{aligned} \right\} \quad (4 b)$$

Die Parameter wurden zuerst für NaBrO_3 bestimmt, wobei wir zuletzt auf die folgenden Werte geführt wurden:

$$\begin{array}{ll} \alpha = & 33^\circ \text{ oder } l_1/d = +0,092 \\ \beta = & 20^\circ \quad \quad l_2/d = +0,056 \\ \gamma = & -39^\circ \quad \quad x/a = -0,108 \\ \delta = & -50^\circ \quad \quad y/a = -0,139 \\ \varepsilon = & 0 \quad \quad \quad z/a = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Parameterwerte sind für alle Ebenen, für welche $\Sigma h^2 \leq 41$, die Intensitäten berechnet worden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben. Die Intensität der (321)-Ebene ist gleich 100 gesetzt.

In Fig. 2 ist die berechnete und beobachtete Intensitätsverteilung für NaBrO_3 graphisch dargestellt. Die Übereinstimmung ist, wie wir ersehen, sehr gut. Zum Vergleich sind in Fig. 3 die von den Herren Kolkmeijer, Bijvoet und Karssen berechneten Intensitäten mit den beobachteten verglichen. Wir ersehen, daß die Übereinstimmung weniger gut ist. So berechnen z. B. diese Herren für die Linie (110)

eine gar zu große Intensität. Die Linie (210) ist den benachbarten Linien gegenüber zu stark. Die Linien $\Sigma h^2 = 11, 13, 14, 21$ und 26 sind aber zu schwach.

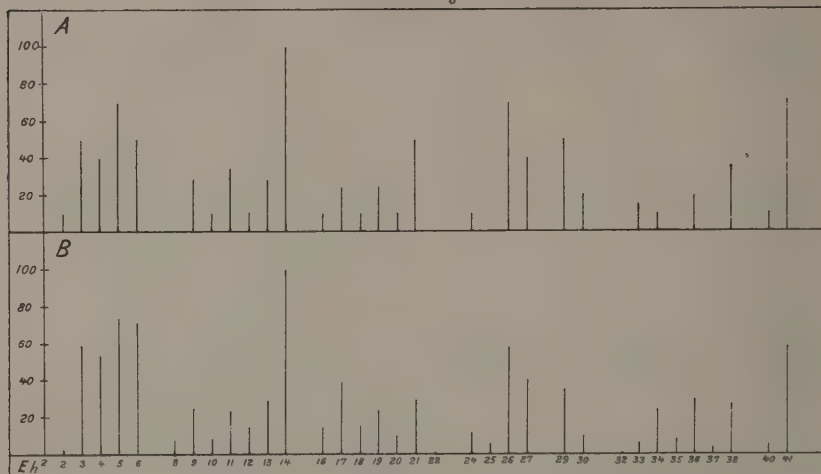


Fig. 2.

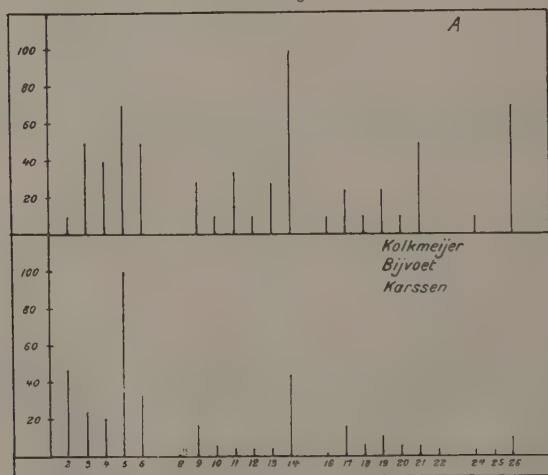


Fig. 3.

Obwohl auch die von mir berechneten Intensitäten verbesserungsfähig sind, so gibt doch die berechnete Intensitätsverteilung die beobachtete sehr gut wieder, und nur ganz kleine Fehler in der Parameterbestimmung sind möglich.

Durch die Substitution von Br durch Cl werden sich die Parameter etwas ändern. Man sollte aber erwarten, was auch die Erfahrung bestätigt, daß isomorphe Substanzen annähernd gleiche anguläre Parameterwerte besitzen.

Bei der Intensitätsberechnung von NaClO_3 haben wir dann ohne weiteres die für NaBrO_3 gefundenen Parameter benutzt. Wie man aus der Tabelle und Fig. 4 ersieht, ist auch für NaClO_3 die Übereinstimmung eine sehr gute, und die Parameter der beiden Substanzen können sich voneinander nicht viel unterscheiden. Wegen der großen Rechenarbeit bin ich auf eine Verbesserung der Parameterwerte für NaClO_3 nicht eingegangen.

NaClO_3

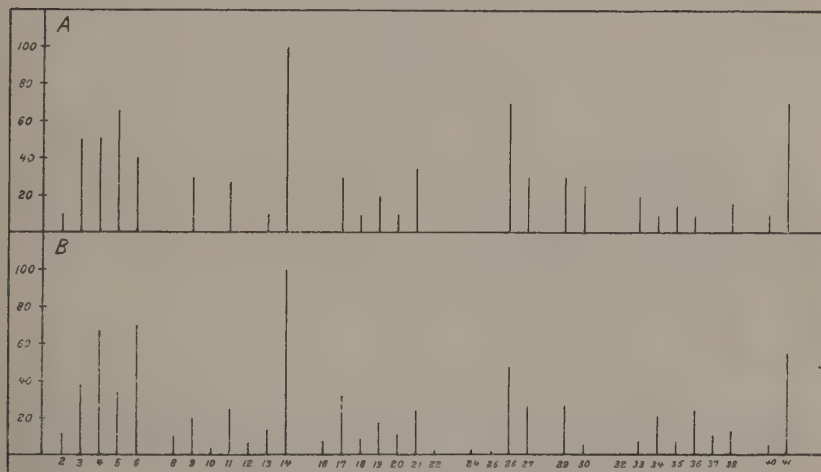


Fig. 4.

Die gefundenen Parameter geben eine sehr einfache Anordnung der Atome. Wir betrachten zuerst den Elementarwürfel Fig. 1. Die Na- und Cl-Atome sind paarweise auf den vier dreizähligen Achsen angebracht. Um die Lage der Atome klar zu machen, betrachten wir eine Gruppe, welche aus dem Cl-Atom auf der Achse I und den drei Na-Atomen auf den drei übrigen Achsen (II, III und IV) besteht. Die Zentren der vier Atome bilden eine dreieckige Pyramide mit Cl im Scheitelpunkte. Durch diesen Scheitelpunkt denken wir uns die drei Symmetrieebenen der Pyramide gelegt, und die Zentren der Sauerstoffatome befinden sich dann wenigstens annähernd in diesen Ebenen, ungefähr wie in Fig. 1 angedeutet. Die Anordnung sieht man vielleicht besser aus Fig. 5 oder aus Fig. 10 a.

Könnten wir voraussetzen, daß jedes Atom einen sphärischen Raum für sich verlangt, so müssen wir annehmen, daß alle Kontakte durch den Sauerstoff vermittelt werden. In der Pyramidengruppe (Fig. 5) berührt jedes Sauerstoffatom ein Cl-Atom und zwei Na-Atome.

Für NaBrO_3 findet man die folgenden Abstände der Atomzentren:

$$D_{\text{Na}-\text{O}} = 2,36 \text{ \AA.}$$

$$D_{\text{Br}-\text{O}} = 1,89 \text{ \AA.}$$

Nach Bragg sollte man haben:

$$D_{\text{Na}-\text{O}} = 2,42 \text{ \AA.}$$

$$D_{\text{Br}-\text{O}} = 1,84 \text{ \AA.}$$

Für die Abstände zwischen zwei benachbarten Sauerstoffatomen findet man:

$$D_{\text{O}-\text{O}} = 1,20 \text{ \AA.}$$

Für den Zentralabstand zwischen zwei einander berührenden Sauerstoffatomen findet Bragg den Wert $1,30 \text{ \AA.}$

Es muß also angenommen werden, daß auch die drei Sauerstoffatome einer Pyramidengruppe sich gegenseitig berühren. Dagegen haben die Halogenatome mit den Na-Atomen keine Berührung. Auch die Atompaare, die auf derselben dreizähligen Achse liegen, haben keinen „Kontakt“ miteinander.

Der Zentralabstand beträgt nämlich:

$$D_{\text{Na}-\text{Br}} = 4,12 \text{ \AA.},$$

während zwei Atome bei Berührung nur etwa den Abstand $2,96 \text{ \AA.}$ geben würden. In der Pyramidengruppe, wo die O-Atome zwischen Na und Br eingelagert sind, ist die Entfernung zwischen den Zentren von Na und Br $D'_{\text{Na}-\text{Br}} = 3,84 \text{ \AA.}$ Der Zentralabstand der Br-Atome beträgt $4,16 \text{ \AA.}$ und derjenige der Na-Atome $4,32 \text{ \AA.}$

Wegen der Verschiebung der Na-Atome auf den dreizähligen Achsen um die Strecke l_2 wird jede Pyramidengruppe um die Pyramidenachse etwas gedreht. Diese Drehung kann in zwei Richtungen vorgenommen werden. Die eine Drehungsrichtung der Gruppe entspricht einem optisch rechtsdrehenden Kristall, die andere einem linksdrehenden. Die optische Aktivität wird hierdurch verständlich. Derartige gedrehte Gruppen findet man in der isomorphen Gruppe von Nitraten nicht, und hieraus findet man auch die Erklärung dafür, daß diese Substanzen keine Aktivität besitzen.

Die schon erwähnte Pyramidengruppe ist jedoch nicht als ein zusammengesetztes selbständiges Strukturelement aufzufassen, denn jedes Na-Atom der Gruppe gehört gleichzeitig zwei anderen solchen Gruppen.

Eine selbständige Gruppe dagegen bildet sich aus dem Cl- und dem Na-Atom auf der Achse I (Fig. 1) zusammen mit den drei in der Figur angegebenen Sauerstoffatomen. Man bekommt dann eine Gruppe wie Fig. 6 oder Fig. 10c. Man könnte sich jetzt vorstellen, daß diese Gruppe in chemischem Sinne ein Molekül bildete, und Fig. 6 würde dann die gegenseitige Lage der Atome im Molekül darstellen.

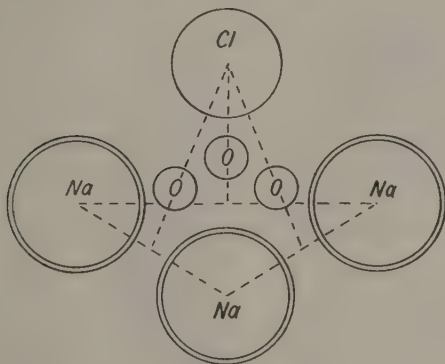


Fig. 5.

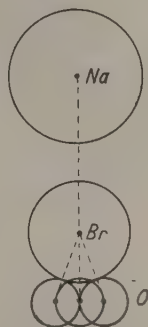


Fig. 6.

In bezug auf die chemische Konstitution zeigt uns die Lage der Atome, daß sämtliche O-Atome in derselben Beziehung zu den übrigen Atomen stehen. Würde man diese Tatsache in der üblichen Weise mit Hilfe von „Valenzlinien“ ausdrücken, so würde man zu den beiden in Fig. 7a und 7b angegebenen Konstitutionsbildern geführt werden. In Fig. 7a denkt man sich die O-Atome nur an die Cl-Atome gebunden, und der Sauerstoff wird als zweiwertig angenommen. Oder aber es wird angenommen (Fig. 7b), daß auch die Sauerstoffatome gegenseitig gebunden sind, und zwar mit zwei Valenzen. Sauerstoff wird dann sechswertig angenommen. Welches Konstitutions-schema vorzuziehen ist, läßt sich aus der Kristallstruktur nicht entscheiden. Den Umstand, daß die Sauerstoffatome sich gegenseitig „berühren“, dürfte man vielleicht als ein Argument zugunsten einer gegenseitigen Bindung ansehen. Wenn man aber einander berührende Atome mit Valenzkräften zu verbinden hätte, so wären die Konstitutionsformeln überhaupt unrichtig, denn Na und Cl berühren einander nicht

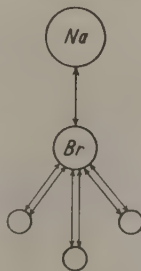


Fig. 7a.

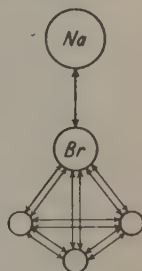


Fig. 7b.

Dagegen ist jedes Na-Atom mit sechs O-Atomen in Berührung. Man hätte also Affinitätskräfte zwischen den Atomen, welche verschiedenen Molekülgruppen gehörten, einzuführen. Wäre also eine der beiden Konstitutionsformeln richtig, so könnte man nicht von der Berührung auf das Vorhandensein von chemischen Valenzkräften schließen.

Die Auffassung, daß die „Chemische Konstitution“ nicht notwendigerweise durch die Anordnung der Atome im Kristall zum Ausdruck kommt, ist auch durch die Struktur der schon untersuchten Nitrats gestützt. Eine herausgegriffene Molekülgruppe hat hier die in Fig. 8 angedeutete Anordnung der Atome.

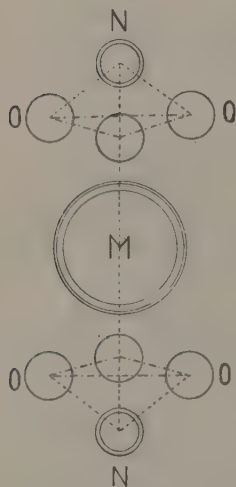
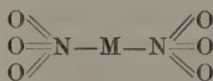


Fig. 8.

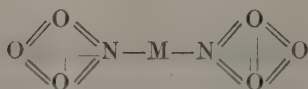
Im Molekül ist jedes N-Atom mit drei O-Atomen in Berührung, dagegen berühren die O-Atome einander nicht, und das Metallatom ist mit keinem der Atome des Moleküls in Kontakt, wird aber von den Sauerstoffatomen anderer Moleküle berührt.

Es ist zwar wahrscheinlich, daß einander berührende Atome aneinander fest gebunden sind. Man kann aber nicht annehmen, daß diese Kopplungskräfte durch die in die Konstitutionsformeln eingeführten Valenzkräfte zu ersetzen sind.

Auch in den Nitraten haben die drei O-Atome einer NO_3 -Gruppe gleichwertige Lagen. Sollte die chemische Konstitutionsformel diese Tatsache zum Ausdruck bringen, so hätte man für die untersuchten Nitrate entweder die Konstitutionsformel



oder



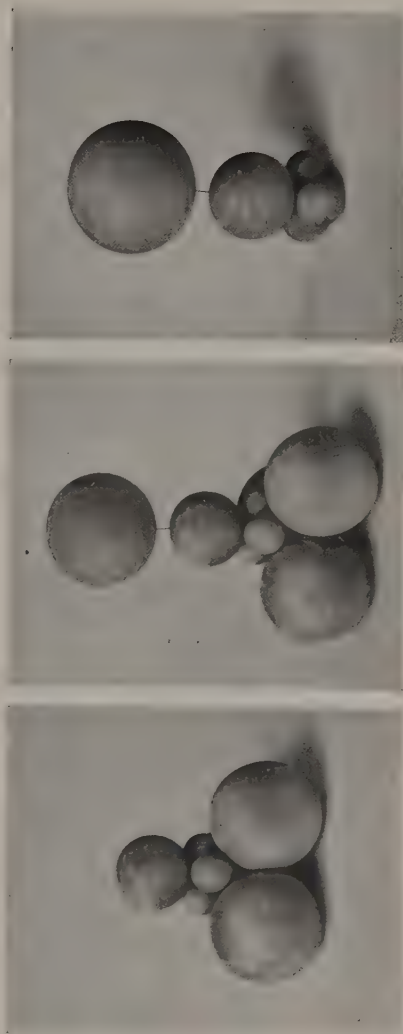
anzunehmen.

Nach der ersten Formel ist O zweiwertig, nach der zweiten sechswertig. In beiden Fällen aber ist Stickstoff als siebenwertig anzunehmen.



NaBrO_3 NaClO_3

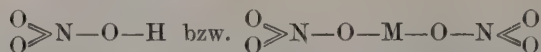
Fig. 9.



a b c

Fig. 10.

In der Chemie dagegen nimmt man an, daß in den Nitraten N als fünfwertig anzusehen ist, und zwar sollte die Salpetersäure und unsere Nitate die Konstitution:



besitzen. Wollte man, oder könnte man, für die Konstitutionsformeln die Forderung stellen, daß sie einen richtigen Ausdruck für die Atomenlage im Kristallgebäude geben sollten, so hätte man also in den Nitraten den Stickstoff als siebenwertig anzunehmen.

Meiner Meinung nach ist dieser Schluß nicht ohne weiteres erlaubt. Denn die Forderung aufzustellen, daß die bis jetzt gebrauchten Konstitutionsformeln auch die Atomlage des Moleküls im kristallinen Zustand zum Ausdruck bringen sollen, ist vielleicht an sich nicht möglich, wenn die Konstitutionsformeln gleichzeitig ihre chemische Bedeutung beibehalten sollen.

Übrigens ist zu bemerken, daß die Frage über die Übertragbarkeit der chemischen Konstitutionsformeln auf die feste Form kein definiertes Problem ist, solange man nicht genau weiß, was unter einer Valenzbindung zu verstehen ist.

Die Valenzkräfte drücken wohl gewisse Anzahlbezeichnungen aus, vertreten aber nicht die wirklich vorhandenen Kräfte.

Wie ich auch in früheren Arbeiten¹⁾ bemerkt habe, gibt die Anordnung der Atome keinen eindeutigen Ausdruck für die chemische Konstitutionsformel in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes. Dies heißt wohl nur, daß die Valenzkräfte, falls ihnen überhaupt eine wohldefinierte Bedeutung zuzuschreiben ist, nicht mit den Kräften, welche die Strukturelemente (Atome) des Gitters zusammenhalten, zu identifizieren sind.]

Daß die chemische Konstitution nicht durch die Atomanordnung im Kristallgitter eindeutig zum Ausdruck kommen kann, ist ja auch aus theoretischen Gründen zu erwarten.

Halten wir uns an die Vorstellungen über die Atomkonstitution und die Bindung der Atome, welche uns die Quantentheorie gegeben hat, so muß das Problem der Atomanordnung in kristallinen Substanzen sich ungefähr folgendermaßen gestalten: Der Kristall besteht aus einer Atommenge von den Atomenarten A , B , C usw. nach der chemischen Formel $A_{n_1} B_{n_2} C_{n_3} \dots$. Die Gitterstruktur bezeichnet eine stabile Gleichgewichtslage dieser Atommenge, oder die Atome sinken nach einem Gitter, welches ein Minimum der potentiellen Energie des

¹⁾ Phil. Mag. **13**, 426, 1917.

Systems bedingt, indem die Beweglichkeiten des Systems den Quantenbedingungen der Atomstruktur und denjenigen der gegenseitigen Bindung gehorchen müssen.

Eine Folge dieser Quantbedingungen ist, daß jedes Atom einen für das betreffende Element charakteristischen Raum verlangt, der in den verschiedenen Verbindungen nur geringen Schwankungen unterworfen ist. Die Raumfüllungsbedingung, und nicht nur die sogenannten Valenzkräfte, muß unzweifelhaft für die Atomanordnung von maßgebender Bedeutung sein. Diese Auffassung wird von mehreren Tatsachen gestützt. So habe ich früher gefunden¹⁾, daß Substanzen, welchen eine verschiedene chemische Konstitution zugeschrieben werden muß, dieselbe Gitterstruktur besitzen. Ferner zeigt uns die Bildung von Mischkristallen, daß ein Kristallgitter eine Atomsubstitution gestattet, ohne daß dadurch die Gitterstruktur geändert wird. Diese Substitution bringt es aber mit sich, daß die Bindungskräfte sehr bedeutend geändert werden. Es soll auch vorkommen können, daß Substanzen verschiedener chemischer Konstitution Mischkristalle bilden.

Dagegen ist es, wie bekannt, eine Bedingung für die Ersetzbarkeit der Atome, daß die einander ersetzenden Atomgruppen annähernd dasselbe Volumen verlangen, Größe und Zahl der Affinitätskräfte scheinen aber in den Hintergrund zu treten.

Aus diesen Gründen muß man, wie ich auch in früheren Arbeiten²⁾ betont habe, sehr vorsichtig sein, wenn man von der Kristallstruktur auf die chemische Konstitution Schlüsse ziehen will. Wenn man z. B. in der Struktur der verschiedenen Kohlenstoffmodifikationen (Diamant, Graphit) die chemische Bindungsweise des Kohlenstoffs wiederfinden will, so kann auf derartige Koordinationen von Kristallstruktur und chemischer Bindung kaum viel Gewicht gelegt werden.

Christiania, Physikalisches Institut der Universität.

¹⁾ L. Vegard, Results of Crystal Analysis. IV. Phil. Mag. **13**, 426, 1917.

²⁾ Derselbe, Ann. d. Phys. **58**, 291, 1919.

Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion. II.

Von H. Opitz in Berlin.

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 11. November 1922.)

In der ersten Mitteilung unter diesem Titel¹⁾ habe ich zu zeigen versucht, daß die Dispersionserscheinungen, soweit sie sich nach den Methoden der geometrischen Optik behandeln lassen, die Differentialformel

$$d\varepsilon_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta \cos \varepsilon_1} dn \quad (1)$$

zur Grundlage haben. Meine erste Arbeit²⁾ hatte dies nicht mit genügender Deutlichkeit hervortreten lassen, obwohl es durch den Gang der Untersuchung ersichtlich sein mußte. Weit entfernt, behaupten zu wollen, daß diese Formel von mir eingeführt worden sei³⁾, will ich aber betonen, daß jede analytische Untersuchung hiervon ausgehen muß. So weise ich hier deshalb nochmals darauf hin — was ich schon in meiner zweiten Arbeit getan habe —, daß H. v. Helmholtz „Die Größe der Zerstreuung für Licht von verschiedener Brechbarkeit“ behandelt hat, indem er — und dies füge ich jetzt hinzu — dabei die genannte Formel als Ausgangspunkt wählte. Daß dies erst im Jahre 1896 in der zweiten Auflage seines Handbuches der Physiologischen Optik geschehen sei, war nicht genau ausgedrückt, denn mit der Lieferungsabgabe dieses Werkes war bereits im Jahre 1885 begonnen worden, und das dritte Heft, welches jene Stelle enthält, lag im Jahre 1887 fertig vor⁴⁾. Helmholtz hat die Fertigstellung

¹⁾ Die zunächst in Betracht zu ziehenden Schriften mögen ihrer Zeitfolge nach hier angegeben werden: I. H. Opitz, Über das Minimum der Dispersion beim Durchgang eines Lichtstrahles durch ein Prisma. Elster-Geitel-Festschrift, S. 307—312, 1912 u. 1915. II. H. Opitz, Über die Beziehung zwischen dem Minimum der Dispersion und dem Minimum der Ablenkung bei einem Prisma. Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 240—249, 1915. III. H. Erfle, Das Minimum der Dispersion und die größte Dispersion, sowie die chromatische Vergrößerungsdifferenz im Hauptschnitte eines Prismas. ZS. f. Instrkde. 39, 280 bis 288 u. 297—312, 1919. IV. H. Opitz, Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion. ZS. f. Phys. 10, 243—251, 8. Juni 1922. V. H. Erfle, Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion. ZS. f. Phys. 11, 56—70, 11. August 1922.

Da die Bezeichnungen noch keinesfalls feststehen, so werde ich bei allen Zitaten die Originalbezeichnungen angeben und sie erklären, wo es nötig erscheint. Ich verweise überdies auf die Zusammenstellung am Ende dieser Mitteilung.

²⁾ II. ist vor I. im Druck erschienen.

³⁾ V. Erfle, S. 59.

⁴⁾ A. König, Titelverzeichnis sämtlicher Veröffentlichungen in Wissenschaftl. Abhdl. v. Helmholtz 3, 1895.

der zweiten Auflage seines berühmten Werkes bekanntlich nicht mehr erlebt.

Es heißt nun dort folgendermaßen:

„Wenn die einfallenden Strahlen aus fester Richtung kommen, der Winkel ε für sie also nicht variiert, so ändert sich doch η mit dem Brechungsverhältnis n . Die Größe

$$d\eta = \frac{d\eta}{dn} dn$$

gibt dann die scheinbare Breite des Farbstreifens im Spektrum, der dem Intervall des Brechungsverhältnisses dn entspricht¹⁾.“

Nach Bildung des Differentialquotienten

$$\frac{d\eta}{dn} = \frac{\sin \gamma}{\cos \eta \cos^2 \varepsilon_1} \quad (1a)$$

wird schließlich folgende Diskussion vorgenommen:

„Das Produkt der beiden Cosinus im Nenner dieses Ausdrucks ist veränderlich, wenn man das Prisma dreht. An der einen Grenze, wo der austretende Strahl streifenden Austritt hat, ist $\cos \eta = 0$, also $\frac{d\eta}{dn} = \infty$. An der anderen Grenze ist dagegen $\varepsilon_1 = h$ und $\cos \eta = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\gamma - h)}$; also

$$\frac{d\eta}{dn} = \frac{\sin \gamma}{\cos h \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\gamma - h)}} \quad (2)$$

Zwischen beiden gibt es aber noch ein Minimum des Wertes dieser Größe, welche einem Maximum von $(\cos \varepsilon_1 \cos \eta)$ entspricht. Die genaue Richtung dieses Minimums wird durch eine Gleichung dritten Grades gegeben. Es liegt zwischen dem streifenden Austritt und der Richtung der kleinsten Ablenkung des Strahls.“

Den hier angedeuteten Gang der Untersuchung für das Dispersionsminimum finde ich bei R. S. Heath in dem Werke „A Treatise on Geometrical Optics“ befolgt, welches im Jahre 1887 erschienen und auf Anregung S. Czapskis von R. Kanthack in der Übersetzung im Jahre 1894 herausgegeben worden ist²⁾. Auf den Zusammenhang dieses Werkes mit früheren Veröffentlichungen gehe ich hier nicht ein, sondern will nur hervorheben, daß die als kubische Gleichung für $\operatorname{tg} i_1$ gekennzeichnete Gleichung³⁾

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} (\alpha - 2 i_1) \quad (3)$$

¹⁾ Im Original S. 293 steht fälschlich $d\eta$. Weiterhin ist $\sin h = 1/n$.

²⁾ Lehrbuch der Geometrischen Optik. Berlin, Julius Springer, 1894. Das Original ist mir nicht zugänglich gewesen. Etwaige Zusätze Kanthacks konnte ich also nicht kontrollieren.

³⁾ A. a. O. S. 219.

zur Bestimmung der Lage des Zerstreuungsminimums aus der Differentialformel hergeleitet worden ist. Wenn man die Beziehung $\alpha = i' + i_1'$ benutzt, so kann man die Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg}(\alpha - i') = \operatorname{tg}(2i' - \alpha),$$

oder auch

$$\operatorname{tg}(i' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - 2i')}{n^2 - 1}. \quad (4)$$

Aus der nun bei Heath-Kanthack folgenden Diskussion ist bemerkenswert, daß behauptet wird: „Es wird somit anfänglich die Dispersion kleiner, sie erreicht darauf ihr Minimum und nimmt darauf unbegrenzt zu.“

Im Anschluß hieran sei es mir zunächst gestattet, festzustellen, daß der Begriff Dispersion bei den verschiedenen Autoren keine einheitliche Bestimmung erfahren hat. E. Block definiert¹⁾: Dispersionskoeffizient soll heißen die Differenz der Brechungskoeffizienten, die eine besondere Eigenschaft des betreffenden brechenden Mediums ist für die betreffenden Strahlen, während die hervorgebrachte Dispersion, die außer von dem Dispersionskoeffizienten von dem brechenden Winkel des Prismas und der ersten Einfallsnäigung abhängig ist, durch die Differenz der Ablenkungen der beiden Strahlen gemessen werden soll. Die letztgenannte Differenz ist identisch mit der Differenz der Austrittsnäigungen — wollen wir hinzufügen —. Block setzt:

$$D_{\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} = \frac{\sin P_1}{\sin b_1 \sin b_2} dn_1; \quad (5)$$

hierbei sind b_1 und b_2 die Komplemente der Brechungswinkel im Verlaufe des Strahls. Mousson hat $\frac{\partial a}{\partial n}$ die an der Stelle n vorhandene lokale Ausbreitung oder Dilatation des Spektrums genannt²⁾, indem er mit δa die Änderung der Ablenkung bezeichnete. Bei Heath-Kanthack ist ∂i_1 geradezu die Dispersion, während Helmholtz $d\eta$ in treffender Weise die scheinbare Breite des Farbstreifens im Spektrum, der dem Intervall des Brechungsverhältnisses dn entspricht, nennt. Handelt es sich um endliche Wellenlängendifferenzen oder endliche Brechungsexponentenunterschiede, so muß man integrieren zwischen den dadurch bedingten Grenzen, und es erscheint also hiernach vollkommen berechtigt, wenn zur Begründung des Begriffs „Zerstreuungsfunktion“ das Integral

$$\Delta \varepsilon_1 = \int_{n_1}^{n_2} \frac{\sin \varphi}{\cos \beta \cos \varepsilon_1} dn = \int_{n_1}^{n_2} \pi(n; \varepsilon, \varphi) dn \quad (6)$$

¹⁾ E. Block, Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen, S. 36. Dorpat 1873.

²⁾ Alb. Mousson, Über Spektralbeobachtungen. Pogg. Ann. 112, 428, 1861.

aufgestellt wird. Nun hatte ich gezeigt, daß bei Einführung der Veränderlichen¹⁾

$$\nu = \sin \varepsilon \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \mathcal{A} \quad (6a)$$

dieses Integral umgewandelt wird in

$$\mathcal{A} \varepsilon_1 = \int_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = \arcsin \nu_1 - \arcsin \nu_2. \quad (6b)$$

Daraufhin heißt es bei Erfle (V, 61): „Die wirklich »independente« Darstellung für den Zerstreuungswinkel ist nicht das Opitzsche Integral, das außer n noch die von n abhängige Hilfsveränderliche $\mathcal{A} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}$ (Opitzsche Bezeichnung) enthält, sondern vielmehr nach (8):

$$\mathcal{A} \varepsilon = \arcsin \{ \sin i_1 \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \} - \arcsin \{ \sin i_1 \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sqrt{N^2 - \sin^2 i_1} \}.$$

Ich will durchaus niemandem raten, diese Gleichung (9) zu benutzen²⁾, aber mathematisch ist sie mehr »independent« als das Opitzsche Integral. Ergibt also in diesem Falle die Benutzung der Integralrechnung keine neuen Beziehungen, dann ist sie auch nicht zu empfehlen³⁾.

Hierzu erlaube ich mir zunächst zu bemerken, daß es schwer verständlich ist, wenn zwei Ausdrücke, die einander gleich sind, sich dadurch unterscheiden sollen, daß der letztere „mehr independent“ sei als der erste. Dann aber habe ich gezeigt, daß die Rechnung nach diesem Ausdruck durchaus empfehlenswert ist, besonders wenn $\nu = -1$ ist. Die Näherungsformel Erfles:

$$\sin \left(\frac{E_u - \varepsilon_a}{2} \right) = \sqrt{\frac{(N-n)n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{\operatorname{tg} \alpha}}} \quad (7)$$

für die Dispersion bei streifendem Austritt mag ja für gewisse Zwecke sehr brauchbar sein, aber als Näherungsformel hat sie doch wohl zunächst ihre eigentliche Aufgabe zu erfüllen, nämlich wesentliche

¹⁾ Ich brauchte deshalb noch nicht vergessen zu haben, wie Erfle III, 288 meint, daß $\nu = -\sin \varepsilon_1$ ist nach I, 310.

²⁾ „Im Anschluß an Gleichung (8) habe ich vorhin als empfehlenswertesten Weg für die Zahlenrechnung die einfache Durchrechnung nach (1) und (1a) bezeichnet.“

³⁾ „In bezug auf die nebensächliche Bemerkung bei Erfle (I, 288) „wohl Druckfehler“ hat Opitz 3, 250, Anm. 3 recht, wenn er sagt: „Der gerügte Druckfehler besteht übrigens nicht; es war ein Schreibfehler meinerseits.“

Erleichterung der Rechnung¹⁾. Diese Feststellung bedeutet keinesfalls eine Herabsetzung ihres sonstigen Wertes.

H. Erfle hat die vorliegende Aufgabe für eine so einfache gehalten, daß sie nicht den Namen „funktionentheoretisches Problem“ verdiente. Nun ist bekannt, daß es oft sehr schwer ist, für die schönsten, mit vieler Mühe erarbeiteten Sätze der Theorie passende Beispiele zu finden. Das Problem als solches mag hier sehr einfach erscheinen, analytisch läßt es sich noch nicht gänzlich durchführen, da die Rechnungen schon bei der zweiten Ableitung ungeheuer verwickelt werden. Ich habe gezeigt, daß man das Problem einigermaßen bewältigen kann unter Zuhilfenahme der graphischen Methode, und H. Erfle ist mir hierin gefolgt. Mir war in betreff des kritischen Prismenwinkels ein Irrtum untergelaufen, den Erfle anerkanntermaßen verbessert hat. Diesen Fehler habe ich in noch anderer Weise verbessert, indem ich zeigte, daß der kritische Winkel φ aus der Zerstreuungsfunktion ohne Benutzung einer kubischen Gleichung unmittelbar durch die erste Ableitung auf einfache Art zu erhalten ist. Wenn ich nun in $\operatorname{tg} \bar{\varphi}$ Zähler und Nenner in einer Form schrieb, so daß sie für die meisten Fälle, in denen doch $n < 2$ ist, als positive Zahlen auftreten, so kann darin nicht die Absicht liegen, diese Formel als eine andere wie die Erflesche hinstellen zu wollen. Was aber hier noch hervorgehoben zu werden verdient, ist der Erflesche Zweifel an der Bedeutung des Integrals dafür, daß man aus ihm die Endlichkeit der Zerstreuungsgröße erkennen könne, worüber die Meinungen auseinandergingen; denn mit der Bemerkung Erfles, daß $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{n_2} - \varepsilon_{n_1}$ sei, ist diese Angelegenheit beim streifenden Antritt der Strahlen nicht erledigt. Wenn Erfle behauptet, die Funktionentheorie lasse einen solchen Schluß nicht zu, so muß ich ihn auf das Kapitel der Integralrechnung über „Uneigentliche Integrale“ verweisen, welches auch die Zulässigkeit des Schlusses

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

begründet.

Für die Größe des Minimums der Dispersion hat H. Erfle eine besondere Formel aufgestellt, welche lautet (III, 308):

$$d\varepsilon_d^0 = \frac{\sin \alpha \cdot (N - n) \cdot 57,296^0}{\cos^2 i'_{1d} \cdot \sqrt{1 - \frac{n^2}{2}} + \sqrt{\left(\frac{n^2}{2}\right)^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 i'_{1d}}} \quad (9)$$

¹⁾ Die Abzählung, wie oft die Logarithmentafel zu benutzen ist, wird hierfür ein passendes Kriterium abgeben.

Auch hier ziehe ich die Rechnung nach meiner Methode vor. Ich habe ein Beispiel durchgerechnet und für $\varphi = 30^\circ$, $\varepsilon = 43^\circ 41' 14''$ gefunden: $\varepsilon_H - \varepsilon_B = 1^\circ 33' 39''$, einen Wert, welcher mit dem Blockschen bis auf $6''$ übereinstimmt¹⁾. Bei Block ($P = 30^\circ$, $e_0 = 46^\circ 18' 47''$) heißt es sehr umständlich:

$$D_b^c + D_c^d + D_d^e + D_e^f + D_f^g + D_g^h = D_b^h = 3' 57'' + 11' 15'' + 14' 32'' + 13' 43'' + 26' 21'' + 23' 45'' = 1^\circ 33' 33''.$$

Schließlich möchte ich nochmals im Anschluß an obige Formel (2) von Helmholtz daran erinnern, daß die Zerstreuungsfunktion von Erfle [III, 308]²⁾ in der speziellen Form

$$\psi_e = \sin \alpha \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha - \cos(2\alpha)} + \sqrt{n^2 - 1} \cdot \sin(2\alpha)} \quad (10)$$

unabhängig von mir für den Fall des streifenden Eintritts benutzt worden ist, um den gleichzeitigen streifenden Ein- und Austritt zu behandeln.

Zu den Berechnungen im Falle des Zerstreuungsminimums, sei es mit den Erfleschen Näherungsformeln, sei es durch die geschlossene Form des Integrals über die Zerstreuungsfunktion, ist die Ermittlung des Einfallswinkels oder Brechungswinkels für das Minimum der Dispersion notwendig. Ich habe infolge der Erfleschen Einwände gezeigt — was ich früher als selbstverständlich angesehen hatte —, daß es Maxima und Minima der Dispersion nur für solche Einfallsstrahlen geben kann, die durch das Einfallslot von der brechenden Kante des Prismas getrennt werden³⁾. Die Lösungen der kubischen Gleichung

$$16 (\sin^2 \varepsilon)^3 - 16 a (\sin^2 \varepsilon)^2 + 4 b \sin^2 \varepsilon = c, \quad (11)$$

$$\text{wo } a = 2n^2 - 1 - (n^2 - 2) \cos^2 \varphi,$$

$$b = (2n^2 - 1)^2 - 3n^2(n^2 - 2) \cos^2 \varphi,$$

$$c = 4n^6 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi),$$

sind also nur brauchbar, sofern sie positive ε -Werte ergeben. Dies scheint Erfle übersehen zu haben, denn er kommt immer wieder auf die Zweideutigkeit des Vorzeichens von $\sin \varepsilon$ zurück. Hiernach ist die Frage⁴⁾, ob $\varepsilon = -47^\circ 37' 58''$ möglich sei, hinfällig. Aber

¹⁾ Block, a. a. O., S. 44 und Opitz II, 249. Praktisch ist natürlich diese Differenz ohne Bedeutung. Aber Block unterscheidet partielle und Totaldispersion.

²⁾ Diese Formel ist genau dieselbe, wie die Helmholtzsche und die meinige für $\varepsilon = 90^\circ$. In bezug auf die Herleitung der letzteren vergleiche man Erfle V, 58 mit Opitz I, 310.

³⁾ Opitz IV, 245.

⁴⁾ Erfle III, 287.

wird die Erflesche Diskussion zugelassen, so ist zu bemerken, daß sie nicht vollständig durchgeführt worden ist, da ein negativer Wert von ε die Gleichung $\sin \varepsilon = n \sin \frac{\varphi}{2}$ für einen negativen Wert φ wohl befriedigen könnte. Es mag aber dahingestellt bleiben, ob dieser Fall hier zu einem passenden Ergebnis führen würde¹⁾. Die ganze Diskussion müßte nach Erfle als gegenstandslos bezeichnet werden, da er ja selbst die Unmöglichkeit des Wertes $\varphi = +48^\circ 53' 42''$ für den vorliegenden Zweck nachgewiesen hat.

Die Berechnung des Brechungswinkels, nicht des Einfallswinkels, geschieht bei Erfle mit Hilfe derselben Gleichung, welche wir bei Heath-Kanthack vorgefunden und oben mit (4) bezeichnet haben. Nun sagt Erfle (III, 297):

„Es ist überhaupt vorteilhaft und zwecks sicherer Rechnung empfehlenswert, entweder Gleichung (12) oder Gleichung (14) zur Berechnung von i'_1 zu benutzen, und nicht eine kubische Gleichung. Beispielsweise folgt im Anschluß an (12) mit (2):

$$\operatorname{tg}(i'_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - 2i'_1)}{n^2 - 1}.$$

Nachdem dann Erfle die approximative Lösung vollzogen hat, bemerkt er:

„Es ist somit bewiesen, daß die Anwendung einer kubischen Gleichung... überflüssig ist, da die Gleichung (12) viel schneller zu lösen ist, ...“

Jetzt heißt es weiterhin:

„Trotz der vorherigen Bemerkungen über die kubischen Gleichungen will ich noch eine kubische Gleichung für $\operatorname{tg} i'_1$ aufstellen, da sie schließlich auch zu einer quadratischen Gleichung für den kritischen Prismenwinkel A führt²⁾.“

Hiernach erscheint meine Bemerkung: „welche doch sicherlich in Beziehung auf $\operatorname{tg} i'_1$ vom dritten Grade ist“ für die Gleichung wohl am Platze; denn den Unterschied zwischen einer Gleichung, welche eine kubische ist, und einer, welche zu einer kubischen führt, wird

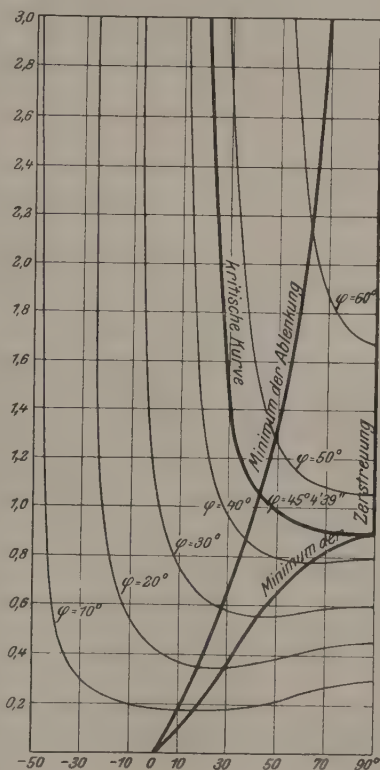
¹⁾ Nach Erfles Bestimmungen (III, 281) sind negative Prismenwinkel denkbar; und es ist doch $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$.

²⁾ Erfle (V, 64, Fußnote 1) meint, er hätte in der Formel für $\cos^2 A$ unter der Quadratwurzel den Faktor $(5n^2 - 4 - n^4)^3$ absondern müssen. Er hätte in der Gleichung (47) schon $9 - 12n^2 + 4n^2 = (3 - 2n)^2$ setzen können, dann wäre vielleicht der unübersichtliche Radikand nicht entstanden. Es zeigt sich hier wieder der Vorzug meiner kürzeren Berechnung des kritischen Prismenwinkels. — Der Sperrdruck befindet sich im Original nicht.

man schwerlich bestehen lassen können, ebensowenig wie man behaupten könnte, daß eine kubische Gleichung durch Anwendung einer approximativen Lösung keine kubische Gleichung mehr wäre. Übrigens besteht zwischen den Gleichungen, welche Ditscheiner (3) und Erfle (4) aufgestellt haben, nur der Unterschied, daß erstere für i_2 , letztere für i'_1 aufgestellt ist; beide fließen aus derselben Quelle, nämlich der Differentialformel. Meine oben genannte Gleichung (11) liefert direkt den Einfallswinkel, den Erfle und Ditscheiner also noch aus i_2 und i'_1 berechnen mußten, denn der Einfallswinkel wird gebraucht, um praktisch die Stellung des Prismas — etwa auf dem Spektrometer — für das Dispersionsminimum festlegen zu können¹⁾.

Die eingangs angeführte Stelle aus der Physiologischen Optik von Helmholtz enthält ein Programm, dem ich mich von anderer Seite her angenähert habe²⁾. Ich habe gezeigt, wie die Dispersion sich ändert, wenn das Prisma gedreht wird, und insbesondere, wie die Stellungen geringster Zerstreuung und geringster Ablenkung dabei durchlaufen werden³⁾. Diese Änderungen ließen sich meines Erachtens in bezug auf die Minimalstellungen besser durch die graphische Darstellung der Zerstreuungsfunktion als durch diejenige der Dispersion selbst beurteilen.

Wenn sich nun auch die Abhängigkeit der Minimalstellungen von dem Einfallswinkel bei gegebenem Material graphisch dar-



¹⁾ Erfle III, 299, Formel 38 zum Vergleich. Es muß außerdem gesagt werden, daß Erfles Näherungsformeln nur für beschränkte Werte von n gelten.

²⁾ Opitz I, 307—310.

³⁾ Opitz II, 248.

stellen ließ, so läßt sich zurzeit in betreff des Zerstreuungsmimums in einfacher Weise die betreffende Funktion analytisch noch nicht angeben. Für die Hauptstellung der Prismen von verschiedenen brechenden Winkeln kann man in der Tat den Verlauf der Zerstreuungsfunktion in einfachster Weise behandeln. Wir haben gesehen, daß beim symmetrischen Durchgange der Strahlen (ε_m sei der Einfallswinkel) die genannte Funktion durch den Ausdruck¹⁾

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (12)$$

wiedergegeben wird. Da nun hierbei $\sin \varepsilon_m = n \sin \frac{\varphi}{2}$ ist, so folgt

$$\pi(\varepsilon_m; n, \varphi) = \frac{2}{n} \operatorname{tg} \varepsilon_m \quad (13)$$

Zusammenstellung von Bezeichnungen verschiedener Autoren, das Prisma betreffend.

	Prismen- winkel	Einfalls- und Brechungswinkel im Verlaufe eines Strahles				Brechungs- exponent	Zerstreu- ungs- funktion
v. Helmholtz . . .	γ	ε	ε_1	η_1	η	n	$d\eta/dn$
Heath-Kanthack . .	α	i	i'	i_1'	i_1'	n	$\partial i_1 / \partial n$
Czapski	α	i	r	r'	i'	n	—
Erfle	α, A	i_1	i_1'	$\pm i_2$	$\pm i_2'$	$n; N$	ψ, ψ_e
Block	P_1	$90^\circ - e_0$	$90^\circ - b_1$	$90^\circ - e_1$	$90^\circ - b_2$	n_1	$D_\lambda^2 + a_\lambda$
Mousson	c	e	b	e'	b'	n	$\delta a / \delta n$
Kohlrausch	φ	α	β	—	—	n	—
Wiedemann-Ebert	g	i	r	r'	i'	n	—
Opitz	$\varphi, \bar{\varphi}$	ε	β	β_1	ε_1	$n; n_1, n_2$	$\pi(\varepsilon); \pi(n; \varepsilon, \varphi)$
Kayser	γ	ε_1	β_1	ε_2	β_2	n	—
Warburg	φ	i_1	i_2	i_2'	i_1'	—	—
Lommel-König . . .	—	i	r	r'	i'	—	—
Riecke	φ	α	β	α'	β'	—	—
L. Lorenz	p	i	i_1	i_1'	i'	—	—
Mach	A	α	β	—	—	—	—
Wüllner	α	i	r	r'	i'	n	—
Müller-Pouillet-	} ϱ	α	β	β'	α'	n_{ab}	$d\delta/dn$
Lummer		α	β	β'	α'	n	$d\omega/dn$
Gleichen	σ	α	β	β'	α'	n	$d\omega/dn$

¹⁾ Opitz II, 243. — Die Berechnung der Dispersion bei endlichen Wellenlängendifferenzen kann natürlich nach dieser Formel nicht geschehen, da φ eine Funktion von n ist: $\sin \varphi/2 = 1/n$. Formel (6) ist hier allein anwendbar und ergibt z. B. für $n_2 = 1,818597$ und $n_1 = 1,769702$: $\Delta \varepsilon_1 = 18^\circ 54' 54''$. Bei Benutzung von Formel (12) würde ein zu großer Wert erhalten werden, da φ mit abnehmendem n wächst.

als Gleichung für die Zerstreuungskurve kleinster Ablenkung. In vorstehender Figur ist über den verschiedenen Zerstreuungskurven die gedachte Kurve eingetragen worden¹⁾. Die Kurve, welche die Dispersionsminima festlegt, konnte aber wie früher nur dadurch hergestellt werden, daß bei gegebenem n ($n_E = 1,785254$) für verschiedene Werte des brechenden Winkels φ die Einfallswinkel ε aus Gleichung (11) berechnet wurden, um dann die Größe der Zerstreuungsfunktion zu bestimmen. Erst bei genauer Kenntnis dieser Abhängigkeit in analytischer Form würde das vorliegende Problem als erledigt zu betrachten sein.

Zusammenfassung.

1. H. v. Helmholtz hat schon im Jahre 1887 die Zerstreuungsfunktion für den streifenden Austritt in einer Form aufgestellt, welche als besonderer Fall der Opitzschen Funktion anzusehen ist.

2. Die kubischen Gleichungen, welche die Lage des Zerstreuungsminimums bestimmen, haben nach Heath-Kanthack ihren Ursprung in der Differentialformel, welche der Analyse zugrunde liegt. Die Opitzsche Gleichung gibt unmittelbar den Einfallswinkel, während Ditscheiner und Erfle den Einfallswinkel an der zweiten, beziehlich den Brechungswinkel an der ersten Prismenfläche berechnen.

3. Die Anwendung des Integrals über die Zerstreuungsfunktion ist zur Bestimmung der Totaldispersion bequemer als die Blocksehe Summation der partiellen Dispersionen. Die Erfleschen Näherungsformeln haben nur beschränkte Gültigkeitsbereiche.

4. Die Erflesche Kritik an der zweiten Opitzschen Arbeit ist nur in Beziehung auf den kritischen Prismenwinkel berechtigt, erschöpft die Sache aber nicht.

5. In der auf möglichst kurzem Wege von Opitz abgeleiteten Formel für den kritischen Prismenwinkel soll nur berücksichtigt

¹⁾ Die von Erfle (V, 59) angegebenen Zahlenwerte sind hierbei benutzt worden, denn es hat sich herausgestellt, daß ich schon 1915 (II, 247) meinen Tabellen fälschlich andere Werte entnommen hatte. Übrigens hat Erfle in seiner neuesten Figur die beiden von mir schon 1915 eingetragenen Minimalkurven für die Dispersion angebracht. — Es ist in gewissem Sinne richtig, zu sagen, daß, wenn φ durch die Beziehung $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{n}$ gegeben ist, Minimum der Dispersion und Minimum der Ablenkung zusammenfallen.

werden, daß in den meisten Fällen der Brechungsexponent Werte hat, die kleiner als 2 sind. Sonst ist die Formel dieselbe wie die Erflesche.

6. Punkt 3 der Zusammenfassung in Erfles zweiter Arbeit hebt einen Fehler in Punkt 2 der ersten Arbeit auf, betreffend das Zerstreuungsminimum bei streifendem Eintritt.

7. Die Zerstreuungskurve für die Minima der Ablenkung wird durch die Tangensfunktion gegeben. Die Kurve für die Dispersionsminima läßt sich zurzeit analytisch in einfacher Form noch nicht bestimmen.

Berlin, im Oktober 1922.

Berichtigung

zu der Arbeit von E. Fues, Die Berechnung wasserstoffunähnlicher Spektren aus Zentralbewegungen der Elektronen II, diese ZS. **12**, 1—12, 1922.

In der Berechnung des prozentischen Fehlers der Terme ist dem Verfasser ein Fehler untergelaufen. Wegen des quadratischen Nenners in $T = \frac{R}{n_{\text{eff}}^2}$ ruft eine Abweichung von p Prozenten der effektiven Quantenzahl eine solche von $2p$ Prozenten beim Term hervor. Die Genauigkeit, mit der das Natriumspektrum in dieser Arbeit berechnet ist, beträgt also nicht 3, sondern 6 Prozent.

Über einige Wirkungen von Strahlen. II.

Von Marietta Blau und Kamillo Altenburger in Frankfurt a. M.

(Mitteilung aus dem Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin.)

Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 2. November 1922.)

Dessauer hat in seinem Buche „Das Problem der Dosierung und der Strahlenwirkung“ (Steinkopff, Dresden) und in der Zeitschrift für Physik eine neue Theorie über einige Wirkungsweisen der Röntgenstrahlen dargelegt. Nach dieser Theorie erfolgt der Energieabbau, der über die kinetische Energie des Elektrons führt, in Absorptionszentren, deren Lage durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronenbahnen gegeben ist. Durch die Konzentration der Energie in diesen Absorptionszentren (Molekülkomplexen) kommt es zur Bildung der sogenannten Punktwärmen. Ähnliche Gedankengänge auf photochemischem Gebiet finden sich in den Abhandlungen von Warburg in den Naturwissenschaften; hier handelt es sich um die Deutung des Einsteinschen photochemischen Äquivalentgesetzes. Warburg kommt zur Ansicht, daß die photochemischen Vorgänge bei Strahlenabsorption wahrscheinlich nicht den Weg über die Elektronen gehen. Die Theorie der Punktwärme hingegen nimmt den Weg über das Elektron an und verlegt die eigentliche Wirkung in die bei der sofortigen Rekombination notwendig auftretenden kinetischen Vorgänge zunächst sehr kleiner Komplexe von Teilchen¹⁾. Die Voraussetzung dieser Theorie ist, daß die in Frage kommenden Molekülkomplexe von einer solchen Größenordnung sind, daß sie durch die in ihnen auftretende Energiesteigerung wirksam beeinflusst werden können.

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur: In den Begriff der Punktwärme kann man auch die Energiemenge einbeziehen, welche plötzlich frei wird, wenn ein angeregtes Molekül oder Atom strahlenlos in den unerregten Zustand zurückfällt, ein Fall, wie er namentlich bei Stößen zweiter Art zwischen Elektronen und Atomen und insbesondere auch bei der Dissoziation von Molekülen durch angeregte Atome gegeben ist; denn auch dabei bleibt zunächst die auftretende Energiemenge nur auf die allernächste Umgebung der Energiequelle beschränkt. Besonders der letztere Fall der Dissoziation, wie er in dieser Zeitschrift **11**, 101, 1922 von Cario und Franck für Wasserstoffmoleküle behandelt wurde, läßt sich an Hand der Punktwärmehypothese deuten und es erscheint auch der qualitative Zusammenhang zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und Druck für den dort verwendeten Bereich von Drucken plausibel.

Im folgenden soll ein mathematischer Beitrag zu dieser Theorie gegeben und ihre praktische Anwendung besprochen werden:

Die Raumeinheit einer Wirkungszone, die wir uns von einer bestimmten Zahl (m_0) von Körperchen bzw. Molekülkomplexen gleichmäßig besetzt denken, werde von monochromatischer Röntgenstrahlung getroffen. Nach einer bestimmten Zeit t möge die Bestrahlung abgebrochen werden. Es werden dann nach der Auffassung der neuen Theorie (die in der Biologie mit experimentellen Ergebnissen z. B. von Caspari und Wood übereinstimmt) in der Raumeinheit Körperchen vorhanden sein, die auch nach sehr langer Bestrahlung noch kein einziges Mal zu Trägern von Punktwärmen wurden, während andere Teilchen bereits zweimal, dreimal, allgemein n -mal wirksam getroffen sind.

Wir fragen nun nach der Zahl der Teilchen, die nach einer t Zeiteinheiten dauernden Bestrahlung noch kein einziges Mal wirksam getroffen wurden. Wie bereits Dessauer erwähnt hat, ergibt sich aus den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre, daß die Zahl der nicht getroffenen Teilchen mit der Zeit nach einem Exponentialgesetz abnehmen muß. Greifen wir nämlich einen beliebigen Zeitpunkt t heraus und betrachten wir einen unendlich benachbarten Zeitpunkt $t + dt$, so nimmt in diesem Zeitelement die Zahl der Teilchen, die noch kein einziges Mal wirksam getroffen sind, ab. Diese Abnahme ist sowohl dem Zeitzuwachs als auch der Zahl (m_r) der zur Zeit t noch nicht getroffenen Teilchen proportional und durch den Ansatz

$$d m_r = -\sigma m_r \cdot dt \quad (1)$$

gegeben. Hierin bedeutet σ den sogenannten Einwirkungskoeffizienten, der für eine gegebene Molekülarart nur von der Qualität und Quantität der einwirkenden Röntgenstrahlung abhängt. Aus diesem allgemeinen Ansatz ergibt sich die Zahl der Teilchen, die nach der Zeit t noch kein einziges Mal getroffen sind, unter der Annahme, daß für $t = 0 \dots m_r = m_0$ ist, zu

$$m_r = m_0 e^{-\sigma t}. \quad (1a)$$

Die Zahl der Körperchen, die wenigstens einmal (also einmal und öfter) wirksam getroffen sind, erhält man aus der Gleichung

$$m_1 = m_0 - m_r = m_0 (1 - e^{-\sigma t}). \quad (2)$$

Unter diesen m_1 Molekülkomplexen sind einige einmal, andere zweimal, wieder andere (allgemein) n -mal zu Trägern von Punktwärmen geworden.

Bezeichnet man mit m_{r_1} die Zahl derjenigen Teilchen, die gerade nur ein einziges Mal wirksam getroffen sind (mit $m_{r_2} \dots m_{r_n}$ analog die der gerade zweimal bzw. n -mal getroffenen), so muß man zu ihrer Berechnung folgenden Ansatz machen:

$$d m_{r_1} = -\sigma m_{r_1} dt + \sigma m_r dt.$$

Denn einerseits verwandelt sich ein Bruchteil der m_{r_1} Teilchen (wie wir sie kurz nennen wollen) in m_{r_2} Teilchen, andererseits werden aus dem Vorrat der m_r Teilchen immer neue m_{r_1} Teilchen nachgeliefert. Dabei ist die Annahme getroffen, daß, genügend lange Bestrahlungszeit vorausgesetzt, die Umwandlung eines m_r Teilchens in ein m_{r_1} Teilchen ebenso wahrscheinlich ist, wie die eines m_{r_1} Teilchens in ein m_{r_2} Teilchen. Aus der letzten Gleichung ergibt sich nach Substitution des Wertes von m_{r_1} die Differentialgleichung:

$$\frac{d m_{r_1}}{d t} + \sigma \cdot m_{r_1} - \sigma m_0 e^{-\sigma t} = 0,$$

die durch das Integral $m_{r_1} = e^{-\sigma t} (A + B t)$ erfüllt wird. Zufolge der Anfangsbedingung für $\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ m_r = m_0 \end{array} \right\}$ muß $A = 0$ sein. m_{r_1} ergibt sich dann zu:

$$m_{r_1} = m_0 \cdot \sigma t \cdot e^{-\sigma t}. \quad (3)$$

Für unendlich lange Bestrahlung ist:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{r_1} = m_0 \cdot \sigma \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\sigma t}} = 0,$$

ein Ergebnis, das ohne weiteres einzusehen ist.

Die Zahl der Teilchen (m_2), die nach einer Bestrahlung durch t Zeiteinheiten öfter als einmal, also wenigstens zweimal getroffen sind, erhält man, wenn man von den Teilchen, die einmal und öfter als einmal getroffen sind, die nur ein einziges Mal getroffenen Teilchen subtrahiert:

$$m_2 = m_1 - m_{r_1} = m_0 - (m_r + m_{r_1}) = m_0 - m_0 e^{-\sigma t} (1 + \sigma t). \quad (4)$$

Unter diesen m_2 Teilchen befinden sich auch solche, die allgemein gerade nur n -mal getroffen sind. Wir wollen sie mit m_{r_n} bezeichnen. Ihre Zahl ist durch die nachstehende Gleichung (5) gegeben.

$$m_{r_n} = m_0 \cdot \frac{(\sigma t)^n}{n!} \cdot e^{-\sigma t}. \quad (5)$$

Es ergibt sich nämlich durch Schluß von n auf $n + 1$, analog wie im früheren Ansatz die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung der $m_{r_{n+1}}$ -Teilchen:

$$\frac{d m_{r_{n+1}}}{d t} + \sigma m_{r_{n+1}} - \frac{\sigma^{n+1}}{n!} m_0 \cdot e^{-\sigma t} \cdot t^n = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$m_{r_{n+1}} = e^{-\sigma t} (A + B \cdot t + C t^2 + \dots + P \cdot t^n + Q \cdot t^{n+1}).$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Differentialgleichung erhält man:

$$B + 2 C t + \dots + n \cdot P \cdot t^{n-1} + (n + 1) Q \cdot t^n = \frac{\sigma^{n+1}}{n!} m_0 t^n.$$

Nun muß nach den Identitätssätzen der Algebra $B = 0$, $C = 0 \dots$
 $P = 0$ und zufolge der Anfangsbedingung $\left. \begin{matrix} t = 0 \\ m_{r_{n+1}} = 0 \end{matrix} \right\}$ auch $A = 0$
 sein. Somit ist $m_{r_{n+1}}$ die Zahl der gerade $n + 1$ mal getroffenen
 Teilchen:

$$m_{r_{n+1}} = m_0 \frac{(\sigma \cdot t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{-\sigma t} \quad (6)$$

Die Zahl der Teilchen (m_{n+2}), die öfter als $n + 1$ mal, also wenigstens
 $n + 2$ mal zu Trägern von Punktwärmen geworden sind, berechnet
 sich analog nach Gleichung (4) zu 1):

$$\begin{aligned} m_{n+2} &= m_0 - (m_r + m_{r_1} + m_{r_2} + \dots + m_{r_n}) \\ &= m_0 - m_0 \cdot e^{-\sigma t} \left\{ 1 + \sigma t + \frac{(\sigma t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\sigma t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Diskussion der Resultate (1a) bis (7): In Fig. 1, Kurve I ist
 das Verhältnis $\frac{m_r}{m_0}$ in Abhängigkeit von σt (dem Produkt aus Ein-

wirkungskoeffizient und Bestrahlungsdauer)
 dargestellt. Entsprechend der Gleichung

$$\frac{m_r}{m_0} = e^{-\sigma t} \text{ haben wir eine einfache Expo-}$$

ponentialkurve. Man sieht also, daß eine un-
 endlich große Bestrahlungsdauer erforderlich
 ist, damit alle Teilchen wenigstens einmal
 beeinflusst werden: Durch experimentelle
 Untersuchungen (z. B. im Falle der biologi-
 schen Anwendung), die es gestatten, die Zahl
 der nicht beeinflussten Teilchen (Zellen) für

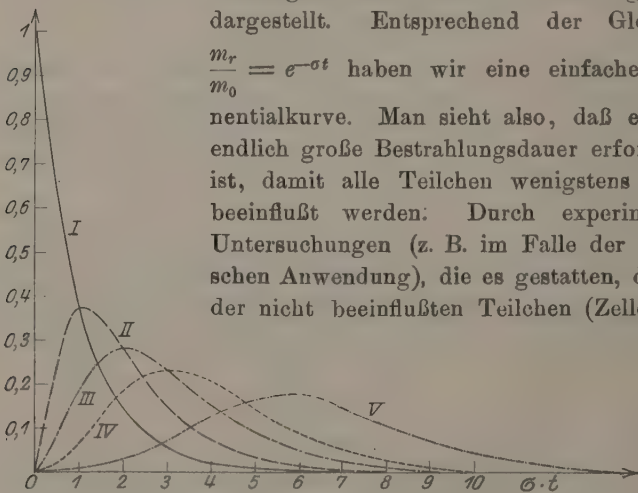


Fig. 1.

eine bestimmte Strahlenart in Abhängigkeit von der Bestrahlungs-
 dauer zu bestimmen, ist es möglich, den Wert des Beeinflussungs-

¹⁾ Zu demselben Ergebnis wie durch Gleichung (7) kommt man auch durch
 Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d m_{n+2}}{d t} = \sigma \cdot m_{r_{n+1}} = m_0 \cdot \frac{\sigma^{n+2} \cdot t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\sigma t},$$

ein Ansatz, der ohne weiteres verständlich ist.

koeffizienten σ zu finden. Denn die logarithmisch aufgetragenen Werte von $\frac{m_0}{m_r}$ in Abhängigkeit von der Bestrahlungszeit müssen eine Gerade ergeben, deren Neigung gegen die positive X-Achse ein Maß für σ darstellt.

In Kurve II, III usw. sind ferner die Werte $\frac{m_{r_1}}{m_0}$, $\frac{m_{r_2}}{m_0}$, $\frac{m_{r_3}}{m_0}$ und $\frac{m_{r_6}}{m_0}$ in Abhängigkeit von $\sigma \cdot t$ auf der Ordinatenachse aufgetragen. Diese Kurven haben den Charakter von Wahrscheinlichkeitskurven; mit zunehmenden σt wachsen die Ordinaten bis zu einem Maximum, fallen dann zunächst steil ab und nähern sich im weiteren Verlaufe asymptotisch der X-Achse. Die Lage des Maximums der $\frac{m_{r_1}}{m_0}$ -Kurve ergibt sich aus $\left(\frac{m_{r_1}}{m_0}\right)' = 0$ zu $\sigma t = 1$ und die maximale Ordinate ist gegeben durch $\left(\frac{m_{r_1}}{m_0}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$. An der Stelle $\sigma t = 1$ ist aber auch die Ordinate der $\frac{m_r}{m_0}$ -Kurve auf den e -ten Teil abgesunken. Die beiden Kurven schneiden sich also in diesem Punkte.

Allgemein hat die $\frac{m_{r_n}}{m_0}$ -Kurve zufolge

$$\left(\frac{m_{r_n}}{m_0}\right)' = 0$$

ihr Maximum an der Stelle $\sigma t = n$, der Wert des Maximums beträgt $\left(\frac{m_{r_n}}{m_0}\right)_{\max} = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$; sie schneidet in diesem Punkte die $\frac{m_{r_{n-1}}}{m_0}$ -Kurve, da ihre Ordinate für $\sigma t = n$ ebenfalls durch $\frac{n^n}{n!} e^{-n}$ gegeben ist.

Die Lage der Wendepunkte ergibt sich allgemein für die $\frac{m_{r_n}}{m_0}$ -Kurve zu $\sigma t = n \pm \sqrt[3]{n}$ (Fig. 2). Während sich die Kurven der Fig. 1 auf die Zahl der Teilchen beziehen, die gerade einmal bzw. zweimal usw. getroffen sind, stellen die Kurven der Fig. 2 die Zahl der Teilchen, die wenigstens einmal, also einmal und öfters bzw. zweimal und öfters usw. getroffen wurden, in Abhängigkeit von σt dar. Die Kurve der $\frac{m_1}{m_0}$ steigt gleich vom Nullpunkt aus steil an, alle anderen Kurven der Fig. 2 verlaufen jedoch anfangs mehr oder weniger entlang der Abszissenachse, um dann erst anzusteigen; im weiteren Verlaufe nähern

sich jedoch alle Kurven asymptotisch dem Wert 1. Allgemein liegt der Wendepunkt der $\frac{m_n}{m_0}$ -Kurven an der Stelle $\sigma t = n - 1$.

In den Fällen, wo es möglich ist, mikroskopisch die Zahl der Teilchen, die wenigstens n -mal getroffen sind, festzustellen, läßt sich

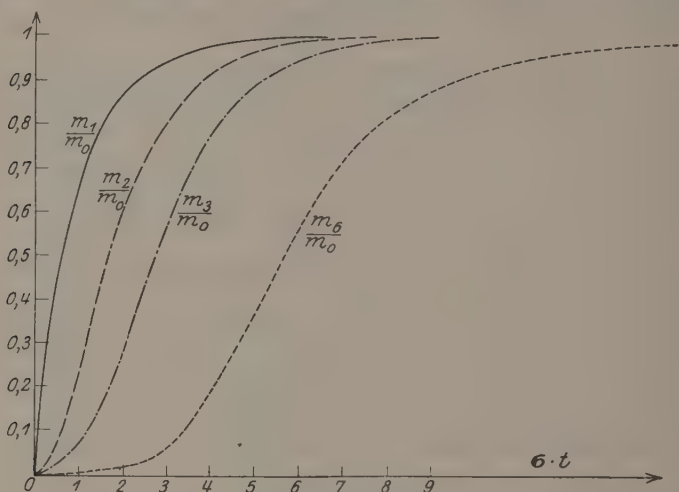


Fig. 2.

auch aus obiger Beziehung der Wert für den Beeinflussungskoeffizienten finden.

Anwendung auf Fragen der Röntgentherapie. An Hand der Kurven der Fig. 1 kann man ohne weiteres erkennen, daß nach einer bestimmten Bestrahlungsdauer einzelne Zellen bzw. Molekülkomplexe schon wiederholt zu Trägern von Punktwärmen geworden, also vielleicht entscheidend beeinflusst sind, während andere Zellen noch ganz unbeeinflusst blieben. Da es danach unmöglich ist, alle in Betracht kommenden Zellen zu beeinflussen, was ja wahrscheinlich aus biologischen Gründen auch nicht notwendig ist, muß man sich die Frage vorlegen, ob es für einen gegebenen Krankheitsfall (Sensibilität der Zellart) und für eine gegebene Strahlenart (also bei vorgegebenen m_0 und σ) vom physikalischen Standpunkt aus eine optimale Bestrahlungsdauer gibt, deren Überschreitung den Krankheitsherd nicht mehr wesentlich beeinflusst und daher nutzlos und wegen der Wirkung auf den Gesamtorganismus sogar schädlich sein kann. Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir zunächst an, daß eine Zelle für einen bestimmten Beeinflussungskoeffizienten i mal wirksam getroffen sein mußte, damit sie nicht mehr lebensfähig bzw. fortpflanzungsfähig

ist. Alle Zellen, die i mal und öfter als i mal getroffen wurden, scheiden aus, und die Zahl dieser Zellen wird den Praktiker zunächst am meisten interessieren.

Es sei in einem speziellen Fall $i = 3$, dann ergibt Fig. 2 die Kurve $\frac{m_3}{m_0}$. Für dieses spezielle Beispiel wäre es unökonomisch, die Bestrahlungsdauer über den Wert $t = \frac{7}{6}$ auszudehnen; in diesem Falle ist die Zahl der beeinflussten Zellen schon auf 96,5 Proz. aller vorhandenen Zellen gestiegen und eine Verdoppelung der Bestrahlungsdauer würde diese Zahl der nicht mehr fortpflanzungsfähigen Zellen nur um ungefähr 2 Proz. erhöhen.

Die Kurven der Fig. 1 und 2 liefern aber noch mehr als eine ungefähre Angabe der zweckmäßigsten Bestrahlungsdauer.

Angenommen, es würde der Effekt gerade proportional mit der Strahlungsbeeinflussung verlaufen: dann möge ein Teilchen durch i Stöße aus einem Anfangszustand A in einen Endzustand E gebracht werden. Es wird dann durch den ersten Stoß ein Teilchen in einen ersten Zwischenzustand Z_1 versetzt, der von dem Anfangszustand A um den Wert $\frac{1}{i}$ abweicht, also daher mit $\frac{i-1}{i}$ bezeichnet werden kann; analog kommen die weiteren Zwischenzustände durch $\frac{i-2}{i}$, $\frac{i-3}{i}$ usw. und endlich $\frac{2}{i}$ zum Ausdruck. Der Gesamtzustand der Einwirkungszone ist dann durch den nachstehenden Wert gegeben:

$$F = m_r + \frac{i-1}{i} m_{r_1} + \dots + \frac{1}{i} m_{r_{i-1}}. \quad (8)$$

Gesetzt den Fall, es würde die obige Annahme des proportionalen Verlaufs zwischen Wirkung und Strahleneinfluß auch für die biologische Anwendung Geltung haben, so wäre durch den Ausdruck (8) die Fortpflanzungsfähigkeit der bestrahlten pathologischen Zone gegeben. Im obigen Beispiel für $i = 3$ wären dann in dem Ausdruck für F die dem Wert $\sigma t = 7$ entsprechenden Größen von m_r , m_{r_1} und m_{r_2} einzusetzen. Wood findet, daß die Fortpflanzungsfähigkeit eines Karzinoms mit der Bestrahlungsdauer nach einer einfachen e -Funktion abzunehmen scheint. Danach müßten in Gleichung (8) alle Summanden bis auf das erste Glied mit m_r verschwinden. Die Fortpflanzungsfähigkeit wäre dann durch

$$F \text{ proportional } m_0 e^{-\sigma t} \quad (8a)$$

gegeben; in dieser Gleichung ist nun nicht mehr die obige einschränkende Annahme enthalten. Zuzufolge dieser Ergebnisse von Wood und auf Grund einiger anderer Anzeichen scheint die Möglichkeit nicht ausgeschlossen zu sein, daß neben anderen Anwendungen für die biologische Anwendung der Röntgenstrahlen vielleicht, dem ersten Einschlag eine besonders wichtige Bedeutung zukommt, wie sie durch Gleichung (8a), die mit der Gleichung (1a) identisch ist, gekennzeichnet wird. Es scheint somit naheliegend, daß für die Röntgentherapie die m_1 -Kurve von besonderer Wichtigkeit ist, und es würde sich demnach gemäß der Fig. 2 für die Bestrahlungsdauer der Wert $t = \frac{3}{\sigma}$ als optimale Zeit ergeben.

Durch Auswertung der Woodschen Versuche erhält man daher auch Anhaltspunkte für die Größe des Beeinflussungskoeffizienten. Jedenfalls sind aber noch eingehende Versuche unter möglichster Variation der Versuchsbedingungen erforderlich, um alle diese Fragen einwandfrei zu klären; denn durch obige Ansätze wird nur die physikalische Seite des Problems behandelt, also eine Schaffung der Grundlage für die Erforschung der biologischen Gesetzmäßigkeiten versucht.

Anwendung auf die photographische Wirkung der Röntgenstrahlen: Im folgenden soll die neue Theorie auf die photographische Wirkung der Röntgenstrahlung angewendet werden und ihre Gültigkeit durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen erprobt werden. Am geeignetsten erschienen uns hierfür die experimentellen Ergebnisse Glockers, die in seiner Arbeit „Experimentelle Untersuchungen über die physikalischen Grundlagen der Röntgendiagnostik“ veröffentlicht sind¹⁾. Unabhängig von allen bisher zur Erklärung der Schwärzung verwendeten Theorien soll nur die eine Annahme getroffen werden, daß ein Silberbromidkörnchen (ein Molekülkomplex), welches ein oder mehrere Male (allgemein i -mal) wirksam von Röntgenstrahlen getroffen ist, so beeinflusst wird, daß bei der darauf folgenden Entwicklung das Silber ausgefällt wird, das Körnchen also geschwärzt erscheint. Die Schwärzung der photographischen Platte muß demnach der Zahl der mindestens i -mal getroffenen Körnchen proportional sein, und die Kurven der Fig. 2 müssen den Charakter von Schwärzungskurven haben. Glocker fand in seiner oben zitierten Arbeit, daß Röntgenstrahlung aller Wellenlängen auch nach der kürzesten Belichtungsdauer eine von Null verschiedene Schwärzung hervorruft; die Schwärzungskurven für Röntgenstrahlen

¹⁾ 29, Heft 1, März 1922.

haben im Gegensatz zu denen des Lichtes im Koordinatenursprung eine Tangente, deren Winkel mit der positiven x -Achse größer als Null ist (Fig. 3). Die Untersuchungen, die mit homogener Röntgenstrahlung durchgeführt wurden, ergaben, daß der Charakter der Schwärzungskurve für alle Wellenlängen der Röntgenstrahlung erhalten bleibt.

Aus Fig. 2 kann man erkennen, daß nur die Kurve der $\frac{m_1}{m_{\text{II}}}$ die Bedingung $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)'_{\sigma t=0} > 0$ erfüllt.

Wir müssen daraus schließen, daß ein einziger Einschlag in das Bromsilberkörnchen genügt, damit es bei der darauf folgenden Entwicklung geschwärzt wird. Demnach müßten die Werte m_1/m_0 , in

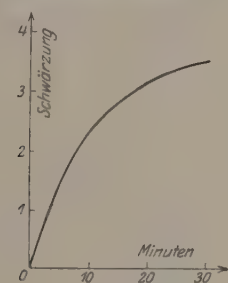


Fig. 3.

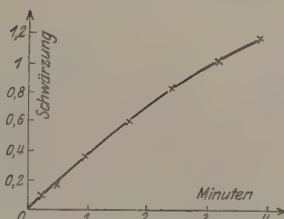


Fig. 4.

Abhängigkeit von der Expositionszeit aufgetragen, die theoretische Schwärzungskurve für Röntgenstrahlen ergeben; zu diesem Zwecke ist es nötig, einen Anhaltspunkt für die Größe des Beeinflussungskoeffizienten zu gewinnen, was durch Vergleich mit experimentellen Schwärzungskurven möglich ist. Man muß dabei allerdings berücksichtigen, daß, wie auch Glocker und Schlechter gefunden haben, der Verlauf der Schwärzungskurve weitgehend vom Entwicklungsverfahren (Entwicklungsdauer, Temperatur, Konzentration) abhängig ist. Ein langsam arbeitender Entwickler dringt vielleicht nur in die obersten Schichten der Emulsion ein und wird nur dort die durch das Röntgenlicht beeinflussten Silberbromidkörnchen bzw. Molekülkomplexe schwärzen; hingegen werden die beeinflussten Teilchen, die in tieferen Schichten liegen, für die Schwärzung gar nicht ausgenutzt; die Schwärzungskurve wird dadurch scheinbar verflacht. Wird die Entwicklungsdauer verlängert oder ein schneller arbeitender Entwickler verwendet, so werden immer mehr und mehr der getroffenen Teilchen wirklich erfaßt. Eine experimentelle Schwärzungskurve, die mit einem Rapidentwickler behandelt oder genügend lange entwickelt ist, muß

der theoretischen Schwärzungskurve am nächsten kommen. Tatsächlich stimmt die mit Methol-Hydrochinonentwickler behandelte Schwärzungskurve¹⁾ sehr gut mit der theoretisch gefundenen überein. In Fig. 4 ist die ausgezogene Kurve berechnet; die eingezeichneten Punkte sind die von Glocker experimentell gefundenen Werte. Der Beeinflussungskoeffizient ist in diesem speziellen Falle $\sigma = 0,138$.

Allerdings ist zu bemerken, daß eine solch gute Übereinstimmung wie im vorliegenden Falle nur im Gebiet kleiner und mittlerer Schwärzung gefunden wurde; während für sehr große Schwärzungen und im Gebiete der Solarisation Abweichungen eintraten. Eine Erklärungsmöglichkeit für diese Abweichungen scheint in der Annahme zu liegen, daß nach vielfachem Auftreten der Punktwärme in demselben Korn resp. Molekülkomplex vielleicht ein Übergang von dem Zustand *B*

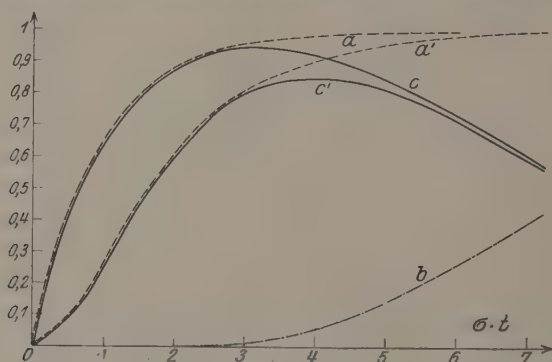


Fig. 5.

in einen ersten oder dritten Zustand *A* bzw. *C* zustande kommt; wir können uns diesen Vorgang etwa in folgender Weise denken: Durch die ersten Stöße wird das Gefüge der einzelnen Molekülkomplexe im Korn gelockert. Folgen die Stöße immer häufiger aufeinander, so treten die in ihrem Molekülverband gelockerten Atome vielleicht in gegenseitige Reaktion ungefähr so, daß z. B. ein Silberteilchen in die Wirkungssphäre eines anderen Bromteilchens innerhalb desselben Korn gelangt und durch dieses wieder gebunden wird. Wir hätten dann von der Zahl der Teilchen, die mindestens einmal getroffen sind, die der mindestens *i* mal getroffenen abziehen. In Fig. 5 ist diese Berechnung für den Wert $i = 8$ durchgeführt. *a* und *a'* sind die Kurven der mindestens einmal bzw. zweimal getroffenen, *b* die der mindestens achtmal getroffenen Körnchen bzw. Teilchen, *c* bzw. *c'*

¹⁾ Glocker, l. c., S. 109, Fig. 6.

ist die Differenzenkurve. Bis $\sigma t = 3$ verlaufen die Kurven a und c bzw. a' und c' nebeneinander und weichen dann voneinander ab; für $\sigma t = 3$ biegt die Kurve c bzw. c' nach unten ab, wie es dem Phänomen der Solarisation entsprechen würde. Durch diese Vorstellung würde also der generelle Charakter der Solarisationskurven erklärt.

Es soll schließlich noch eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie erwähnt werden. Glocker hat experimentell für Röntgenstrahlen die Gültigkeit des Bunsenschen Gesetzes erwiesen. Schon eingangs wurde bemerkt, daß der Beeinflussungskoeffizient von der Molekülart bzw. Zellart, von der Qualität und von der Intensität der Strahlung abhängt. Die einfachste und wahrscheinlichste Annahme ist, σ für eine bestimmte Strahlenart und eine gegebene absorbierende Substanz proportional der Intensität zu setzen. Da die Schwärzung für Röntgenstrahlen durch

$$S \text{ proportional } \frac{m_1}{m_0} = 1 - e^{-\sigma t} \quad (9)$$

gegeben ist, erkennt man dann, daß das Produkt aus Intensität mal Zeit für eine bestimmte Schwärzung eine konstante Größe ist, daß also das Bunsensche Gesetz erfüllt ist. Für kleine Schwärzungen ist das Produkt aus Intensität mal Zeit gleich der Schwärzung selbst. Auch das ergibt sich aus Gleichung (9) ohne weiteres, da S für kleine Werte von σt proportional σt wird, wie man leicht durch Reihenentwicklung erkennen kann.

Anwendung auf die photographischen Wirkungen des sichtbaren Lichtes: Viel komplizierter und weniger übersichtlich als im Gebiet der Röntgenstrahlen liegen die Verhältnisse für die photographische Wirkung des sichtbaren Lichtes. Die Schwärzungskurven für sichtbares Licht weisen, wie schon erwähnt, den sogenannten Schwellenwert auf. Es ist also eine gewisse Mindestbelichtung nötig, um überhaupt eine Schwärzung zu erhalten. Glocker schließt daraus, daß die Wirkung des sichtbaren Lichtes auf die photographische Emulsion eine prinzipiell andere ist als die für Röntgenstrahlen. Man kann jedoch den Schwellenwert einfach aus der Annahme erklären, daß ein Silberbromidkorn bzw. ein Molekülkomplex von Lichtstrahlen öfter als einmal getroffen werden muß, um wirksam beeinflusst zu werden, etwa so, daß es durch den ersten Stoß in einen Zustand A , dann durch den zweiten in einen Zustand B und schließlich durch einen i -ten in einen durch die Schwärzbarkeit charakterisierten Endzustand gebracht wird. Die Zustände A, B usw., die wir uns als eine Lockerung im Molekülverband vorstellen können, sind jedenfalls

makroskopisch nicht wahrnehmbar. Für die Berechtigung dieser Annahme spricht die Tatsache, daß durch Vorbelichtung eine Empfindlichkeitssteigerung der Emulsion erreicht werden kann. Es würde sich demnach nur um quantitative Unterschiede handeln, die durch die verschiedene Energie der Röntgen- und Lichtstrahlen bedingt ist. Die Schwärzung für sichtbares Licht ist demnach der Zahl der i -mal und öfter als i -mal getroffenen Teilchen proportional, also durch

$$S \text{ proportional } \frac{m_i}{m_0} = 1 - e^{-\sigma t} \left\{ 1 + \sigma t + \frac{(\sigma t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\sigma t)^{i-1}}{(i-1)!} \right\} \quad (9a)$$

gegeben. Zur Auswertung der Schwärzungskurve hat man jetzt zwei Unbekannte σ und i , die für ein und dieselbe Emulsion mit der Wellenlänge des Lichtes variieren, zu bestimmen. Je größer die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes wird, um so kleiner werden die durch einen einzelnen Stoß hervorgerufenen Veränderungen; für ultrarotes Licht muß die Einwirkung auf das Bromsilbermolekül schließlich ganz verschwinden, da man auch nach längsten Belichtungen keine Schwärzung erhält¹⁾.

Die Wirkung der Röntgenstrahlung unterscheidet sich aber noch in einer anderen Hinsicht von der des sichtbaren Lichtes. Für sichtbares Licht ist das Bunsensche Gesetz $J \cdot t$ für ein und dieselbe Schwärzung = const nicht mehr gültig, sondern bei Verdoppelung der Intensität muß die Expositionszeit um mehr als die Hälfte vermindert werden, damit gleiche Schwärzung erhalten wird. Nach Schwarzschild wird diese Beziehung durch $J \cdot t^p = \text{const}$ ausgedrückt, wobei $p < 1$ gilt. Um mit diesen Ergebnissen im Einklang zu bleiben, kann man annehmen, daß der Beeinflussungskoeffizient für sichtbares Licht nicht mehr der Intensität selbst proportional ist, sondern etwa durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\sigma = a \{ J - f(\mu d) \},$$

wobei a eine Konstante und $f(\mu d)$ eine Funktion der Dicke d der photographischen Schicht und des Abschwächungskoeffizienten μ in dieser Schicht bedeuten. Je weniger durchdringungsfähig die Strahlung ist, um so mehr muß der Schwarzschildsche Faktor wegen

$$[2J - f(\mu d)] \cdot t > [J - f(\mu d)] \cdot 2t$$

(z. B. bei Verdoppelung der Intensität bzw. Verdoppelung der Expositionszeit) von 1 abweichen, was auch mit experimentellen Versuchen,

¹⁾ Die Sensibilisierung photographischer Platten bewirkt primär eine erhöhte Absorption im Sensibilisator und infolgedessen sekundär eine größere freiwerdende Energiemenge, welche die Bromsilberkörner wirksam beeinflußt.

die im hiesigen Institut ausgeführt wurden, im Einklang steht¹⁾. Auch die Abhängigkeit des Schwarzschild'schen Faktors von der Schwärzung, die wiederholt beobachtet wurde, läßt sich durch Gleichung (9a) erklären. Die Intensität des Lichtes wird beim Durchgang durch die photographische Schicht geschwächt. Die Teilchen an der Oberfläche erhalten in kürzerer Zeit die Energie, die nötig ist, um sie wirksam zu beeinflussen. Man kann also annehmen, daß nach einer kurzzeitigen Belichtung hauptsächlich mehr an der Oberfläche liegende Teilchen wirksam getroffen sind. Erst bei längerer Belichtung werden die tiefer unten liegenden Teilchen beeinflusst; für diese wird in der Beziehung

$$\sigma = a \{J - f(\mu d)\}$$

der zweite Faktor größer und dementsprechend in der Gleichung $J \cdot t^p = \text{const} \dots p$ kleiner. Für Röntgenstrahlen wird $f(\mu d)$ hinreichend klein, um für die in Frage kommenden sehr kleinen Dicken der Schichten vernachlässigt zu werden.

Eine durch sichtbares Licht geschwärzte Platte weist nach der Richtung der Durchsicht ein verschiedenes Aussehen auf, während eine durch Röntgenstrahlung geschwärzte Platte bei hinreichender Entwicklung diesen Unterschied nicht zeigt.

Um σ , $f(\mu d)$ und i (Zahl der Stöße, die zu einer wirksamen Beeinflussung nötig sind) in Abhängigkeit von der Wellenlänge zu bestimmen, muß mit monochromatischem Licht und wegen der Abhängigkeit der Schwärzungskurve von der Schichtdicke der Emulsion mit Platten verschiedener Dicke gearbeitet werden.

Nach Fertigstellung der Arbeit fanden wir im Phil. Mag. vom August 1922 eine experimentelle und theoretische Untersuchung von Toy über die durch sichtbares Licht hervorgerufene Schwärzung der photographischen Platte. Toy geht von der Annahme aus, daß die Schwärzung durch eigenartige Teilchen (nuclei), die sich im Silberbromidkorn vorfinden, bedingt ist. Auf die Natur dieser Teilchen geht der Verf. nicht näher ein. Er setzt nur voraus, daß diese Teilchen nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit über die einzelnen Silberbromidkörner örtlich verteilt sind. Jedes Korn, das mindestens ein solches Teilchen enthält, kann durch die Belichtung und die darauf folgende Entwicklung geschwärzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Korn i solcher Teilchen enthält, ergibt sich nach Toy zu

$$P_i = (N_0)^i \frac{e^{-N_0}}{i!},$$

¹⁾ Die Untersuchungsergebnisse Schells [Ann. d. Phys. (4) **35**, 695, 1911], der eine Unabhängigkeit des Schwarzschild'schen Faktors von der Wellenlänge findet, sind sicherlich durch sein Entwicklungsverfahren begründet.

wobei N_0 als die mittlere Zahl der in einem Körnchen enthaltenen nuclei definiert ist und einen Faktor darstellt, der für eine gegebene Expositionszeit mit der Intensität des Lichtes variiert.

Vergleichen wir diese Gleichung mit unserer obigen Gleichung (5), so findet man eine vollkommene formale Übereinstimmung, wenn man N_0 durch σt ersetzt. Denn es entspricht in den Ansätzen von Toy gemäß seiner örtlichen Verteilung der Wahrscheinlichkeit, daß in einem Korn ein nucleus beeinflußt wird, in unserer obigen Überlegung gemäß der zeitlichen wahrscheinlichen Verteilung die Wahrscheinlichkeit, daß in t Sekunden in einem vorher ungetroffenen Teilchen eine Punktwärme auftritt. Die experimentellen Ergebnisse Toys können dann somit zufolge dieser äquivalenten Beziehungen geradezu als Bestätigung dieser Theorie angesehen werden. Doch scheint uns die Punktwärmethorie, welche die Ursache für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Punktwärmen in das von außen wirkende Strahlenagens verlegt, eine viel größere Berechtigung zu haben, zumal gegen die Theorie von Toy hauptsächlich folgende Tatsache spricht: Die auf die verschiedene Sensibilität begründete Wahrscheinlichkeitsverteilung der nuclei setzt nämlich für die Gültigkeit seiner Resultate voraus, daß sämtliche nuclei dem gleichen Strahlenangriff ausgesetzt sind, ein Umstand, der aber nach dem Standpunkte der heutigen Physik als unannehmbar erscheint. In der Punktwärmethorie wird aber dem quantenhaften Charakter der Absorption Rechnung getragen und es gelingt außerdem eine Erklärung für den Schwellenwert des Lichtes, welchen Toy zugleich mit der Erhöhung der Empfindlichkeit durch Vorbelichtung nicht zu deuten vermag.

Wenn die Punktwärmethorie, soweit sie bis jetzt dargestellt wurde, noch nicht die bei den photochemischen Reaktionen im Atom selbst auftretenden Erscheinungen genauer zu erklären vermag, so erscheint sie uns doch für die Photochemie als ein Fortschritt, da sie die Probleme mathematisch zu fassen gestattet. Denn die Annahme, daß diese Reaktionen wirklich von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit beherrscht sind, ist namentlich auch durch die von Pringsheim¹⁾ gefundene Abhängigkeit der photochemischen Wirkung von der Lichtkonzentration sehr naheliegend.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß man auch die Versuche von Fernau und Pauli über die Viskositätsänderung (Differenz der Reibungskoeffizienten) von Glutin durch Radiumstrahlung vom Gesichtspunkt der neuen Theorie aus betrachten kann. Die Viskositäts-

¹⁾ ZS. f. Phys. 10, 176, 1922, Heft 3.

änderung von salzfreiem Glutin, in Abhängigkeit von der Bestrahlungsdauer aufgetragen (vgl. Fig. 6), ergibt eine Kurve, die einigermaßen mit den Schwärzungskurven für sichtbares Licht vergleichbar ist.

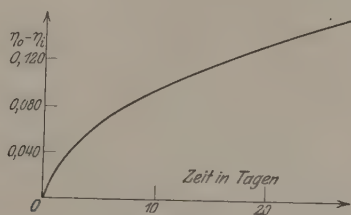


Fig. 6.

Doch liegen hier die Verhältnisse komplizierter, weil nicht ohne weiteres angenommen werden kann, daß die Viskositätsänderung der Zahl der beeinflussten Teilchen direkt proportional ist.

Zur Auswertung solcher und ähnlicher Versuche wäre erst ein Ausbau der Theorie an Hand weitgehender experimenteller Untersuchungen nötig.

Oberschwingungen in ultraroten Absorptionsspektren.

Von Clemens Schaefer und Max Thomas in Marburg (Lahn).

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1922.)

§ 1. Ganzzahlige Verhältnisse in den Schwingungszahlen ultraroter Absorptionsspektren sind schon mehrfach beobachtet worden. So stellte z. B. W. W. Coblenz¹⁾ fest, daß bei allen von ihm untersuchten Sulfaten der im Reflexionsvermögen gefundenen starken Eigenschwingung bei etwa 9μ eine im Absorptionsspektrum befindliche Bande bei etwa $4,5\mu$ als Oktave entspreche. Dasselbe hat der eine von uns (Schaefer) bei seinen gemeinschaftlich mit M. Schubert²⁾ unternommenen Messungen über das Reflexionsvermögen der Sulfate und Carbonate festgestellt (unveröffentlichte Messungen). Unter den Gasen fiel zuerst M. Mandersloot³⁾ das ganzzahlige Verhältnis der beiden von W. Burmeister⁴⁾ gemessenen Absorptionsbanden bei CO auf; es fand sich dort außer einer starken Doppelbande bei $4,60\mu$ und $4,72\mu$ (Schwerpunkt $4,67\mu$) eine sehr schwache Bande bei $2,35\mu$. Systematisch faßte das Problem sodann E. C. Kemble⁵⁾ an; er schloß aus dem Auftreten von Oberschwingungen, daß das diesen Schwingungen zugrunde liegende Kraftgesetz nicht das lineare Hookesche sei, sondern daß in der Reihenentwicklung für das Kraftgesetz auch noch quadratische Glieder zu berücksichtigen seien. G. Hettner⁶⁾ gelang es ferner, bei einer sehr genauen Messung der Absorption des Wasserdampfes nicht weniger als zwölf Ober- und Kombinationschwingungen von der allgemeinen Form

$$a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + \dots$$

festzustellen, wo die ν_1, ν_2, \dots die Eigenschwingungen bei linearem Kraftgesetz, d. h. bei unendlich kleiner Amplitude sein sollen. Sodann machten J. B. Brinsmade und E. C. Kemble⁷⁾ eine Untersuchung über Oberschwingungen von HCl und HBr; sie fanden zu der bereits von Burmeister festgelegten Grundschwingung von HCl

¹⁾ W. W. Coblenz, Investigations of infrared spectra; part IV, S. 79, 1906.

²⁾ Cl. Schaefer und M. Schubert, Ann. d. Phys. (4) **50**, 283, 1916.

³⁾ M. Mandersloot, Diss. Amsterdam 1914.

⁴⁾ E. Burmeister, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 589, 1913.

⁵⁾ E. C. Kemble, Phys. Rev. (2) **8**, 701, 1916.

⁶⁾ G. Hettner, Diss. Berlin 1918.

⁷⁾ J. B. Brinsmade und E. C. Kemble, Proc. Nat. Acad. Washington **3**, 420, 1918.

bei $3,40 \mu$ und $3,55 \mu$ (Doppelbande mit dem Schwerpunkt $3,48 \mu$) die Oktave bei $1,76 \mu$, und zu der ebenfalls von Burmeister ausgemessenen Grundschwingung von HBr bei $3,84 \mu$ und $4,01 \mu$ (Doppelbande, Schwerpunkt bei $3,93 \mu$) die Oktave bei $1,98 \mu$; dagegen gelang es ihnen nicht, höhere Oberschwingungen zu finden.

Eine Zusammenstellung aller bisher gefundenen Oberschwingungen gab Hettner¹⁾; gleichzeitig untersuchte Hettner theoretisch die Schwingungen eines aus n Atomen bestehenden Systems unter der Annahme eines asymmetrischen Kraftgesetzes zwischen den einzelnen Atomen. Diese Theorie fordert Ober- und Kombinationsschwingungen von der allgemeinen Form $a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + \dots$, wie sie schon beim Spektrum des Wasserdampfes zahlreich gefunden worden sind. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung stellte Schaefer²⁾ Betrachtungen über die Leistungsfähigkeit der klassischen Dispersionstheorie gegenüber diesen Oberschwingungen an³⁾.

Wir haben uns ganz allgemein die Aufgabe gestellt, das Material zu vermehren, indem wir sowohl bei Gasen nach höheren Oberschwingungen suchten, als auch noch analoge Messungen an festen Körpern anstellten.

§ 2. Die Versuchsanordnung war die im Ultraroten übliche. Das Spektrometer war ein Spiegelspektrometer von Schmidt u. Haensch mit Wadsworth-Einrichtung, das in der Werkstatt des Instituts mit bilateral meßbar verstellbaren Spalten versehen worden war. Die Strahlung wurde mit einem Mikroradiometer gemessen. Als Prismen wurden verwandt: von $0,8 \mu$ bis $2,8 \mu$ ein Quarzprisma mit einem brechenden Winkel von $59^\circ 58'$ und einer nutzbaren Fläche von $4,8 \times 5,0$ qcm; von $2,8 \mu$ bis 9μ ein Flußspatprisma von 60° brechendem Winkel und einer Fläche von $3,8 \times 3,8$ qcm; von 9μ bis 22μ ein Sylvinprisma von $59^\circ 56'$ und $3,2 \times 3,8$ qcm Fläche.

¹⁾ G. Hettner, ZS. f. Phys. 1, 345, 1920.

²⁾ Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. (4) 67, 407, 1922.

³⁾ In dieser Arbeit habe ich folgendes gezeigt: Wenn man die Dispersionstheorie des asymmetrisch schwingenden Oszillators im engsten Anschluß an die klassische Dispersionstheorie entwickelt, d. h. in der Schwingungsgleichung des Oszillators lediglich ein quadratisches Glied hinzufügt, so erhält man das Ergebnis, daß die Dispersionstheorie keine Rechenschaft von dem Auftreten der Oberschwingungen zu geben vermag. Dies Ergebnis wurde zugunsten der Quantentheorie gedeutet. Herr Lenz hat mich indessen freundlicherweise auf eine Möglichkeit aufmerksam gemacht, auch vom klassischen Standpunkte von den in Rede stehenden Erscheinungen Rechenschaft zu geben, indem man nämlich, anders wie in der üblichen Dispersionstheorie, noch die freien Schwingungen des asymmetrischen Oszillators in Betracht zieht. Ähnliche Bemerkungen haben mir auch die Herren Madelung und Born gemacht. Cl. Schaefer.

Zur Absperrung des Strahlenganges diente ein Klappschild, der vom Beobachtungsplatze mittels Schnurlaufs betätigt werden konnte; bis 5μ diente ein Metallschild, bis 15μ eine Glasplatte von 1 mm Dicke, von da ab eine 2 mm dicke Flußspatplatte zum Abschirmen des Strahlenganges und gleichzeitig in bekannter Weise zur Kontrolle der Reinheit des Spektrums. Bis 15μ war keine Verunreinigung nachweisbar, da Metall-, Glas-, Flußspatschild gleiche Ausschläge ergaben. Für die Absorptionsmessungen an festen Körpern war ein zweiter Klappschild in den Strahlengang eingeschaltet, an dem übereinander zwei gleich große Blenden angebracht waren, von denen die eine mit der zu untersuchenden Substanz bedeckt wurde. Bei der Messung wurde alternierend die Strahlung durch diese beiden Blenden hindurch gemessen; der Quotient beider Ausschläge lieferte direkt die Durchlässigkeit des Materials.

Für die Absorptionsmessung an Gasen wurden geeignete Absorptionsrohre, die mit Quarz- oder Flußspatplatten verschlossen waren, in den parallelen Teil des Strahlenganges eingeschaltet. Für die Messungen unter hohem Drucke diente ein Stahlrohr von 1 m Länge, das mit 8 mm dicken Quarzplatten verschlossen und mit Klingerit gedichtet war. Zur Messung des Druckes diente ein Federmanometer; das Rohr hielt bei einem Drucke von 10 Atm. noch recht gut dicht. Natürlich mußte bei Verwendung dieses schweren Rohres auf alternierende Messungen verzichtet werden. Es wurden vielmehr bei gefülltem Rohr mehrere Meßreihen durchgeführt, dann das Rohr mittels einer Wasserstrahlpumpen von dem Gas befreit und mit trockener Luft gefüllt. Und schließlich wurden dann entsprechende Meßreihen an dem mit Luft erfüllten Rohre vorgenommen. Die vortreffliche Konstanz unserer Lichtquelle (Nernststift an der 110-Voltbatterie des Instituts) erlaubte dieses Verfahren.

§ 3. Das erste Gas, an dem wir versuchten, höhere Oberschwingungen nachzuweisen, war Kohlenoxyd, gleichzeitig das erste, an dem überhaupt, wie erwähnt, Oberschwingungen erkannt worden sind. Da nach den in § 1 mitgeteilten Ergebnissen Burmeisters schon die Oktave bei $2,35\mu$ sehr schwach gegen die Grundschwingung mit dem Schwerpunkt $4,67\mu$ ist, haben wir Kohlenoxyd in dem vorhin erwähnten 1 m langen Stahlrohr, auf 10 Atm. komprimiert, untersucht; das Gas wurde einer Bombe fertig entnommen, die wir dem hiesigen anorganisch-chemischen Institut verdanken. Untersucht wurde die Spektralgegend von 1μ bis $1,9\mu$, insbesondere das Intervall von $1,45\mu$ bis $1,70\mu$, in dem die Duodezime vermutet werden mußte, in Abständen von $0,012\mu$. Die Spaltbreite betrug bei diesen Messungen

0,04 mm. Das Ergebnis zeigt die Fig. 1a. Zunächst fanden wir die beiden Wasserdampfbanden bei $1,38 \mu$ und $1,49 \mu$, die auch Hettner angibt. Außer diesen Banden fanden wir einen ausgeprägten Absorptionsstreifen bei $1,58 \mu$. Zwei weitere Messungen ergaben für das Maximum der Absorption den benachbarten Wert von $1,57 \mu$. Dieser Streifen stellt die gesuchte Duodezime des Kohlenoxyds dar. Denn wenn das Rohr nun von dem Gase befreit und trockene Luft hindurchgepreßt wurde, so fanden sich zwar die beiden Wasserdampfbanden wieder, die soeben besprochene Bande mit dem Absorptionsmaximum bei $1,57 \mu$ dagegen fehlte (Fig. 1b). Im Mittel aus unseren Werten würden wir für die Lage der Duodezime des CO die Wellenlänge $1,573 \mu$ angeben.

Folgende Bemerkung mag dazu dienen, einen ungefähren Vergleich der Intensitäten zu geben. Nach Burmeisters

Messungen ist die Intensität der Oktave etwa $\frac{1}{14}$ von der der Grundschwingung; wir fanden die Oktave ihrerseits etwa 14,3 mal so stark wie die Duodezime.

Beim Kohlenoxyd liegen also jetzt vor: die Grundschwingung bei $4,67 \mu$, die Oktave bei $2,35 \mu$, die Duodezime bei $1,573 \mu$.

Die Doppeloktave konnte mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht nachgewiesen werden.

Betrachtet man die angegebenen Wellenlängen, so erkennt man, daß die Schwingungszahlen sich durchaus nicht exakt wie die Zahlen 1:2:3 verhalten; die Abweichungen liegen deutlich außerhalb der Beobachtungsfehler. Dies fordert die genauere Theorie¹⁾ auch gar nicht; sie verlangt vielmehr, daß die Schwingungszahlen des Grundtones und der Obertöne sich verhalten wie

$$\nu_0(1-x):2\nu_0(1-2x):3\nu_0(1-3x).$$

Berechnet man nun in unserem Falle aus der Grundschwingung und der Oktave die Frequenz ν_0 und die „Verstimmung“ x , so ergibt

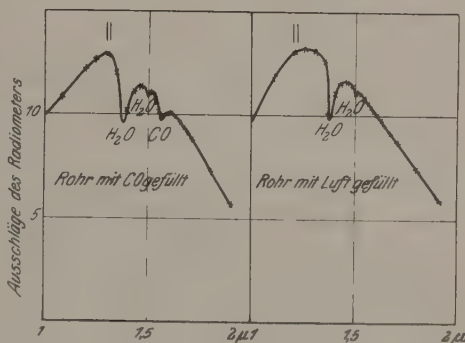


Fig. 1a.

Fig. 1b.

¹⁾ Vgl. z. B. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 589 ff

sich für die Duodezime eine Wellenlänge von $1,577 \mu$, also eine sehr gute Übereinstimmung mit dem gemessenen Werte $1,573 \mu$.

§ 4. An zweiter Stelle haben wir die analogen Untersuchungen an HCl gemacht. Die Wellenlänge des Grundtones ist nach Burmeister $3,46 \mu$, die der Oktave nach Brinsmade und Kemble $1,76 \mu$. Die Verstimmung ist also ziemlich stark; die Duodezime muß also ebenfalls ziemlich stark verschoben sein. Imes¹⁾ hat mittels Beugungsgitters sowohl Grundschwingung wie Oberschwingung in weitgehender Weise aufgelöst; aus seinen Messungen scheint hervorzugehen, daß beim HCl die Oktave relativ zum Grundton stärker ausgebildet ist als beim CO. Wir haben daher HCl beim Drucke einer Atmosphäre untersucht.

Der Chlorwasserstoff wurde hergestellt durch Hineintropfenlassen roher Salzsäure in konzentrierte Schwefelsäure; hierbei war das Einleitungsrohr bis auf den Boden des Gefäßes geführt, in dem sich die Schwefelsäure befand. Das sich unten entwickelnde Gas mußte daher gleich durch eine 30 cm hohe Schicht Schwefelsäure hindurchgehen; dann wurde es durch Chlorcalcium getrocknet und zum Schluß durch ein Kohlensäure-Äthergemisch auf -80° abgekühlt, um die letzten Reste Feuchtigkeit zu entfernen.

Untersucht wurde in dem Intervalle von $0,9 \mu$ bis $1,6 \mu$; wir fanden hier zunächst wieder die Wasserdampfbande bei $1,38 \mu$ — die schwache Wasserdampfbande bei $1,48 \mu$ ist hier nicht beobachtet, weil in dieser Gegend in zu großen Intervallen gemessen wurde —, ferner zeigte sich eine schwache Absorptionsstelle bei $1,190 \mu$ (Fig. 2a).

Diese Stelle wurde nun wiederholt in Intervallen von $0,007 \mu$ ausgemessen bei einer Spaltbreite von $0,02 \text{ mm}$. Nach wiederholtem Evakuieren des Rohres und Einlassen trockener Zimmerluft fehlte dieser Absorptionsstreifen (Fig. 2b), der also unzweifelhaft die Duodezime des HCl darstellt. Berechnet man, wie in § 3, aus Grundschwingung und Oktave die Grundfrequenz ν_0 und die Verstimmung, so ergibt sich für die theoretisch geforderte Wellenlänge der Duodezime der Wert $1,192 \mu$, also in sehr guter Übereinstimmung mit unseren Messungen.

§ 5. Von den Halogenwasserstoffen kam noch Fluorwasserstoff zur Untersuchung in Frage. Nach Imes ist die Grundschwingung eine Bjerrumsche Doppelbande mit dem Schwerpunkt bei $2,52 \mu$. Die Oktave scheint hier nicht bekannt zu sein; wenigstens gibt sie weder Imes an, noch findet sie sich in der Zusammenstellung aller

¹⁾ E. Imes, *Astrophys. Journ.* **50**, 251, 1919.

bekannten Oberschwingungen bei Hettner. Wir haben daher hier nach der Oktave gesucht.

Das Gas wurde in der üblichen Weise hergestellt und gleich aus dem Entwicklungsapparat in das 1 m lange Absorptionsrohr geleitet, das jetzt indessen nicht durch Quarzplatten, sondern durch Flußspatplatten verschlossen wurde; auch diese erwiesen sich nach dem Versuch als leicht angeätzt. Das Innere des Rohres war sorgfältig mit

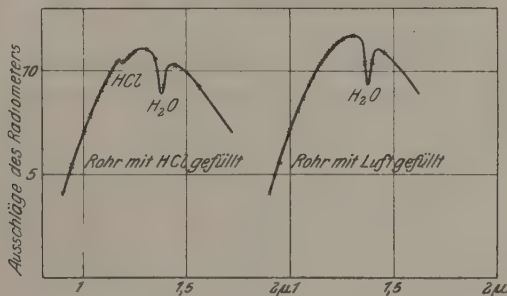


Fig. 2a.

Fig. 2 b.

Paraffin ausgekleidet worden; untersucht wurde bei Atmosphärendruck. Als Resultat der Messung erhielten wir neben der Wasserdampfbande bei $1,38 \mu$ eine zweite recht gut ausgeprägte Bande bei $1,27 \mu$. Diese verschwand, nachdem aller Fluorwasserstoff sorgfältig aus dem Rohre entfernt worden war, wie die Fig. 3a und 3b deutlich zeigen. Die

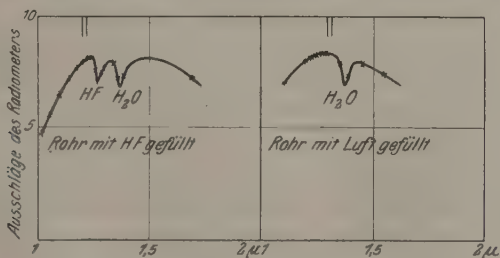


Fig. 3a.

Fig. 3b.

Oktave ist hiermit festgestellt; nach der Duodezime wurde nicht gesucht, weil sie in der ungünstigen Gegend von $0,84 \mu$ zu erwarten ist. Übrigens besteht ja wohl kein Zweifel mehr, daß sie wirklich vorhanden ist.

Bei Bromwasserstoff hatte es für uns keinen Zweck, nach der Duodezime zu suchen; diese wäre bei $1,34 \mu$ zu erwarten, liegt also in sehr großer Nähe der mehrfach erwähnten Wasserdampfbande

1,38 μ und wäre also nur durch alternierende Messungen mit Sicherheit festzustellen gewesen, auf welche wir wegen der Schwere des langen Absorptionsrohres verzichten mußten.

Die Untersuchung des Jodwasserstoffs scheiterte, weil das Gas sich trotz peinlichster Vorsicht während der Untersuchung zersetzte; daran mag es liegen, daß HJ überhaupt noch nicht im Ultraroten untersucht worden ist.

§ 6. Wir haben ferner einige Messungen an festen Körpern angestellt, bei denen mutatis mutandis dieselben Verhältnisse vorliegen wie bei Gasen, obwohl man gerade den Erscheinungen bei Festkörpern bisher relativ wenig Beachtung gewidmet zu haben scheint.

Wir gingen aus von der durch Coblenz und Schaefer und Schubert gemachten, in § 1 erwähnten Beobachtung, daß bei den Sulfaten neben der starken Reflexionsbande bei etwa 9 μ stets auch eine Bande in Absorption bei etwa 4,5 μ erscheint. Wir haben auch hier versucht, höhere Oberschwingungen nachzuweisen. Unsere ersten orientierenden Messungen machten wir an Cölestin (Sr SO_4), von dem wir zwei Platten, die eine 2,49 mm, die andere 2,32 mm dick, besaßen. Cölestin kristallisiert im rhombischen System; die beiden Platten waren orientiert geschnitten, und zwar die erste parallel (010), die zweite parallel (100). An diesen Platten sind die Messungen von Schaefer und Schubert angestellt worden. Daß sie verschieden orientiert waren, war für unsere Zwecke ein Nachteil, der allerdings insofern nicht sehr ins Gewicht fiel, als wir auf Feinheiten, wie auf Pleochroismus, vorläufig kein größeres Gewicht legten. Wir haben daher auch unbedenklich bei einem Versuche beide Platten hintereinander benutzt, um eine größere Schichtdicke zu erzielen. Das Ergebnis unserer Messungen zeigt Fig. 4, in deren unterem Teile die Reflexionskurve von Schaefer und Schubert reproduziert ist, die die starke Eigenschwingung bei etwa 9 μ zeigt (genauer zwei Schwingungen bei bzw. 8,35 μ und 9,05 μ). Im oberen Teile der Figur sieht man die Durchlässigkeit der 2,49 mm dicken Platte; sie zeigt zunächst das Absorptionsband bei etwa 4,5 (genauer läßt sich hier das Absorptionsmaximum kaum bestimmen, da zwischen 4,28 μ und 4,92 μ völlige Auslöschung eintrat, weshalb auch ein etwaiger Dichroismus verdeckt wird). Dagegen sieht man bei etwa 3 μ , d. h. in der Gegend, in der die Duodezime zu erwarten ist, ein starkes Absorptionsband, das bei genauerer Betrachtung in die beiden Maxima bei 3,02 μ und 3,24 μ zerfällt, wobei, genau wie bei 9 μ , das langwelligere Maximum das intensivere ist. Es ist also kein Zweifel daran möglich, daß wir es hier mit der Duodezime zu den beiden Reflexions-

maximis bei $8,35\mu$ bzw. $9,05\mu$ zu tun haben. Die Wellenlängendifferenz bei der Duodezime beträgt nach dem Obigen $0,22\mu$, was einer Differenz der beiden Grundschrwingungen von $0,66\mu$ entsprechen würde, während $0,70\mu$ beobachtet wurde. Doch wollen wir auf diese feinere Korrespondenz noch kein allzu großes Gewicht legen, sondern uns mit der Feststellung begnügen, daß wir es hier tatsächlich mit der dritten Oberschrwingung zu tun haben.

In der Gegend bei $2,25\mu$, wo die Doppeloktave zu erwarten war, zeigte sich bei der Verwendung einer Platte keine merkliche Absorption; sie trat aber deutlich, wenn auch schwach, hervor, als beide Platten hintereinander benutzt wurden, wie gleichfalls Fig. 4 erkennen läßt.

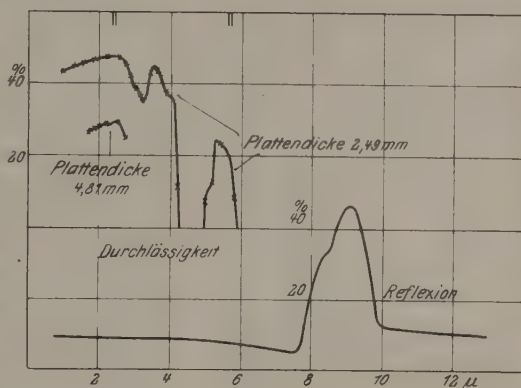


Fig. 4.

Das hier beobachtete Absorptionsband erstreckte sich von $2,25\mu$ bis $2,35\mu$. Es kann also auch kein Zweifel darüber bestehen, daß hier die vierte Oberschrwingung festgestellt wurde.

Es stehen übrigens hier ebensowenig, wie bei Gasen, die Frequenzen der Grundschrwingung und der Oberschrwingungen in dem genauen Verhältnis $1:2:3:4$; dies ist hier schon deshalb nicht möglich, weil in Reflexion bekanntlich das Maximum gegen die wirkliche Lage der Eigenschrwingung nach kürzeren Wellen verschoben ist.

Nachdem die Messungen an Cölestin gezeigt hatten, daß es möglich ist, an festen Körpern relativ leicht Oberschrwingungen festzustellen, lag uns an der genaueren Untersuchung eines Sulfates, bei dem die Komplikation der Doppelbrechung und des Dichroismus fortfiel. Als einziges wasserfreies reguläres Sulfat war uns der Langbeinit bekannt, der allerdings in klaren Kristallen äußerst selten vorkommt. Daß wir einen solchen Kristall untersuchen konnten, verdanken wir der außerordentlichen Liebeshwürdigkeit von Herrn Geheimrat F. Rinne in Leipzig, der uns ein schönes Exemplar zur Verfügung stellte. Wir konnten eine 2 mm dicke Platte daraus herstellen lassen. Die Untersuchung zeigte deutlich das Absorptionsmaximum bei $4,5\mu$ (Oktave) und die Duodezime, die hier gleichfalls sehr stark war, bei etwa 3μ .

Die Fig. 5 läßt die genaueren Wellenlängen erkennen: zwischen $2,92 \mu$ und $3,03 \mu$ sowie zwischen $4,16 \mu$ und $4,72 \mu$ haben wir völlige Auslöschung des Spektrums; als Mitte dieser Banden ist also $2,975 \mu$ bzw. $4,440 \mu$ anzusehen. Berechnet man aus beiden rückwärts die Grundfrequenz, so findet man $8,92 \mu$ bzw. $8,88 \mu$, was als hinreichend

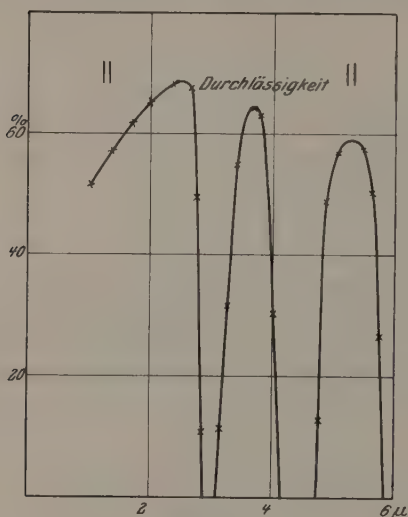


Fig. 5.

übereinstimmend angesehen werden kann in Anbetracht des Umstandes, daß ein genaues Zahlenverhältnis nach dem Obigen gar nicht zu erwarten ist.

§ 7. Die Sulfate besitzen bekanntlich mehrere Eigenschwingungen, so daß wir eigentlich neben den einfachen Oberschwingungen auch Kombinationsschwingungen zu erwarten haben. Nach solchen haben wir indessen vorläufig nicht gesucht, sondern lieber unsere Aufmerksamkeit zweiatomigen Körpern zugewendet, bei denen die theoretische Sachlage denkbar einfach ist. Bei symmetrischem Kraftgesetz ist hier nur

eine ultrarote Eigenschwingung zu erwarten, zu der dann noch die Reihe der harmonischen Oberschwingungen tritt, wenn das Kraftgesetz asymmetrisch ist.

Wir haben deshalb weiterhin Carborund (SiC) untersucht, von dem uns ein zwar kleines, aber völlig klares Plättchen, senkrecht zur optischen Achse, zur Verfügung stand; es hatte eine Dicke von $0,48 \text{ mm}$ und eine nutzbare Fläche von 2 qmm . Das seltene Stück befand sich in der Sammlung des hiesigen mineralogischen Instituts, und wir sind Herrn Professor Weigel für seine Überlassung zu großem Danke verpflichtet.

Der untere Teil der Fig. 6 zeigt zunächst die Kurve des Reflexionsvermögens. Sehen wir von kleineren Erhebungen im kurzwelligen Teil ab, von denen gleich noch genauer zu sprechen sein wird, so zeigt die Figur, daß SiC eine stark ausgeprägte Reflexionschwingung bei 12μ besitzt, die also die Grundschwingung darstellt. Im oberen Teile der Figur sieht man die Durchlässigkeit des Carborunds aufgetragen; sie beträgt bis etwa 5μ etwa 20 Proz., fällt dann aber plötzlich ab, um bei $5,76 \mu$ völlig auf Null herunter zu

gehen. Bis zur Wellenlänge von $6,73 \mu$ bleibt der Kristall völlig undurchlässig, dann steigt die Durchlässigkeit plötzlich wieder fast auf den alten Wert (16,6 Proz.), um dann bei $6,92 \mu$ wieder dauernd Null zu werden; hier macht sich bereits der Einfluß des starken Streifens bei 12μ bemerkbar. Wir haben also eine ausgeprägte Absorptionsbande bei $6,24 \mu$, die als die Oktave der Grundschwingung bei 12μ zu betrachten ist. Wegen der geringen Dicke des Plättchens gelang es nicht, noch höhere Oberschwingungen zu erkennen, doch zweifeln wir nicht an ihrem Vorhandensein.

Einer kurzen Erörterung bedürfen noch die beiden kurzwelligen Erhebungen in der Kurve des Reflexionsvermögens. Man erkennt,

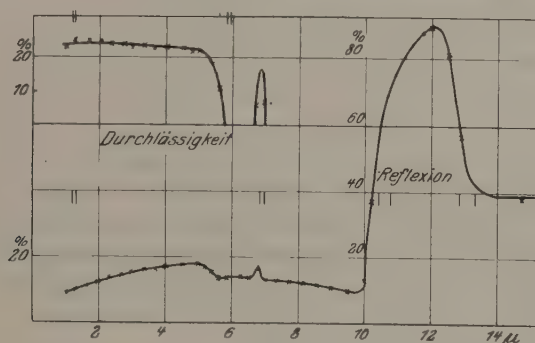


Fig. 6.

daß sie genau da liegen, wo in der Durchlässigkeitskurve die Durchlässigkeit merkbare Werte annimmt. Dieser Umstand bietet auch die Erklärung für ihr Auftreten: an diesen Stellen nimmt auch die Hinterfläche des Plättchens an der Reflexion merklichen Anteil und verfälscht so die Kurve des Reflexionsvermögens. In der Kurve des wahren Reflexionsvermögens fehlen diese Erhebungen, die also keineswegs „Eigenschwingungen“ darstellen; sie bilden aber hier eine ganz wünschenswerte Kontrolle der Durchlässigkeitsmessungen.

§ 8. Ein Kristall, dessen Eigenschwingungen in Reflexion vollkommen bekannt sind, ist der Kalkspat. Nach den Messungen von Schaefer und Schubert besitzt derselbe für den ordentlichen Strahl Reflexionsmaxima in der Gegend von $6,70 \mu$ und $14,16 \mu$, die der CO_3 -Gruppe (als innere Schwingungen) zukommen; ferner nach den Messungen von Liebisch und Rubens¹⁾ noch die Reflexionsmaxima

¹⁾ Th. Liebisch und H. Rubens, Berl. Akad. Ber. 1919, S. 198 ff.

bei $30,3\mu$ und bei 94μ . Während die ersteren Schwingungen allen Carbonaten gemeinsam sind, variieren die letzteren bei den verschiedenen Carbonaten, da sie den Schwingungen der CO_2 -Gruppe gegen das Metallion zuzuschreiben sind. Bestimmte man also die Durchlässigkeit an einer Kalkspatplatte senkrecht zur optischen Achse, so konnte man hoffen, die sämtlichen Absorptionsmaxima als Kombinationsschwingungen aus den obigen vier Grundschiebungen erklären zu können, wie es Hettner für Wasserdampf gelungen ist.

Zur Verfügung stand uns eine Platte senkrecht zur optischen Achse, von einer Dicke von $0,25\text{ mm}$. An ihr wurden zunächst Durchlässigkeitsmessungen mit möglicher Genauigkeit angestellt. Das Resultat ist aus Fig. 7 zu ersehen.

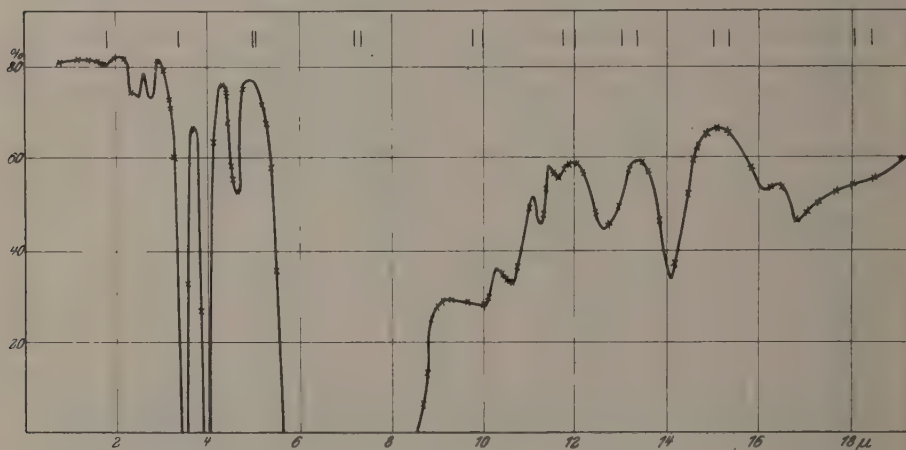


Fig. 7.

Unsere Messungen ergaben zunächst ein flaches Minimum bei $1,9\mu$, dann deutlich ausgeprägte Minima von $2,35\mu$ bis $2,50\mu$ und bei $2,8\mu$; es folgen außerordentlich starke Bänder von $3,35\mu$ bis $3,5\mu$ und von $3,90\mu$ bis $4,05\mu$; an diesen Stellen wurde das Spektrum völlig ausgelöscht. Dann kam eine mäßig starke Bande bei $4,66\mu$ und hierauf die dem Reflexionsmaximum bei $6,7\mu$ entsprechende Absorptionsbande, die das Spektrum von $5,7\mu$ bis $8,7\mu$ völlig unterbricht. Von $8,7\mu$ steigt die Durchlässigkeitskurve wieder stark an; es finden sich zahlreiche Bänder bei $10,0\mu$, $10,64\mu$, $11,24\mu$, $11,63\mu$, $12,72\mu$ und eine starke Bande bei $14,08\mu$, die der in Reflexion erscheinenden zweiten Eigenschwingung entspricht. Dahinter steigt die Durchlässigkeit wieder und zeigt in der Gegend von 16μ und $16,8\mu$ noch einige weitere Einsenkungen.

Wir hofften nun, dieses komplizierte Spektrum aus den im Reflexionsspektrum für den ordentlichen Strahl gefundenen, oben angeführten Grundschrwingungen erklären zu können, wobei allerdings von vornherein die Schwierigkeit auftrat, daß die genannten Streifen bei etwa $6,7\mu$ und $14,16\mu$ selbst nicht einfach, sondern noch komplex sind, wie alle Beobachter gefunden haben, wenn auch in bezug auf die Zahl der in diesen Grundschrwingungen vorhandenen Maxima die Angaben auseinandergehen. Auf diese feinere Frage kommen wir im nächsten Paragraphen zurück. Rechnet man nun zu den oben angegebenen vier Grundschrwingungen (wobei von deren komplexer Struktur zunächst abgesehen sei) sämtliche Ober- und Kombinationschrwingungen aus, so erhält man viel mehr Kombinationschrwingungen, als im Absorptionsspektrum beobachtet worden sind. Allerdings häufen sich die berechneten Schrwingungen bemerkenswerterweise in der Nähe der beobachteten Absorptionsbanden. Jedoch ist die Übereinstimmung noch wenig befriedigend. Man erhält aber jedenfalls den Eindruck, als ob in Wirklichkeit (d. h. wenn man mit größerer Auflösung, als sie uns zur Verfügung stand, das Absorptionsspektrum durchmessen würde) das Absorptionsspektrum noch viel komplizierter ausfallen würde, als wir es jetzt beobachtet haben. Es ist also jedenfalls zunächst zu fordern, daß mit größerer Auflösung der Kalkspat noch einmal durchgemessen wird; erst dann wird man wirklich in der Lage sein, zu prüfen, ob sich das Absorptionsspektrum durch Kombination der Grundschrwingungen verstehen lassen wird.

Vorläufig kann man indessen versuchen, auf folgendem Wege einen Beitrag zu dieser Frage zu liefern. Wie schon oben erwähnt, sind die beiden kurzwelligen Grundschrwingungen innere Schrwingungen der CO_3^{2-} -Gruppe und kommen deshalb allen Carbonaten zu. Kombinationschrwingungen dieser beiden kurzwelligen Grundschrwingungen sollten deshalb auch im Absorptionsspektrum aller Carbonate in gleicher Weise auftreten. Untersuchungen darüber sind im Gange und wir hoffen in Kürze darüber berichten zu können. Hat man erst einmal die Kombinationsschrwingungen gefunden, die sich auf diesen beiden kurzwelligen Streifen allein aufbauen, so wird es leichter sein, das komplizierte Absorptionsspektrum zu entwirren. Vorläufig müssen wir uns mit dieser Andeutung begnügen.

Marburg, Physikal. Institut der Universität, im August 1922.

Röntgenspektren und periodisches System der Elemente.

Von N. Bohr und D. Coster in Kopenhagen.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 2. November 1922.)

In einer Arbeit in dieser Zeitschrift¹⁾ hat der eine der Verfasser in den Hauptzügen eine Theorie des Atombaus entwickelt, von der aus es möglich scheint, eine Interpretation der optischen sowie der Röntgenspektren zu geben, welche in engster Beziehung zu einer Deutung des periodischen Systems der Elemente steht. Nach dem Erscheinen dieser Arbeit ist das zur Prüfung der theoretischen Vorstellungen geeignete röntgenspektroskopische Versuchsmaterial durch eine Untersuchung des anderen von uns wesentlich vermehrt und in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit²⁾ in seiner Beziehung zur Theorie diskutiert worden, wodurch mehrere interessante Ergebnisse zutage getreten sind. In der vorliegenden gemeinsamen Arbeit wird nun auf den Vergleich des Versuchsmaterials mit der Theorie etwas genauer eingegangen als es in den erwähnten Arbeiten geschehen ist, indem besonders auf die Beziehung der Röntgenspektren zur Deutung des periodischen Systems Rücksicht genommen wird.

§ 1. Theoretische Vorstellungen vom Atombau. Die erwähnte Theorie beruht auf einer Klassifikation der Elektronenbahnen im Atom mittels eines Vergleichs mit den stationären Zuständen eines Elektrons, das eine Zentralbewegung vollführt. Dabei werden die Bahnen durch das Symbol n_k gekennzeichnet. Hier bedeutet n die sogenannte „Hauptquantenzahl“, die in dem Grenzfall, wo die Zentralbewegung in eine einfach periodische Keplerbewegung übergeht, für die Bestimmung der Energie allein ausschlaggebend ist, wie es in der Balmerformel des Wasserstoffspektrums zutage tritt. Die „Nebenquantenzahl“ k , deren Einfluß auf die Energie von der Abweichung der Bewegung von einer einfach periodischen bedingt ist, bestimmt

¹⁾ N. Bohr, ZS. f. Phys. **9**, 1, 1922. Die Abhandlung ist inzwischen, mit einigen erläuternden Figuren versehen, zusammen mit zwei früheren Aufsätzen allgemeiner Art als ein Heft der Sammlung Vieweg unter dem Titel „Drei Aufsätze über Spektren und Atombau“ erschienen. Es ist die Absicht des Verfassers, in einer Reihe von Aufsätzen in dieser Zeitschrift die Ergebnisse dieser Abhandlung, sowohl was die allgemeine Grundlage wie die Ausführung von Einzelheiten betrifft, näher zu diskutieren.

²⁾ D. Coster, Phil. Mag. **43**, 1070, 1922, **44**, 546, 1922. Siehe auch die Leidener Doktordissertation 1922.

in wohlbekannter Weise das Impulsmoment des Elektrons um das Bahnzentrum. Auf der Einführung dieser Quantenzahl beruht bekanntlich die Sommerfeldsche Theorie der Feinstruktur der Wasserstofflinien; diese Feinstruktur wird durch den Umstand verursacht, daß wegen der Relativitätsmodifikation der mechanischen Gesetze schon die Bahn eines einzelnen Elektrons um einen positiven Atomkern nicht streng periodisch ist, sondern beschrieben werden kann als eine Keplerellipse, die eine langsame Drehung in ihrer Ebene ausführt. Eine Übersicht über die Anzahlen von Elektronen im normalen Atom, die nach der Theorie den verschiedenen Typen von n_k -Bahnen angehören, ist in der nachstehenden Tabelle 1 gegeben, welche Vorstellungen vom Atombau zum Ausdruck bringt, die abgesehen von den charakteristischen neuen Zügen in mehrfacher Hinsicht Ähnlichkeiten aufweisen mit den Vorstellungen, die den Arbeiten von Sommerfeld und Vegard über Röntgenspektren zugrunde liegen.

Wie man sieht, sind die Elektronenbahnen in Gruppen angeordnet, die zu demselben Wert der Hauptquantenzahl n gehören. Die Ausbildung dieser Gruppen, wenn man zu Elementen höherer Atomnummer geht, ist mit den Gesetzmäßigkeiten, die im periodischen System auftreten, in Verbindung gebracht. Ein wesentlicher Zug dabei ist, daß die Gruppen wieder in Untergruppen geteilt sind, die verschiedenen Werten der Nebenquantenzahl k entsprechen. Das allmähliche Hinzukommen neuer Typen von Elektronenbahnen mit derselben Hauptquantenzahl wie die schon in vorangehenden Elementen vorhandenen Gruppen von Elektronenbahnen und das dadurch veranlaßte Fortschreiten der stufenweisen Ausbildung dieser Gruppen ist weiter als der Grund der typischen Abweichungen von der einfachen Periodizität im System der Elemente angenommen (Familien der Eisen- und Platinmetalle sowie der seltenen Erden). Eine Übersicht über das periodische System, die diese Züge besonders zum Ausdruck bringt, ist gegeben in Fig. 1¹⁾, wo die Elemente, die zur

¹⁾ Vgl. N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau, S. 132, Fig. 5, wo eine ausführlichere Erläuterung dieser Figur zu finden ist. Auf die in dem Nachtrag dieser Aufsätze erwähnte Note von Dauvillier, C. R. Mai 1922, über die Beobachtung einiger schwachen Linien des Röntgenspektrums eines Elementes mit Atomnummer 72 in einer Mischung von seltenen Erden ist weder im Schema noch in der Figur Rücksicht genommen, weil diese Beobachtung wohl kaum schon als gesichert angesehen werden kann. Das Vorhandensein eines Elementes zwischen Lu (71), dessen höchste Valenz 3 ist und Ta (73), dessen höchste Valenz 5 ist, mit ähnlichen chemischen Eigenschaften wie Lu würde eine Abweichung von der sonst allgemeinen Regel darstellen, daß die höchste Valenz beim Übergang von einem Elemente zum folgenden sich niemals um mehr als eine Einheit ver-

Tabelle 1. Elektronenbahntypen der Elemente.

$\begin{array}{c} n_k \\ \backslash \\ N \end{array}$	1_1	$2_1 \ 2_2$	$3_1 \ 3_2 \ 3_3$	$4_1 \ 4_2 \ 4_3 \ 4_4$	$5_1 \ 5_2 \ 5_3 \ 5_4 \ 5_5$	$6_1 \ 6_2 \ 6_3 \ 6_4 \ 6_5 \ 6_6$	$7_1 \ 7_2$
1 H	1						
2 He	2						
3 Li	2	1					
4 Be	2	2					
5 B	2	2 (1)					
—	—	—					
10 Ne	2	4 4					
11 Na	2	4 4	1				
12 Mg	2	4 4	2				
13 Al	2	4 4	2 1				
—	—	—	—				
18 A	2	4 4	4 4				
19 K	2	4 4	4 4	1			
20 Ca	2	4 4	4 4	2			
21 Sc	2	4 4	4 4 1	(2)			
22 Ti	2	4 4	4 4 2	(2)			
—	—	—	—	—			
29 Cu	2	4 4	6 6 6	1			
30 Zn	2	4 4	6 6 6	2			
31 Ga	2	4 4	6 6 6	2 1			
—	—	—	—	—			
36 Kr	2	4 4	6 6 6	4 4			
37 Rb	2	4 4	6 6 6	4 4	1		
38 Sr	2	4 4	6 6 6	4 4	2		
39 Y	2	4 4	6 6 6	4 4 1	(2)		
40 Zr	2	4 4	6 6 6	4 4 2	(2)		
—	—	—	—	—	—		
47 Ag	2	4 4	6 6 6	6 6 6	1		
48 Cd	2	4 4	6 6 6	6 6 6	2		
49 In	2	4 4	6 6 6	6 6 6	2 1		
—	—	—	—	—	—		
54 X	2	4 4	6 6 6	6 6 6	4 4		
55 Cs	2	4 4	6 6 6	6 6 6	4 4	1	
56 Ba	2	4 4	6 6 6	6 6 6	4 4	2	
57 La	2	4 4	6 6 6	6 6 6	4 4 1	(2)	
58 Ce	2	4 4	6 6 6	6 6 6 1	4 4 1	(2)	
59 Pr	2	4 4	6 6 6	6 6 6 2	4 4 1	(2)	
—	—	—	—	—	—	—	
71 Lu	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	4 4 1	(2)	
72 —	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	4 4 2	(2)	
—	—	—	—	—	—	—	
79 Au	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	1	
80 Hg	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	2	
81 Tl	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	2 1	
—	—	—	—	—	—	—	
86 Nt	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	4 4	
87 —	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	4 4	1
88 Ra	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	4 4	2
89 Ac	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	4 4 1	(2)
90 Th	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	6 6 6	4 4 2	(2)
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
118 ?	2	4 4	6 6 6	8 8 8 8	8 8 8 8	6 6 6	4 4

selben Periode des Systems gehören, in vertikalen Kolonnen angeordnet sind. Elemente in aufeinanderfolgenden Kolonnen, die sowohl in ihren chemischen wie in ihren optischen Eigenschaften als homolog angesehen werden können, sind durch gerade Linien miteinander verbunden. Reihen von aufeinander folgenden Elementen,

1 H	3 Li	11 Na	19 K	21 Sc	37 Rb	55 Cs	87 -
2 He	4 Be	12 Mg	20 Ca	22 Ti	38 Sr	56 Ba	88 Ra
	5 B	13 Al	23 V	24 Cr	39 Y	57 La	89 Ac
	6 C	14 Si	25 Mn	26 Fe	40 Zr	58 Ce	90 Th
	7 N	15 P	27 Co	28 Ni	41 Nb	59 Pr	91 Pa
	8 O	16 S	29 Cu	30 Zn	42 Mo	60 Nd	92 U
	9 F	17 Cl	31 Ga	32 Ge	43 -	61 -	
	10 Ne	18 Ar	33 As	34 Se	44 Ru	62 Sm	
			35 Br	36 Kr	45 Rh	63 Eu	
					46 Pd	64 Gd	
					47 Ag	65 Tb	
					48 Cd	66 Dy	
					49 In	67 Ho	
					50 Sn	68 Er	
					51 Sb	69 Tm	
					52 Te	70 Yb	
					53 I	71 Lu	
					54 X	72 -	
						73 Ta	
						74 W	
						75 -	
						76 Os	
						77 Ir	
						78 Pt	
						79 Au	
						80 Hg	
						81 Tl	
						82 Pb	
						83 Bi	
						84 Po	
						85 -	
						86 Rn	118 -

Fig. 1.

die dadurch eine Sonderstellung einnehmen, daß bei ihnen innere Gruppen in Ausbildung begriffen sind, sind in viereckigen Klammern eingeschlossen.

Die Aufstellung der Tabelle 1 beruht, was die Hauptzüge betrifft, auf Betrachtungen allgemeiner Art, die in der oben erwähnten Arbeit

größert; eine Regel, die eine unmittelbare Erklärung erhält aus den allgemein angenommenen Vorstellungen vom Atombau (vgl. hierzu auch C. R. Bury, Journ. Am. Chem. Soc. 43, 1902, 1921).

dargelegt sind. Bei der Ausarbeitung von Einzelheiten spielt eine eingehende Untersuchung der Serienspektren eine wesentliche Rolle. Obwohl in diesen Spektren sich auch die gradweise Ausbildung innerer Elektronengruppen deutlich abspiegelt, betrifft die direkte Auskunft, die man aus den Serienspektren entnehmen kann, doch in erster Linie das allmähliche Hinzukommen solcher Elektronenbahnen neuer Typen, durch welche die Ausbildungsstufen eingeleitet werden. Dem entsprechend sind in Tabelle 1 wesentlich nur solche Elemente, die dem Anfang der Ausbildungsstufen angehören, angegeben, wobei außerdem überall, wo das Spektralmaterial es nicht zuläßt, eindeutig auf die Zahl der Elektronen in den äußersten Gruppen zu schließen, dies durch das Einklammern der Elektronenzahlen, die den höchstquantigen Bahnen entsprechen, angedeutet ist. Die weitere fortgesetzte Ausbildung der Gruppen ist nur durch ihr Endresultat angedeutet; auch in der Beschreibung der endgültig ausgebildeten Gruppen bleibt aber zurzeit noch viel Unsicheres übrig, besonders was das feinere Wechselspiel der Elektronenbewegungen innerhalb derselben Hauptgruppe und ihrer Untergruppen anbelangt. Ohne hier näher auf diese Frage einzugehen, wollen wir nur darauf hinweisen, daß die in der oben erwähnten Arbeit eingeführten allgemeinen Annahmen über den Charakter dieses Wechselspiels, wie dort näher ausgeführt, auf Grund des Korrespondenzprinzips einen Anhaltspunkt geben für ein theoretisches Verständnis der typischen Gesetze, welche die Emissions- und Absorptionsspektren im Röntgengebiete regeln, und deren Hauptzüge durch die formale Theorie von Kossel klargelegt wurden.

§ 2. Klassifikation der Röntgenspektren. Wie in der oben zitierten Arbeit von Coster dargelegt wird, ist es möglich gewesen, für eine große Zahl der Elemente eine Klassifikation der Röntgenspektren zu erreichen, die darauf beruht, daß die Frequenz ν jeder Linie als Differenz zweier Spektraltermen T' und T'' dargestellt werden kann. In Übereinstimmung mit den Prinzipien der Quantentheorie der Linienspektren werden diese Spektraltermen — mit h multipliziert — als Energieniveaus eines Atoms gedeutet, das durch Entfernung eines Elektrons aus einer inneren Gruppe aus seinem Normalzustand gebracht ist

Über das charakteristische Röntgenspektrum, wie es für das Edelgas Niton (86) zu erwarten ist, gibt Fig. 2 eine Übersicht. In der üblichen Weise sind die Spektrallinien durch vertikale Pfeile angedeutet, während die horizontalen Geraden die Niveaus darstellen. Nur solche Linien, welche für mehrere Elemente in der Umgebung dieses Edel-

gases wirklich gemessen wurden, sind eingetragen. Die Figur gibt zugleich eine Übersicht über das Spektrum der Elemente in der Nähe der Edelgase Xenon und Krypton. So sind die Niveaus, welche beim Fortschreiten zu Elementen niedriger Atomnummer zwischen Niton

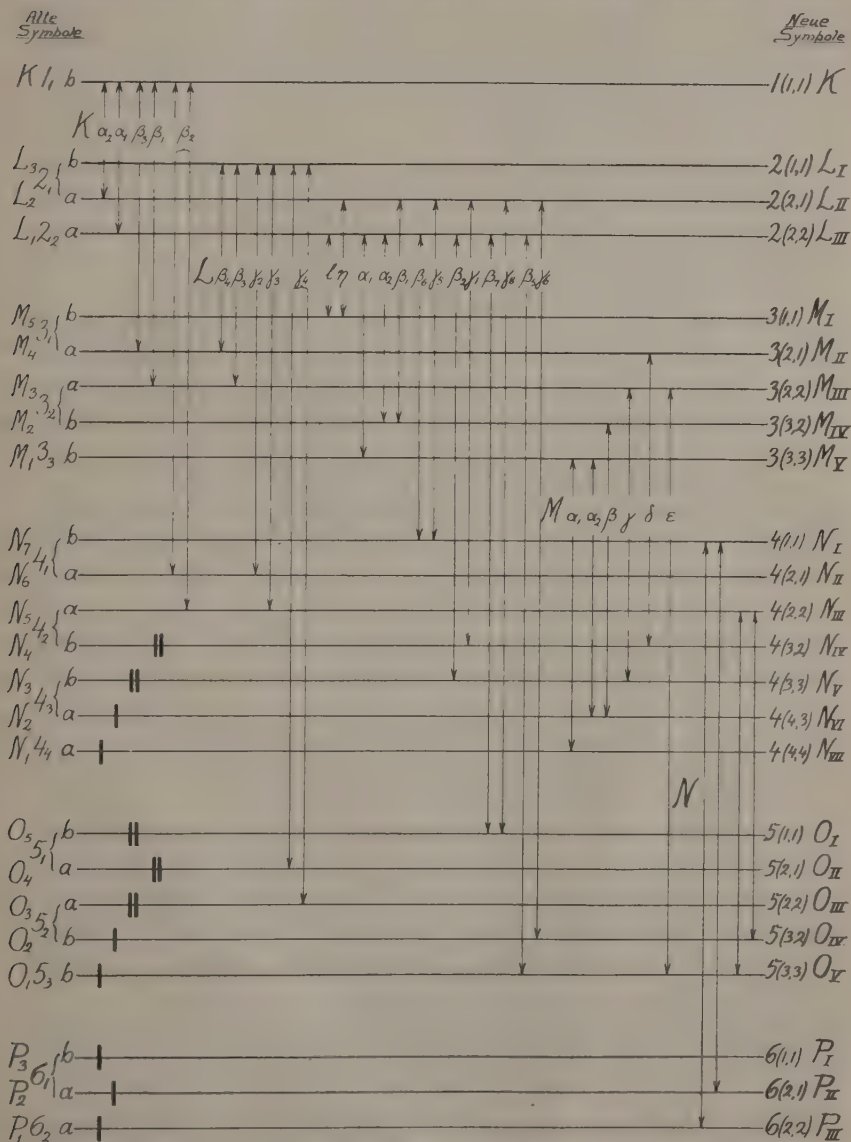


Fig. 2.

(86) und Xenon (54) ausfallen, in der Figur mit einem vertikalen Strich angegeben, und die Niveaus, die zwischen Xenon (54) und Krypton (36) außerdem noch verschwinden, mit zwei Strichen bezeichnet worden.

Was zunächst die Symbole betrifft, mit denen die Niveaus bezeichnet sind, ist, wie in der Figur angegeben, gegenüber den vorigen Abhandlungen eine Änderung vorgenommen. Erstens sind die Unterniveaus, die zur selben Niveaugruppe gehören, in der Reihenfolge mit römischen Ziffern bezeichnet, in der sie allmählich bei steigender Atomnummer in den Röntgenspektren der Elemente auftreten. Weiter ist an jedes Niveau ein Zahlensymbol der Form $n(k_1, k_2)$ geknüpft. Auf die Beziehung dieser Symbole zur Theorie des Atombaus werden wir später näher eingehen. Hier soll nur darauf hingewiesen werden, daß die Niveaus, die in Fig. 2 für die Darstellung der Spektren jedes der drei Edelgase benutzt worden sind, alle durch solche Werte von n und den k charakterisiert sind, die in der obigen Tabelle 1 als Werte der Quantenzahlen n und k für die Elektronenbahnen in den Atomen dieser Elemente vorkommen. Ferner bemerken wir, daß das Auftreten von Linien, die Kombinationen zwischen den Niveaus entsprechen, dadurch geregelt wird, daß die Zahl k_1 bei einem Übergangsprozeß sich immer um eine Einheit ändert, während k_2 sich entweder um eine Einheit ändert oder konstant bleibt. Diese Regeln sind äquivalent mit den Regeln, die in den früheren Arbeiten von Coster mittels der alten Symbole ausgedrückt wurden, und sie entsprechen formell genau den Regeln, die gleichzeitig von Wentzel¹⁾ aufgestellt wurden. Die für k_1 und k_2 eingeführten Zahlenwerte sind gleich den Werten der von diesem Verfasser zur Klassifikation der Niveaus benutzten Zahlen n und m . Ihre theoretische Bedeutung werden wir aber in etwas anderer Weise auffassen.

§ 3. Die Ermittlung der Energieniveaus aus dem Versuchsmaterial. Die Resultate der jetzt vorliegenden Messungen der Röntgenspektren erlauben uns, die Energieniveaus für eine große Anzahl von Elementen mit beträchtlicher Genauigkeit zu berechnen. Im folgenden geben wir eine Übersicht über die dabei herangezogenen experimentellen Untersuchungen²⁾, während die durch

¹⁾ G. Wentzel, ZS. f. Phys. 6, 84, 1921.

²⁾ Eine Tabelle über die Spektraltermen der Röntgenspektren findet sich auch in Sommerfelds Buch: Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 630. Durch die neuen Versuchsergebnisse ist diese Tabelle jedoch in vieler Hinsicht änderungsbedürftig.

In einer eben erschienenen Arbeit von Dauvillier (Journal de Physique et le Radium, Juli 1922) ist ebenfalls eine Übersicht über das Versuchsmaterial

die Rydbergsche Konstante R dividierten Werte der Spektralterme T in Tabelle 2 und die Wurzelwerte derselben in Tabelle 3 zusammengestellt sind.

Übersicht über die benutzten Arbeiten.

K-Absorption ¹⁾	Mg (12) — Cr (24)	Fricke, Phys. Rev. 16 , 202, 1920.
	Mn (25) — U (92)	Duane u. Shimizu, Phys. Rev. 14 , 522, 1919.
" ²⁾		Duane und Kang-Fuh-Hu, Phys. Rev. 14 , 516, 1919.
		Duane, Fricke, Stenström, Proc. Nat. Ac. Sc. 6 , 607, 1920.
" ¹⁾	Od (48) — U (92)	Siegbahn u. Jönsson, Phys. ZS. 20 , 251, 1919.
		Duane und Patterson, Proc. Nat. Ac. Sc. 6 , 509, 1920.
L-Absorption ^{2) 3)}	W (74) — Pb (82)	Coster, Phil. Mag. 43 , 1070, 1922 und 44 , 546, 1922.
" ¹⁾	G (55) — Eu (68)	Lindsay, C. R. 175 , 150, 1922.
" ¹⁾	Sb (51) — Ba (56)	Coster, Phil. Mag. 43 , 1070, 1922.
" ¹⁾	Ag (47)	Stenström, Dissertation Lund 1919.
M-Absorption ¹⁾	Th (90) u. U (92)	Coster, Phys. Rev. 19 , 20, 1922.
" ¹⁾	Bi (83), Th (90) u. U (92)	Hjalmar, ZS. f. Phys. 1 , 439, 1920 und 7 , 341, 1921.
	Na (11) — Zn (30)	Siegbahn u. Dolejssek, ZS. f. Phys. 10 , 159, 1922.
" ¹⁾	P (15) — Zn (30)	Duane, Phys. Rev. 14 , 373, 1919.
" ³⁾	Mo (42) u. Rh (45)	Hjalmar, ZS. f. Phys. 3 , 262, 1920 und 7 , 341, 1921.
L-Linien ¹⁾	Cu (30) — Ta (73)	Siegbahn, Phys. ZS. 20 , 533, 1919.
" ¹⁾	W (74)	Coster, Phil. Mag. 43 , 1070, 1922.
" ¹⁾	Rb (37) — Ba (56)	Coster, Ebenda 44 , 546, 1922.
" ¹⁾	La (57) — Lu (71)	Coster, ZS. f. Phys. 6 , 186, 1921.
" ¹⁾	Ta (73) — U (92)	Stenström, Dissertation Lund 1919.
M-Linien ¹⁾	Dy (66) — U (92)	

Mit Ausnahme der mit einem Sternchen bezeichneten Niveaus sind alle Werte der Tabelle 2 aus den oben zitierten experimentellen Daten berechnet unter Benutzung von Additionsbeziehungen, welche man unmittelbar aus Fig. 2 ablesen kann. In einer früheren Arbeit von Coster ⁴⁾ wurde schon darauf hingewiesen, daß Duane und Pattersons Werte für die L-Kanten besser mit den Ergebnissen des Lunder Institutes übereinstimmen, wenn man die von ihnen gegebenen

sowie eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Niveauewerte der Elemente von der Atomnummer gegeben. Die meisten der unten besprochenen und uns speziell interessierenden Eigentümlichkeiten dieser Abhängigkeit treten aber in Dauvilliers Darstellung wegen der Unvollständigkeit der von ihm benutzten experimentellen Daten nicht zutage.

¹⁾ Gemessen in Siegbahns Laboratorium.

²⁾ Gemessen in Duanes Laboratorium.

³⁾ Um eine X-Einheit korrigiert.

⁴⁾ D. Coster, ZS. f. Phys. **6**, 185, 1921.

Tabelle 2.

	K	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V
92 U	8477,0	1603,5	1543,1	1264,3	408,9	382,1	317,2	274,0	261,0
90 Th	8073,5	1509,7	1451,5	1200,6	381,6	354,4	298,0	256,6	244,9
88 Bi	6646,7	1207,9	1159,4	990,0	295,9	273,6	234,0	199,4	191,4
82 Pb	6463,0	1169,3	1121,9	960,5	283,8	262,3	226,0	190,5	183,0
81 Tl	6289,0	1132,4	1084,2	933,2	273,9	253,8	219,2	184,8	176,8
80 Hg	6115,9	1094,6	1048,6	906,1	—	—	—	—	—
79 Au	5940,4	1060,2	1014,4	878,5	252,9	235,1	202,8	169,3	163,0
78 Pt	5764,0	1026,8	978,7	852,0	243,4	227,3	198,0	162,3	156,4
74 W	5113,8	890,6	850,1	751,6	207,6	188,9	167,4	137,8	133,2
73 Ta	—	860,3*	821,0	728,6	200,1	181,0*	160,7*	132,8	128,4
71 Lu	—	801,1*	763,1*	682,0*	184,5*	167,0*	149,4*	121,7*	117,9*
70 Yb	—	773,4*	735,7*	659,6*	177,5*	161,1*	144,7*	116,8*	113,2*
68 Er	—	718,1*	682,8*	616,0*	163,8*	147,3*	132,2*	107,3*	104,2*
67 Ho	4115,9	692,9*	657,4*	595,0*	157,3*	142,4*	129,0*	103,0*	100,0*
66 Dy	3972,5	666,9*	632,3*	574,0*	150,9*	136,1*	123,7*	98,3*	95,6*
65 Tb	—	642,4*	608,2*	553,8*	145,0*	130,9*	119,4*	94,1*	91,6*
64 Gd	3711,9	617,4*	584,3*	533,7*	138,6*	124,6*	114,2*	89,8*	87,4*
63 Eu	3583,4	593,6*	561,3	514,1	132,9	119,5*	109,6*	85,8	83,5
62 Sm	3457,0	570,7*	539,0	495,0	127,1	114,3*	105,3*	81,9	79,9
60 Nd	3214,2	525,8*	495,9	457,9	116,6	104,4*	96,4*	74,3	72,7
59 Pr	3093,3	504,2*	474,7	439,4	111,4	99,0*	92,1*	70,1	68,6
58 Ce	2972,2	483,0*	454,4	421,9	105,9	94,2*	87,8*	66,7	65,4
56 Ba	2756,4	442,3	414,7	386,7	95,4	84,9	79,4	58,8	57,7
55 Cs	2649,1	421,8	395,0	369,5	89,6	79,3	74,4	54,8	53,8
53 J	2448,3	382,6	357,6	336,0	—	69,0	64,8	46,8	46,0
52 Te	2345,0	364,1	339,6	320,1	74,5	64,4	60,5	43,2	42,5
51 Sb	2241,7	346,1	321,9	304,3	69,3	59,9	56,4	39,5	38,8
47 Ag	1878,9	279,5	260,0	247,3	53,3	43,5	41,2	27,9	27,5
45 Rh	1709,1	253,4	231,4	220,9	45,8	39,7	38,5	22,5	22,2
42 Mo	1473,1	211,9	193,9	186,2	37,6	30,5	29,7	17,4	17,2
41 Nb	1401,3	—	181,4	174,4	35,1	—	—	15,0	14,9
40 Zr	1325,8	—	169,6	163,5	31,4	—	—	13,0	—
29 Cu	661,1	—	71,3	69,8	—	5,2	—	0	—
28 Ni	612,0	—	62,6	61,3	—	3,3	—	—	—
27 Co	568,9	—	59,7	58,5	—	5,3	—	—	—
26 Fe	523,8	—	53,2	52,2	—	4,0	—	—	—
25 Mn	482,4	—	48,7	47,9	—	4,2	—	—	—
24 Cr	441,1	—	43,0	42,3	—	3,5	—	—	—
23 Va	402,3	—	38,2	37,6	—	2,6	—	—	—
22 Ti	365,4	—	32,6	32,2	—	2,2	—	—	—
21 Sc	331,2	—	30,3	30,0	—	2,7	—	—	—
20 Ca	297,5	—	25,9	25,6	—	2,0	—	—	—
19 K	265,3	—	21,4	21,2	—	0,9	—	—	—
17 Cl	207,8	—	14,8	14,7	—	0,4	—	—	—
16 S	181,8	—	11,8	—	—	0,3	—	—	—
15 P	158,3	—	9,9	—	—	0,8	—	—	—
13 Al	114,7	—	5,2	—	—	0	—	—	—
12 Mg	95,8	—	3,5	—	—	—	—	—	—

* Interpoliert oder aus einem interpolierten Wert berechnet.

Niveauwerte (T/R).

N_I	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}	O_I	$O_{II,III}$	$O_{IV,V}$	
108,6	95,7	77,1	56,3	53,6	28,4	27,6	26,2	15,4	5,8	92 U
97,8	—	—	51,2	48,7	24,8	24,1	—	—	5,7	90 Th
71,0	58,7	50,3	35,7	33,7	13,6	13,0	—	11,0	2,0	83 Bi
66,0	55,4	49,3	32,2	30,5	10,8	10,3	10,3	6,4	0,8	82 Pb
63,7	53,6	44,9	30,6	29,0	10,0	9,6	10,6	7,4	1,7	81 Tl
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	80 Hg
58,0	49,1	42,8	26,4	25,0	6,4	—	7,8	8,3	0,8	79 Au
52,5	48,7	42,3	24,5	23,2	5,2	—	7,1	8,6	0,4	78 Pt
43,6	35,6	30,6	18,7	17,8	2,5	—	5,2	2,9	(0)	74 W
41,7	33,0*	30,0*	18,0	17,2	2,5	—	5,3	2,6*	—	73 Ta
37,7*	30,9*	27,2*	16,2*	15,5*	1,3*	—	4,9*	2,5*	—	71 Lu
36,6*	29,9*	26,4*	15,2*	14,6*	1,0*	—	—	2,5*	—	70 Yb
33,2*	26,9*	23,4*	13,4*	12,8*	0,3*	—	4,1*	2,4*	—	68 Er
32,1*	26,6*	23,5*	12,7*	12,2*	0,1*	—	—	2,4*	—	67 Ho
30,8*	25,3*	22,4*	11,9*	11,4*	(-0,2)*	—	2,9*	2,5*	—	66 Dy
29,3*	24,1*	21,8*	11,5*	11,1*	—	—	3,5*	2,4*	—	65 Tb
28,8*	22,2*	20,2*	11,0*	10,6*	—	—	3,5*	2,4*	—	64 Gd
26,9	21,9*	19,7*	10,4	10,1	—	—	2,9	—	—	63 Eu
25,8	20,2*	18,8*	10,1	9,8	—	—	3,0	2,3*	—	62 Sm
23,8	18,6*	17,2*	9,6	9,3	—	—	3,2	2,5*	—	60 Nd
22,5	18,0*	16,7*	8,8	8,5	—	—	2,6	2,2*	—	59 Pr
21,7	17,0*	15,8*	8,7	8,5	—	—	3,1	2,2*	—	58 Ce
18,8	15,3	14,4	7,1	6,9	—	—	2,1	2,4	—	56 Ba
17,3	13,6	12,6	6,1	5,9	—	—	2,1	1,7	—	55 Cs
—	—	—	4,4	4,2	—	—	—	—	—	53 J
12,7	8,8	—	3,4	3,3	—	—	—	0,4	—	52 Te
11,1	7,2	—	2,3	2,2	—	—	(0)	0,1	—	51 Sb
7,5	3,3	—	0,6	—	—	—	—	—	—	47 Ag
5,3	5,0	—	(-0,8)	—	—	—	—	—	—	45 Rh
4,7	3,0	—	0,5	—	—	—	—	—	—	42 Mo
4,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41 Nb
3,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40 Zr
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	29 Cu
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28 Ni
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27 Co
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26 Fe
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25 Mn
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24 Cr
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	23 Va
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22 Ti
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21 Sc
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20 Ca
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19 K
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17 Cl
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16 S
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15 P
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13 Al
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12 Mg

Tabelle 3.

	K	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V
92 U	92,07	40,04	39,28	35,56	20,22	19,55	17,81	16,55	16,16
90 Th	89,85	38,85	38,10	34,65	19,53	18,83	17,26	16,02	15,65
83 Bi	81,53	34,75	34,05	31,46	17,20	16,54	15,32	14,12	13,83
82 Pb	80,39	34,19	33,50	30,99	16,85	16,20	15,08	13,80	13,53
81 Tl	79,31	33,65	32,92	30,55	16,55	15,93	14,81	13,60	13,30
80 Hg	78,20	33,08	32,38	30,10	—	—	—	—	—
79 Au	77,07	32,54	31,85	29,64	15,90	15,33	14,25	13,01	12,77
78 Pt	75,92	32,01	31,28	29,19	15,60	15,08	13,99	12,74	12,51
74 W	71,51	29,84	29,16	27,41	14,41	13,74	12,93	11,74	11,54
73 Ta	—	29,33*	28,65	26,99	14,15	13,45*	12,67*	11,52	11,30
71 Lu	—	28,30*	27,62*	26,12*	13,58*	12,92*	12,22*	11,03*	10,86*
70 Yb	—	27,81*	27,12*	25,68*	13,32*	12,69*	12,03*	10,83*	10,64*
68 Er	—	26,80*	26,15*	24,82*	12,80*	12,14*	11,50*	10,36*	10,21*
67 Ho	64,16	26,32*	25,64*	24,39*	12,54*	11,93*	11,36*	10,15*	9,99*
66 Dy	63,03	25,82*	25,15*	23,96*	12,28*	11,67*	11,12*	9,91*	9,78*
65 Tb	—	25,35*	24,66*	23,57*	12,04*	11,44*	10,93*	9,70*	9,57*
64 Gd	60,93	24,85*	24,17*	23,10*	11,77*	11,16*	10,69*	9,48*	9,35*
63 Eu	59,86	24,36*	23,69	22,67	11,53	10,93*	10,47*	9,26	9,14
62 Sm	58,80	23,89*	23,22	22,25	11,27	10,68*	10,25*	9,05	8,93
60 Nd	56,69	22,93*	22,27	21,40	10,79	10,21*	9,81*	8,62	8,53
59 Pr	55,62	22,45*	21,79	20,96	10,55	9,95*	9,60*	8,37	8,28
58 Ce	54,52	21,98*	21,32	20,54	10,29	9,71*	9,37*	8,17	8,09
56 Ba	52,50	21,03	20,36	19,66	9,77	9,21	8,91	7,67	7,60
55 Cs	51,47	20,54	19,87	19,22	9,47	8,91	8,63	7,40	7,34
53 J	49,48	19,56	18,91	18,33	—	8,31	8,05	6,84	6,78
52 Te	48,43	19,08	18,43	17,89	8,63	8,02	7,78	6,57	6,52
51 Sb	47,35	18,60	17,94	17,44	8,32	7,74	7,51	6,29	6,23
47 Ag	43,35	16,72	16,12	15,73	7,30	6,60	6,42	5,28	5,24
45 Rh	41,34	15,90	15,20	14,86	6,76	6,30	6,16	4,74	4,71
42 Mo	38,38	14,54	13,92	13,64	6,13	5,52	5,40	4,17	4,15
41 Nb	37,43	—	13,47	13,21	5,92	—	—	3,87	3,86
40 Zr	36,41	—	13,02	12,79	5,60	—	—	3,61	
29 Cu	25,71	—	8,44	8,36	—	2,28		0	
28 Ni	24,74	—	7,91	7,83	—	1,82		—	
27 Co	23,85	—	7,73	7,65	—	2,30		—	
26 Fe	22,89	—	7,29	7,23	—	2,00		—	
25 Mn	21,96	—	6,98	6,92	—	2,05		—	
24 Cr	21,00	—	6,56	6,50	—	1,87		—	
23 Va	20,06	—	6,18	6,13	—	1,61		—	
22 Ti	19,11	—	5,71	5,66	—	1,48		—	
21 Sc	18,20	—	5,51	5,48	—	1,64		—	
20 Ca	17,25	—	5,09	5,06	—	1,42		—	
19 K	16,29	—	4,63	4,61	—	0,95		—	
17 Cl	14,42	—	3,85	3,84	—	0,63		—	
16 S	13,48	—	3,44		—	0,55		—	
15 P	12,58	—	3,15		—	0,89		—	
13 Al	10,71	—	2,28		—	0		—	
12 Mg	9,79	—	1,87		—	—		—	

* Interpoliert oder aus einem interpolierten Wert berechnet.

Wellenlängen für die Kanten alle um eine Einheit verkleinert. Um besser vergleichbare Werte zu bekommen, haben wir diese Korrektur an den Duane- und Pattersonschen L -Kantenwellenlängen vorgenommen.

Für W (74) fällt die Kante L_{III}^1 noch nahezu mit der Linie L_{β_5} zusammen. Ebenso die Kante L_{II} mit der Linie L_{γ_6} . Für das vorangehende Element Ta (73) konnten also ohne Willkür statt der Kanten L_{III} und L_{II} die Linien L_{β_5} und L_{γ_6} eingesetzt werden. Ebenso wurden für die Elemente Zr (40) und Nb (41) für dieselben Kanten die Werte der Linien L_{β_2} und L_{γ_1} benutzt.

Für die Elemente zwischen Ba (56) und W (74) sind die L -Kanten nur teilweise gemessen; für die unbekannten Werte wurde versucht, eine rationelle Interpolation zu erhalten. So sind für die Elemente zwischen Eu (63) und Ta (73) die Werte für die M_V -Niveaus durch graphische Interpolation ermittelt worden. Für die Elemente zwischen Ba (56) und W (74) wurden die Werte für die M_{III} -Niveaus auf ähnliche Weise bestimmt. Die anderen Niveaus der besprochenen Elemente sind mit Hilfe von experimentell gefundenen Daten aus dem interpolierten M_{III} - oder M_V -Werte berechnet. Wo für die Berechnung eines Niveaus ein interpolierter Wert benutzt worden ist, wurde dieses mit einem Sternchen in der Tabelle bezeichnet. Obwohl es natürlich immer möglich sein kann, daß durch die Interpolation einige spezielle Eigenarten der Änderungen der Niveauewerte mit der Atomnummer verloren gegangen sind, so scheint es uns doch sehr unwahrscheinlich, daß weitere experimentelle Messungen die in dieser Arbeit gezogenen Schlüsse in Gefahr bringen können.

In diesem Zusammenhang möge darauf hingewiesen werden, daß der in Tabelle 2 angegebene Wert für L_I des W, die den Messungen von Duane und Patterson unter Anbringung der besprochenen Korrektur entnommen sind, ziemlich genau ist, obwohl im allgemeinen der experimentelle Fehler bei der direkten Bestimmung dieser Kante wegen ihrer Schwäche und Unschärfe ziemlich groß sein mag. Man kann nämlich den Wert für L_I noch aus der viel schärferen und genauer bekannten Kante L_{III} auf drei verschiedene Weisen berechnen, und zwar unter Zuhilfenahme von einer der folgenden Additionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} L_{\beta_2} + (L_I - L_{III}) &= L_{\beta_3} + M_{\gamma} \\ L_I - L_{III} &= L_{\beta_9}^{2)} - L_{\alpha_1} \\ L_I - L_{III} &= L_{\beta_{10}}^{2)} - L_{\alpha_2} \end{aligned}$$

¹⁾ Früher L_1 genannt. Die Kanten sind jetzt auch in Übereinstimmung mit den zugehörigen Niveaus anders bezeichnet.

²⁾ Siehe D. Coster, ZS. f. Phys. 6, 185, 1921.

In allen diesen drei Fällen bekommt man für Wolfram T/R -Werte, welche innerhalb einer Unsicherheit von $\pm 0,6$ mit dem direkt gemessenen Werte übereinstimmen. Hieraus kann man schließen, daß der Fehler in dem T/R -Werte für die L_T -Kante von W sicher weniger als eine Einheit beträgt. Dies ist von Interesse für die Interpolation der M_{III} -Kurve zwischen W und Ba.

Weiter mag noch bemerkt werden, daß, wo für die Berechnung der Niveaus ziemlich kurze Wellenlängen benutzt wurden, die Genauigkeit kleiner ist als dort, wo größere Wellenlängen gebraucht werden konnten. So entspricht ein Fehler von 2 X-E in der Wellenlänge der L_T -Kante einem Fehler des T/R -Wertes von weniger als $\frac{1}{2}$ bei Ba, aber von etwa 2 und 3 bei W und bzw. Bi. Dies bewirkt z. B., daß in die niedrigsten Niveauwerte für die schwereren Elemente ziemlich große Fehler eingehen können¹⁾; während hingegen in der Nähe des Ba auch T/R -Werte der niedrigsten Niveaus noch verhältnismäßig genau bekannt sind.

In dieser Verbindung mag noch auf eine gewisse Zweideutigkeit hingewiesen werden, welche den aus der Röntgenspektroskopie stammenden Daten auch bei den genauesten Messungen anhaften. Die Röntgenabsorptionsspektren werden in der Regel mit Hilfe eines Stoffes in festem Zustand, und zwar oft in chemischer Verbindung, aufgenommen. Nun hat aber Bergengren²⁾ gezeigt, daß die Zustandsform dabei von wesentlicher Bedeutung ist, indem ein merklicher Unterschied der K -Kanten des Phosphors beobachtet wurde, wenn verschiedene Modifikationen dieses Elementes benutzt wurden. Weiter hat Lindh³⁾ meßbare Unterschiede in den Absorptionsspektren gefunden, die mit verschiedenen chemischen Verbindungen desselben Stoffes aufgenommen wurden. So hat er für die K -Kante des Chlors und Schwefels Unterschiede gefunden, die 0,5 bis 0,8 Einheiten in den T/R -Werten betragen, wenn Chlor- und Schwefelverbindungen benutzt wurden, in denen diese Stoffe einerseits mit positiver, andererseits mit negativer Wertigkeit auftreten.

Eine noch ernstere Unbestimmtheit in den Röntgendaten rührt von der sogenannten Feinstruktur der Absorptionskanten her, die sich in dem Auftreten einer zweiten schwächeren Diskontinuität

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Neuerdings ist es Hjalmar durch neue Messungen in der M -Serie (C. R. 175, 878, 1922) gelungen, die O - und M -Niveaus der schwersten Elemente mit größerer Genauigkeit zu bestimmen. Seine Ergebnisse konnten nicht mehr in diese Arbeit aufgenommen werden, sie sind aber mit unseren Schlußfolgerungen in dem besten Einklang.

²⁾ J. Bergengren, ZS. f. Phys. 3, 247, 1920.

³⁾ A. E. Lindh, ZS. f. Phys. 6, 303, 1922; C. R. 175, 25, 1922.

meistens auf der harten Seite der Hauptdiskontinuität äußert. Für den Unterschied der T/R -Werte dieser Diskontinuitäten gibt Fricke¹⁾ für die K -Kante der leichteren Elemente Beträge von ein bis zwei Einheiten an. Bekanntlich hat Kossel²⁾ eine Erklärung für diese Kantenstruktur vorgeschlagen, nach welcher sie kleinen Verschiedenheiten der Ablösungsarbeit eines Elektrons in einer inneren Gruppe entsprechen sollte, je nachdem dieses Elektron völlig vom Atom entfernt wird oder in eine außerhalb der Elektronenhülle verlaufende, den stationären Zuständen der Serienspektren entsprechende Quantenbahn übergeführt wird. Die Beziehung der verschiedenen hier besprochenen Umstände, welche eine Unbestimmtheit der Röntgendaten verursachen, zu den in dieser Arbeit zugrunde gelegten Vorstellungen des Atombaues werden wir am Schluß des § 6 kurz berühren. Hier möchten wir nur darauf hinweisen, daß wir es unter diesen Umständen mit eben derartigen individuellen Eigenartigkeiten der Niveauewerte zu tun haben, von deren Berücksichtigung wir bei der oben erwähnten Interpolation von vornherein absehen mußten.

§ 4. Theoretische Abschätzung der Energieniveaus. Was die Verwertung der Theorie für die nähere Deutung der Niveaus der Röntgenspektren betrifft, so handelt es sich in erster Linie darum, die Arbeit zu berechnen, die zur Entfernung eines Elektrons aus einer inneren Gruppe des Atoms aufgewendet werden muß. Zu diesem Zweck müssen wir natürlich erst die Bewegung der Elektronen im normalen Zustand des Atoms betrachten. Hierbei ist zu beachten, daß es ein wesentlicher Zug der Theorie ist, daß die Elektronen der verschiedenen Gruppen nicht in räumlich getrennten Gebieten des Atoms sich bewegen, sondern daß die Elektronen in den Gruppen mit größeren Hauptquantenzahlen (äußeren Gruppen), jedenfalls was die Bahnen in gewissen Untergruppen betrifft, während ihrer Bewegung in die Gebiete der Elektronenbahnen niedriger Hauptquantenzahlen (inneren Gruppen) eindringen. Dieser Umstand bringt mit sich, daß die totale Anziehungskraft zum Mittelpunkt des Atoms, die auf ein Elektron wirkt, für die verschiedenen Teile der Bahn, relativ zur Coulombschen Anziehungskraft durch den Kern selbst starken Änderungen unterworfen sein kann. Für die Beurteilung der Verhältnisse ist aber der Umstand von Wichtigkeit, daß im allgemeinen größere Teile der Zentralbahn, die man als dessen äußere Schlingen bezeichnen kann, nahe mit einer Keplerellipse verglichen werden können. Die Dimensionen und die Energie dieser elliptischen Schlingen weichen

¹⁾ R. Fricke, Phys. Rev. **16**, 202, 1920.

²⁾ W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 339, 1916.

dabei aber jedoch im allgemeinen wesentlich ab von den Dimensionen und der Energie einer durch dieselbe Hauptquantenzahl wie die tatsächliche Elektronenbahn charakterisierenden Keplerellipse, die in einem Coulombschen Felde von derselben Stärke wie diejenige, in welchem sich die betreffenden Bahnschlingen befinden, von einem Elektron durchlaufen würde. Energie und Dimension einer gequantelten Keplerellipse sind bekanntlich durch die einfachen Formeln

$$W = R h \frac{N^2}{n^2}, \quad 2a = \frac{e^2}{R h} \frac{n^2}{N} \quad (1)$$

gegeben, wo W die zur Entfernung erforderliche Arbeit, a die große Halbachse der Ellipse, R die Rydbergsche Konstante, N die Kernladung und n die Hauptquantenzahl bezeichnen. Für die in Frage stehenden Bahnschlingen werden wir nun nicht nur mit einer „effektiven Kernladungszahl“ N^* , sondern auch mit einer „effektiven Quantenzahl“ n^* zu rechnen haben, definiert durch die Ausdrücke

$$W = R h \frac{N^{*2}}{n^{*2}}, \quad 2a = \frac{e^2}{R h} \frac{n^{*2}}{N^*}. \quad (2)$$

Dieser Umstand ist besonders für die Beurteilung der Bindungsstärke der Elektronen der äußeren Gruppen entscheidend, indem hier die effektiven Quantenzahlen der elliptischen Schlingen beträchtlich kleiner sein können als die Hauptquantenzahlen und wesentlich verschieden für Bahnen, die zum gleichen n , aber verschiedenen Werten von k gehören. So beruht die typische Periodizität der chemischen Eigenschaften und der optischen Spektren darauf, daß für die äußersten Elektronenbahnen die effektiven Quantenzahlen, im Gegensatz zu den Hauptquantenzahlen, sich nur wenig ändern, wenn man von einem Element zum homologen Elemente der nächsten Periode im System der Elemente übergeht. Andererseits beruht der auffallende Mangel von Periodizität in wesentlichen Zügen der Röntgenspektren darauf, daß es sich hier in der Hauptsache um das Verhalten der innersten Elektronen im Atom handelt, wo wir es mit Elektronengruppen zu tun haben, die bereits vollständig ausgebildet sind und sich bei allen folgenden Elementen in derselben Weise wiederholen. Die effektive Quantenzahl der Bahnschlingen weicht in einem solchen Falle nur wenig ab von der Hauptquantenzahl der Bahn, und diese geringe Abweichung ist, wie eine einfache Rechnung lehrt, für einen bestimmten Bahntypus in erster Annäherung der Atomnummer N umgekehrt proportional. Das Eintauchen der Elektronenbahn in das Gebiet innerhalb liegender Gruppen macht sich daher, was die Stärke der Bindung in ihrer Abhängigkeit von der Kernladungszahl betrifft, in ganz ähnlicher

Weise geltend wie die direkte Abschirmung eines Teils der Kernladung durch die inneren Elektronen während des Durchlaufens der äußeren Bahnschlingen. Es ist schon deshalb um so weniger Grund, die zwei Wirkungen voneinander zu unterscheiden, als noch eine Wirkung auf die Ablösungsarbeit hinzukommt, die schwer zu berechnen ist, und die in derselben Weise sich mit der Kernladung ändert. Wir denken hier an die Verminderung der Ablösungsarbeit, die mit der Verstärkung der Bindung der in derselben Gruppe übrigbleibenden Elektronen bei der Entfernung des Elektrons zusammenhängt. Den Einfluß aller dieser Wirkungen können wir also durch die einfache Formel

$$W = R h \frac{(N - \alpha_{n,k})^2}{n^2} \quad (3)$$

ausdrücken, wo $\alpha_{n,k}$ eine Konstante für jede Bahntype n_k ist, die man der üblichen Sprechweise gemäß als „Abschirmungszahl“ bezeichnen kann.

Bei der Bestimmung der Ablösungsarbeit eines Elektrons aus einer inneren Gruppe ist es jedoch wesentlich, den Einfluß der Anwesenheit der äußeren Elektronengruppen noch in Betracht zu ziehen. Während der Entfernung des Elektrons üben diese Elektronengruppen eine Abschirmungswirkung aus, die am einfachsten in Rechnung gestellt werden kann, dadurch, daß wir von dem durch (3) gegebenen Ausdruck die Zunahme der Bindungsstärke sämtlicher äußerer Elektronen abziehen, welche durch die Entfernung des betreffenden Elektrons veranlaßt wird. Die gesamte Bindungsenergie der äußeren Elektronen mag folgendermaßen geschrieben werden:

$$B = R h \sum_{p > n} A_p \frac{N_p^{*2}}{p^{*2}}, \quad (4)$$

wo A_p die Anzahl der Elektronen in der Gruppe mit der Hauptquantenzahl p bedeutet, während N_p^* und p^* als mittlere effektive Kernladungszahl bzw. mittlere effektive Quantenzahl der Gruppe bezeichnet werden können. Wenn wir der Einfachheit halber uns auf die Betrachtung solcher Elemente beschränken, bei denen sich keine Gruppe in einer Stufe geradweiser Entwicklung befindet, können wir bei einer angenäherten Abschätzung der Größe B einfach $\frac{A_p}{p^{*2}}$ gleich 2 setzen.

Bei den vollständig ausgebildeten inneren Gruppen ist ja eben $A_p = 2p^2$ und gleichzeitig p^* nur wenig von p verschieden. Bei den äußeren nur vorläufig abgeschlossenen Gruppen, die an und für sich wegen der kleineren Werte der N_p^* einen geringeren Einfluß haben, ist p^* wesentlich kleiner als p , aber, wie eine einfache Ab-

schätzung lehrt, eben in solchem Maße, daß wir p^{*2} in grober Annäherung auch hier stets $p^{*2} = \frac{1}{2} A_p$ setzen können. Was nun die Änderung von B bei der Entfernung eines Elektrons aus der Gruppe mit der Hauptquantenzahl n betrifft, können wir also mit beträchtlicher Annäherung schreiben:

$$\Delta B = Rh \sum_{p > n} 2 \Delta N_p^{*2} = Rh 4 \sum_{p > n} N_p^*. \quad (5)$$

Um diesen Ausdruck weiter abzuschätzen, müssen wir die Weise betrachten, in welcher N_p^* für wachsendes p abnimmt. In erster Annäherung setzen wir

$$N_p^* = N - \sum_{q < p} A_q, \quad (6)$$

wodurch wir zugleich erreichen, daß die Summe in (5) sich einfach ausführen läßt. Aus der typischen symmetrischen Weise, in welcher bei den betrachteten Elementen nach der Tabelle 1 die Elektronenzahl in den Gruppen bei wachsender Hauptquantenzahl erst steigt und dann wieder sinkt, sehen wir nämlich, daß diese Summe stets annähernd gleich wird dem halben Produkt von N_n^* , wie es durch (6) für $p = n$ definiert ist, und der Anzahl der Glieder der Summe, d. h. der Anzahl der äußeren Elektronengruppen. Wenn der Ausdruck (6) genau richtig wäre, würde in der Tat, wie man leicht einsieht, diese Behauptung im Falle des K -Niveaus ($n = 1$) streng gelten bei den Elementen, die zwei Stellen nach den Edelgasen stehen, und für welche die äußerste Gruppe zwei Elektronen enthält; im Falle der L -Niveaus ($n = 2$) bei den Edelgasen selbst; im Falle der M -Niveaus ($n = 3$) für die Elemente, die acht Stellen vor den Edelgasen stehen und bei denen eine Gruppe mit 18 Elektronen eben im Abschluß begriffen ist. Mit Annäherung bekommen wir also

$$\Delta B = Rh \cdot 2 N_n^* \cdot \beta_{N,n},$$

wo $\beta_{N,n}$ eine Größe ist, die kontinuierlich mit fortschreitender Atomnummer anwächst und die sich annähernd um eine Einheit vermehrt, wenn wir von einem Element zum homologen Element in der nächsten Periode übergehen, in solcher Weise, daß $\beta_{N,n}$ niemals viel von der Anzahl der äußeren Gruppen abweicht. Annähernd können wir jetzt den Einfluß der äußeren Elektronen auf die Ablösungsarbeit eines Elektrons aus einer inneren Gruppe berücksichtigen, indem wir statt (3) schreiben:

$$W = Rh \frac{(N - \alpha_{n,k} - n^2 \beta_{N,n})^2}{n^2}.$$

Während die Größe $\alpha_{n,k}$, die wir als „innere Abschirmungszahl“ bezeichnen können, nicht von der Atomnummer abhängt, ändert sich die Größe $n^2 \beta_{N,n}$, die „äußere Abschirmungszahl“, in charakteristischer

Weise mit der Atomnummer. Nicht nur wird diese letztere Abschirmungszahl, wie es aus dem Obigen folgt, sich innerhalb einer Periode des Systems der Elemente um n^2 Einheiten vermehren, sondern wir müssen auch erwarten, daß die Einzelheiten des allmählichen Hinzukommens und der gradweisen Ausbildung der äußeren Gruppen, wovon bei der obigen Rechnung abgesehen wurde, sich abspiegeln werden in der Weise, in welcher die äußere Abschirmungszahl im einzelnen mit wachsender Atomnummer sich ändert. Die Ausbildung einer Elektronengruppe muß sich natürlich desto deutlicher zeigen, je tiefer sie in dem Atominneren liegt und wir müssen erwarten, daß das Anwachsen der äußeren Abschirmungszahlen besonders rasch sein wird in Gebieten des periodischen Systems, wo eine tief-
liegende Gruppe sich in einer Stufe gradweiser Ausbildung befindet.

Wir wollen hier nicht näher auf die Berechnung der Größen $\alpha_{n,k}$ und $\beta_{N,n,k}$ eingehen, die sich schon beim jetzigen Stand der Theorie wesentlich verfeinern ließe, da es uns bei dieser Gelegenheit mehr darauf ankommt, das Versuchsmaterial mit den Hauptzügen der Theorie zu vergleichen. Bei diesem Vergleich kommt jedoch noch ein wesentlicher Umstand in Frage, von dem wir der Einfachheit halber bisher abgesehen haben. Wir denken hier an die Relativitätskorrektur, die bei der Beschreibung der Bewegung der inneren Elektronen bekanntlich keineswegs zu vernachlässigen ist. Diese wird dadurch berücksichtigt, daß wir anstatt der einfachen Formel (1) die Sommerfeldsche Formel

$$W = Rh \frac{N^2}{n^2} + Rh \left(\frac{2\pi e^2}{hc} \right)^2 \frac{N^4}{n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \quad (7)$$

zugrunde legen, die von (1) durch das Hinzukommen der sogenannten Relativitätsglieder abweicht, von denen wir nur das erste hingeschrieben haben, dessen Berücksichtigung für viele Anwendungen genügt.

Allen besprochenen Korrekturen mag formell dadurch Rechnung getragen werden, daß wir für die Ablösungsarbeit eines Elektrons mit dem Bahntypus n_k schreiben:

$$W = Rh \frac{(N-\gamma)^2}{n^2} + Rh \frac{(N-\delta)^4}{n^4} \left(\frac{2\pi e^2}{hc} \right)^2 \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \quad (8)$$

Die im Hauptgliede vorkommende Größe γ bezeichnen wir als „Gesamtabschirmungszahl“; für die betrachteten innersten Elektronengruppen ist diese angenähert durch die Formel

$$\gamma = \alpha_{n,k} + n^2 \beta_{N,n} \quad (9)$$

gegeben. Die im zweiten Gliede vorkommende Größe $N-\delta$ soll einfach eine effektive Kernladungszahl bedeuten, die für eine angenäherte

Berechnung der Relativitätskorrektur des betreffenden Bahntypus als maßgebend betrachtet werden kann. Bei einer Abschätzung von δ ist zu bedenken, daß die Abschirmungswirkung sowohl der inneren wie der äußeren Elektronengruppen sich in wesentlich verschiedener Weise in den zwei Gliedern der Formel (8) äußern wird. So ist zu erwarten, daß im allgemeinen δ beträchtlich kleiner sein wird als die im Hauptgliede auftretende Abschirmungszahl.

Wenn wir nicht, wie bisher, nur die innersten Gruppen des Atoms betrachten, sondern uns den weiter außen befindlichen Gruppen zuwenden, werden die Verhältnisse viel verwickelter und bei der Berechnung der Ablösungsarbeit ist es wie beim optischen Spektrum von wesentlicher Bedeutung, die Abweichung der Bahn von einer Keplerellipse und die daraus folgende Erniedrigung der effektiven Quantenzahlen gesondert zu berücksichtigen. Im besonderen treffen wir auf Verhältnisse, die von den bisher besprochenen abweichen, wenn es sich um die Ablösungsarbeit von Elektronen in solchen Gruppen handelt, die sich in einer Stufe von gradweiser Ausbildung befinden. Obwohl die quantitative Berechnung der Niveaus in solchen Fällen beim jetzigen Stand der Theorie noch sehr unvollständig sein muß, kann jedoch eine Anzahl von unmittelbaren Folgerungen aus der Theorie über die Änderung der Niveauewerte mit der Atomnummer angegeben werden, auf die wir aber erst später bei dem Vergleich des Versuchsmaterials mit der Theorie näher eingehen werden.

§ 5. Allgemeiner Vergleich der Klassifikation der empirischen Röntgenniveaus mit der Theorie des Atombaues. Der Übersicht halber und um den Vergleich mit den theoretischen Vorstellungen über den Atombau zu erleichtern, sind in der untenstehenden Fig. 3 Kurven eingetragen, die für jedes Niveau den Verlauf der in Tabelle 2 berechneten \sqrt{T}/R -Werte als Funktion von N darstellen. Wo eine besonders große Unsicherheit über die Niveauewerte herrscht, ist der Verlauf der sonst voll ausgezogenen Niveauekurven nur gestrichelt angedeutet. Jede Kurve ist in eben derselben Weise wie die Niveaus in Fig. 2 mit Symbolen $n(k_1 k_2)$ bezeichnet.

Erstens muß nun darauf hingewiesen werden, daß man die Klassifikation der zu jedem Element gehörigen Niveauschar mit eben denselben Werten der Zahl n und der Zahlen k hat durchführen können, welche in Tabelle 1 für die Klassifikation aller im Atom anwesenden Elektronenbahnen mit den Quantenzahlen n und k benutzt wurden. Dies gilt nicht nur für die Elemente mit abgeschlossenen Elektronengruppen im Atom, wie die in § 2 besonders betrachteten Edelgase, sondern das Versuchsmaterial gestattet für eine größere Anzahl von Niveaus,

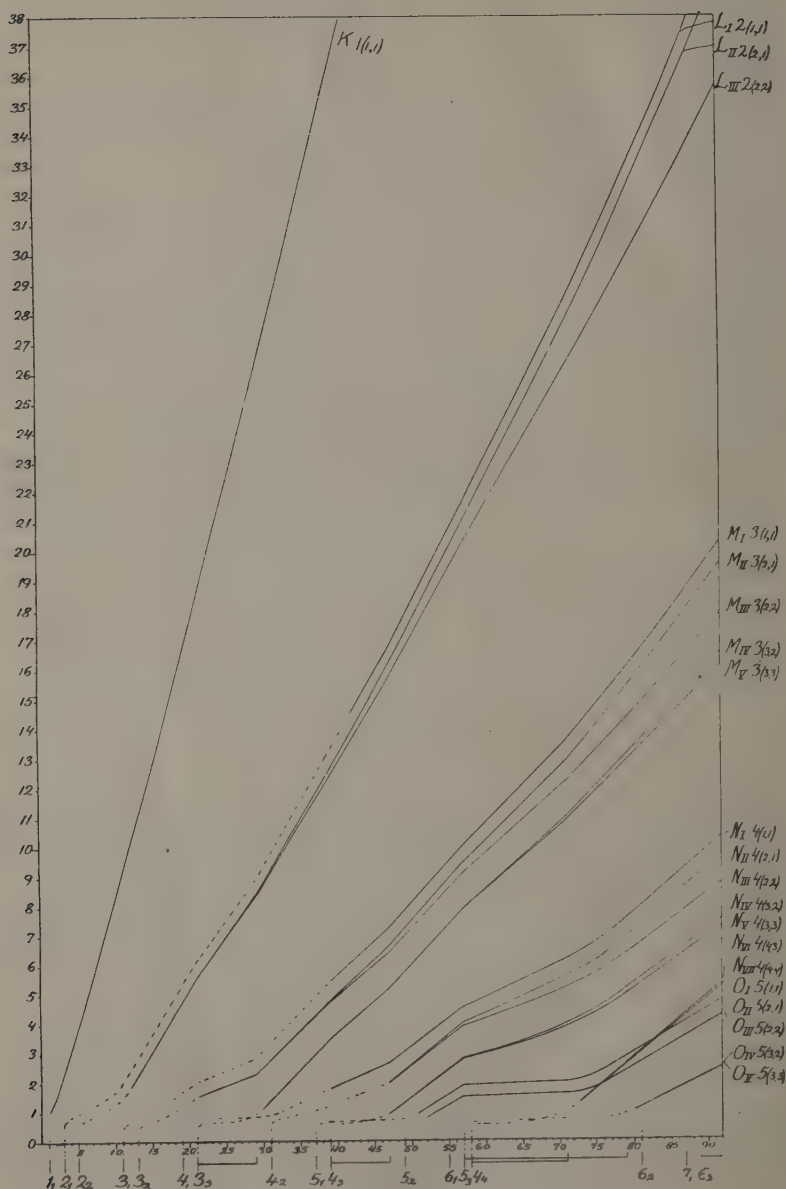


Fig. 3.

den Elementen nachzuspüren, bei welchen diese sich in den Röntgenspektren zuerst kennlich machen, und es hat sich dabei gezeigt, daß ein Niveau, das zu bestimmten Werten von n und k gehört, soweit es das Versuchsmaterial zu entscheiden erlaubt¹⁾, eben dort zum ersten Male erscheint, wo nach der Theorie im normalen Atom eine Bahn auftritt, die denselben Werten von n und k entspricht. Diese Stellen sind unten an der Fig. 3 durch kleine vertikale Striche angegeben.

Ein Blick auf die Figur bringt nun weiter sogleich den wichtigen Umstand zutage, daß in dem sonst regelmäßigen Verlauf der Kurven an gewissen Stellen eigentümliche Unregelmäßigkeiten auftreten, und wie ein Vergleich mit der Fig. 1 zeigt, gilt dieses für eben die Stellen des periodischen Systems, wo eine innere Gruppe in einer Stufe von gradweiser Ausbildung sich befindet. Diese Stellen sind unten an der Fig. 3 außerdem noch durch horizontale Linien, die bei den früher erwähnten vertikalen Strichen anfangen, angegeben. Dabei ist aber zu bemerken, daß eine solche Linie nicht einfach das gradweise Hinzukommen von Elektronen in n_k -Bahnen andeutet, sondern allgemeiner der ganzen Ausdehnung der k ten Stufe in der Ausbildung der n ten Elektronengruppe im Atom entspricht, bei welcher Stufe sich auch die Anzahl der Elektronenbahnen mit demselben Wert von n , aber kleineren Werten von k vermehrt.

Ehe wir aber auf weitere Einzelheiten in dem Kurvenverlauf eingehen, müssen wir einige allgemeine Betrachtungen über die sogenannten Niveaudubletts anstellen. Diese sind bekanntlich von zweierlei Art, die üblicher Weise als „Abschirmungsdublette“ und „Relativitätsdublette“ bezeichnet werden. In der Fig. 3 sind die ersteren kenntlich durch den parallelen Verlauf der Bildkurven gewisser Niveaupaaire, wie: ($L_I L_{II}$); ($M_I M_{II}$), ($M_{III} M_{IV}$); ($N_I N_{II}$), ($N_{III} N_{IV}$), ($N_V N_{VI}$); ($O_I O_{II}$), ($O_{III} O_{IV}$). Die zweite Art von Dubletten sind dagegen kenntlich durch das immer raschere Anwachsen der Abstände der Bildkurven gewisser Niveaupaaire, wie: ($L_{II} L_{III}$); ($M_{II} M_{III}$), ($M_{IV} M_V$); ($N_{II} N_{III}$), ($N_{IV} N_V$), ($N_{VI} N_{VII}$); ($O_{II} O_{III}$), ($O_{IV} O_V$), die anfänglich so nahe beisammen liegen, daß sie bei den Messungen der Linien nicht zu trennen sind, während wir jedoch aus den Kombinationsregeln schließen dürfen, daß sie bei steigender Atomnummer zu gleicher Zeit zuerst im Atom auftreten. Während die Größe der ersten Dubletts formal dargestellt werden kann durch einen Unterschied zwischen zwei Werten des ersten Gliedes in der Formel (7), die einem Unterschied in der inneren Abschirmungszahl $\alpha_{n,k}$ ent-

¹⁾ D. Coster, Phil. Mag. **43**, 1070, 1922.

sprechen, kann die Größe der zweiten Dublette angenähert dargestellt werden durch den Unterschied zwischen zwei Werten des zweiten Gliedes dieser Formel, die dadurch zustande kommen, daß man für k die zwei verschiedenen Werte einsetzt, die bei der Klassifikation der Niveaus mit k_2 bezeichnet wurden.

Für das Auftreten dieser Dublette, die bekanntlich bei der formalen Klassifikation der Röntgenspektren von großer Bedeutung gewesen sind, kann beim jetzigen Stand der Theorie keine vollständige Erklärung gegeben werden. Es scheint nichtsdestoweniger möglich, die erfahrungsmäßige Struktur der Niveaugruppen in enge Verbindung zu bringen mit der bei der Deutung des periodischen Systems angenommenen Struktur der Elektronengruppen im Atom. Beim ersten Anblick möchte man vielleicht erwarten, daß die Zahl der zu einem bestimmten Wert von n gehörigen Niveaus gleich sein sollte der Anzahl der im normalen Atom auftretenden Untergruppen derjenigen Elektronengruppe, die zur selben Hauptquantenzahl gehört, indem jedes Niveau der Entfernung eines Elektrons aus jeder dieser Untergruppen entsprechen sollte. Wir müssen aber bedenken, daß die Röntgenniveaus wesentlich bestimmt sind durch die Zustände eines Atoms, aus dem ein Elektron aus einer inneren Gruppe entfernt ist, und wir müssen uns die Komplexität vor Augen halten, die durch diese Entfernung eintreten kann. Denken wir uns einen Augenblick, daß auch für das angeregte Atom die verschiedenen Untergruppen als unabhängig voneinander betrachtet werden können in dem Sinne, daß die Entfernung eines Elektrons aus einer Untergruppe keine Änderung wesentlicher Züge der Struktur der anderen Untergruppen mit sich bringt. In einem solchen Falle dürfen wir eine Anzahl von Niveaus erwarten, die sich aber nicht allein durch ihr Relativitätsglied, sondern immer auch durch ihre Abschirmungszahl unterscheiden müßten, so daß wir uns nicht von dem Auftreten der typischen Relativitätsdublette Rechenschaft geben könnten. Wenn wir nun aber das Niveaubild betrachten, das entstehen würde, sobald alle Niveaus weggelassen würden, bei deren Klassifikation ungleiche Werte von k_1 und k_2 benutzt worden sind, so sehen wir, daß es eben alle die Züge wiedergibt, die eine solche einfache Auffassung des Ursprungs der Röntgenniveaus erwarten lassen würde. Nicht nur sehen wir, daß die Größe der Abstände aller übrigenbleibenden Niveaupaaire sich als eine Summe einer Abschirmungs- und einer Relativitätskorrektur ausdrücken läßt, wie sie der Formel (8) entspricht, wenn wir bei gleichem n die Werte der Nebenquantenzahl k ändern, sondern auch die Regeln für das Auftreten von beobachteten Röntgenlinien, welche Kombinationen der

betreffenden Niveaus entsprechen, sind eben diejenigen, welche eine einfache Anwendung des Korrespondenzprinzips auf eine Zentralbewegung ergibt, indem sich hier k immer um eine Einheit ändert. Deshalb wollen wir die Niveaus, bei denen $k_1 = k_2$ gesetzt wurde, der Kürze halber als „normale“ Niveaus bezeichnen.

Was das Vorhandensein der anderen Niveaus, die mit ungleichen Werten von k_1 und k_2 versehen sind, betrifft, so ist zunächst zu sagen, daß die zur Klassifikation dieser „anormalen“ Niveaus benutzten Werte von k_1 und k_2 einfach zum Ausdruck bringen sollen, daß jedes dieser Niveaus rein formell zu zwei normalen Niveaus in enger quantitativer Beziehung steht. So tritt jedes dieser Niveaus im Atom zugleich mit dem normalen Niveau auf, für das k_1 denselben Wert hat, mit dem es auch die Abschirmungszahl gemeinsam hat. Andererseits ist es mit dem normalen Niveau, für das k_2 denselben Wert hat, dadurch verknüpft, daß es mit ihm das Relativitätsglied gemeinsam hat, soweit man von Verschiedenheiten der in diesem vorkommenden effektiven Kernladungszahl absieht. Dieser Tatbestand führt dazu, den Ursprung dieser anormalen Niveaus in einer engen Wechselwirkung der Elektronenbewegung zweier benachbarter Untergruppen des angeregten Atoms zu suchen, die eine wesentliche Änderung des harmonischen Wechselspiels der Elektronenbewegung innerhalb beider Untergruppen bewirkt, wenn ein Elektron aus einer dieser Untergruppen entfernt wird. Durch die Theorie ist eine solche Auffassung insofern nahegelegt, als angenommen wird, daß die Ausbildungsstufe einer Elektronengruppe eben wesentlich durch das Wechselspiel der Elektronenbewegung innerhalb der verschiedenen Untergruppen bedingt ist¹⁾. Andererseits ist noch ganz unklar, wie durch eine nähere Ausführung dieser Betrachtung im Einzelnen eine Erklärung für das gesonderte Auftreten der Abschirmungs- und Relativitätsdublette gegeben werden kann. Ebenso steht eine Erklärung aus für die empirischen Kombinationsregeln, soweit sie die anormalen Niveaus betreffen, obwohl sie auf das Auftreten einer zweiten Nebenquantenzahl hindeuten, in ähnlicher Weise, wie sie bei den optischen Serienspektren zur Geltung kommt, wo die Komplexität der Energieniveaus sowie die Kombinationsregeln eine einfache Erklärung auf Grund des Korrespondenzprinzips zu gestatten scheinen. Die obenstehende Betrachtung verfolgt nur den Zweck, zu zeigen, daß, obwohl eine vollständige Erklärung der Komplexstruktur der Niveaus beim jetzigen Stand der Theorie nicht gegeben werden kann, es dennoch möglich scheint, den experimentellen Befund

¹⁾ Vgl. N. Bohr, ZS. f. Phys. 9, 1, 1922.

in ungezwungener Weise mit den charakteristischen Zügen der Theorie in Einklang zu bringen.

§ 6. Theoretische Deutung der näheren Abhängigkeit der Energieniveaus von der Atomnummer. Wenn wir zu einem genaueren Vergleich der aus dem Versuchsmaterial ermittelten Niveauwerte mit der Theorie übergehen, werden wir erst kurz die Niveaus betrachten, die mit vollständig ausgebildeten Gruppen im Atom zusammenhängen und für welche wir annehmen können, daß die Formel (8) für die Ablösungsarbeit eines Elektrons einer inneren Gruppe eine beträchtliche Genauigkeit besitzt. Bei der Benutzung dieser Formel zur Berechnung der im Hauptgliede eingehenden Abschirmungszahl wird es, jedenfalls bei höheren Kernladungen, von Bedeutung sein, welchen Wert wir der im Relativitätsglied eingehenden Abschirmungszahl δ beilegen. Für die K -Niveaus, wo eine einfache Abschätzung lehrt, daß δ nie mehr als einige Einheiten beträgt, führt dieses nicht zu besonderen Schwierigkeiten. Bei den Elementen höchster Atomnummer, wo der Wert, den man der Abschirmungszahl δ beilegt, von wesentlicher Bedeutung ist, kommt überdies die Unsicherheit in der Abschätzung dieser Größe gegenüber der Unsicherheit in den Messungsergebnissen nicht in Betracht. Bei den anderen Niveaus können wir der Einfachheit halber so vorgehen, daß wir — unter Hinweis auf die Überlegungen im vorigen Paragraphen — die aus den Relativitätsdubletten direkt berechneten Werte von δ benutzen. Dieses ist um so mehr berechtigt, als diese Werte annähernd denjenigen Werten gleich sind, die man aus dem Einfluß der Relativitätsmodifikation auf die Bewegung der Elektronen in Bahnen vom n_k -Typus theoretisch erwarten dürfte. Die hierbei eingeführte Unsicherheit ist besonders gering bei denjenigen Niveaus, die zirkulären Bahnen entsprechen, weil hier die absoluten Werte der Relativitätskorrekturen am kleinsten sind. Auf diese Weise haben wir aus der Tabelle 2 die in die untenstehende Tabelle eingetragenen Werte für die in das Hauptglied der Formel (8) eingehende Gesamtabschirmungszahl γ berechnet.

Element	K	L_{III}		M_V		N_{VII}	
	γ	γ	$\frac{1}{4}\gamma$	γ	$\frac{1}{8}\gamma$	γ	$\frac{1}{16}\gamma$
Ar (18)	2,7	(9,5)	(2,4)	—	—	—	—
Kr (36)	3,7	13,5	3,4	(28,2)	(3,1)	—	—
X (54)	4,7	16,8	4,2	33,5	3,7	—	—
Nt (86)	5,5—6,0	21,7	5,4	43,0	4,8	(65)	(4,1)

Um diese Werte von γ mit der theoretischen Formel (9) vergleichen zu können, sind für die L -, M - und N -Niveaus zugleich die durch n^2 dividierten Abschirmungszahlen angegeben. Wie wir sehen, bekommen wir dadurch für alle betrachteten Niveaus Werte, die im großen und ganzen um 1 anwachsen, wenn wir von einer Periode im System der Elemente zur nächsten übergehen. Diese Übereinstimmung ist besonders gut für die K -Niveaus, wo der theoretischen Formel nach der Art der Abschätzung auch die größte Genauigkeit beizulegen ist. Dieser Übereinstimmung kommt eine wesentliche Bedeutung zu, weil sie, ganz abgesehen von der noch offenen Frage der Deutung der Relativitätsdublette, eine direkte Stütze liefert für die Richtigkeit der bei der Klassifikation der Elektronenbahnen im Atom benutzten Quantenzahlen. Wenn z. B., wie in mehreren neueren Arbeiten vorgeschlagen, der Nebenquantenzahl k anstatt ganzzahlige Werte halbzahlige Werte beizulegen wären, würden die Verhältnisse sich ganz anders gestalten. Infolge des viel größeren Wertes des Relativitätsgliedes für die K -Niveaus, welche nach der Formel der Annahme $k = 1/2$ entspricht, würde diese Annahme bedeuten, daß die Abschirmungszahl anstatt der theoretisch geforderten Zunahme um eine Einheit von Edelgas zu Edelgas, von Krypton bis Xenon, eine Zunahme um etwa 5 Einheiten, und von Xenon bis Niton sogar eine Zunahme um mehr als 20 Einheiten aufwiese.

Aus der Tabelle finden wir weiter, wenn wir in der Formel (9) $\beta_{N,n}$ gleich der Anzahl der außerhalb liegenden Gruppen setzen, Werte für die innere Abschirmungszahl $\alpha_{n,k}$, nämlich $\alpha_{1,1} = 0,7$, $\alpha_{2,2} \sim 5,5$, $\alpha_{3,3} \sim 16$, ($\alpha_{4,4} \sim 33$), die von der nach der Theorie zu erwartenden Größenordnung sind. Wie schon in § 5 erwähnt, ist es jedoch nicht die Absicht, in dieser Arbeit näher auf eine genauere Berechnung der Abschirmungszahlen einzugehen. Wir wollen nur an der Hand der Figur aufmerksam machen auf die Unregelmäßigkeiten, die in den Kurven von Niveaus auftreten, die schon vollständig abgeschlossenen Gruppen zugehören, und die als Eigentümlichkeiten in der Änderung der äußeren Abschirmungszahlen gedeutet werden müssen. Wie aus der Figur ersichtlich, treten derartige Unregelmäßigkeiten besonders stark bei den M -Niveaus auf, erst in dem Gebiete der Palladiumfamilie und später noch deutlicher im Gebiete der seltenen Erden, in welchen Gebieten die Neigung der Niveaukurven in Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung wesentlich kleiner ist als in den unmittelbar angrenzenden Gebieten. Auch in den L -Niveaus sind entsprechende Unregelmäßigkeiten der Änderung der Niveauwerte mit der Atomnummer in den-

selben Gebieten sicher nachweisbar. Sie sind aber zu gering, als daß sie bei dem benutzten Maßstabe in den Kurven der Fig. 3 deutlich zum Vorschein kommen könnten. In der Nähe der Eisenfamilie aber sind aus der Figur die Niveauänderungen in den L -Kurven deutlich zu erkennen. In der Nähe dieser Familie scheint auch eine kleine Unregelmäßigkeit in dem Verlauf der K -Kurve vorhanden zu sein.

Wenden wir uns nun dem Verhalten der Niveaukurven zu, die Elektronengruppen entsprechen, die selbst in Ausbildung begriffen sind. Hier läßt das Versuchsmaterial eine Anzahl von Zügen neuer Art zutage treten, die einen eingehenden Vergleich mit der Theorie zulassen. Die ersten Stellen im periodischen System, wo wir solche Verhältnisse treffen, sind die Umgebungen der Eisen- und der Palladiumfamilie, wo wir in dem Verlauf der M - bzw. N -Kurven charakteristische Eigentümlichkeiten erkennen. Wegen der relativ großen Unsicherheit des bezüglich experimentellen Materials wollen wir uns jedoch hier nicht länger bei diesen aufhalten, weil wir bei der Familie der seltenen Erden noch ausgeprägteren Eigentümlichkeiten der Kurven begegnen. Um den Kurvenverlauf in diesem Gebiet, wo die experimentellen Ergebnisse auch am meisten gesichert erscheinen, deutlicher hervortreten zu lassen, sind in Fig. 4 die Kurven der uns hier interessierenden Niveaus in größerem Maßstab gezeichnet.

Das Auftreten der Familie der seltenen Erden ist nach der Theorie verursacht durch das Hinzukommen von Elektronen in 4_f -Bahnen und durch die damit verbundene Entwicklung der vierquantigen Elektronengruppe, während welcher die Anzahl der Elektronen dieser Gruppe allmählich von 18 bis 32 anwächst. Die Anwesenheit der 4_f -Bahnen äußert sich im Röntgenspektrum durch das Auftreten der Linien M_α und M_β . Bisher ist das M -Spektrum unterhalb Dy (66) noch nicht untersucht. Für dieses Element sind die erwähnten Linien von Stenström gefunden worden, und wir können aus den experimentellen Daten schließen, daß die Bindungsenergie der 4_f -Bahnen für Dy (66) und die nächstfolgenden Elemente von etwa derselben Größe ist wie die der sechsquantigen Valenzelektronen und wesentlich kleiner als die der 5_f - und 5_g -Bahnen, welche im O_I -Niveau sowie im Niveaupaar O_{II} , O_{III} in Erscheinung tritt. Dies ist eben das, was nach der Theorie zu erwarten wäre, denn solange die vierquantige Gruppe in Ausbildung begriffen ist, erfolgt das Hinzukommen von Elektronen in 4_f -Bahnen sozusagen unter Wettstreit mit den Valenzelektronen in den sechsquantigen Bahnen. Von dem Augenblick aber, wo die vierquantige Gruppe zu ihrem endgültigen

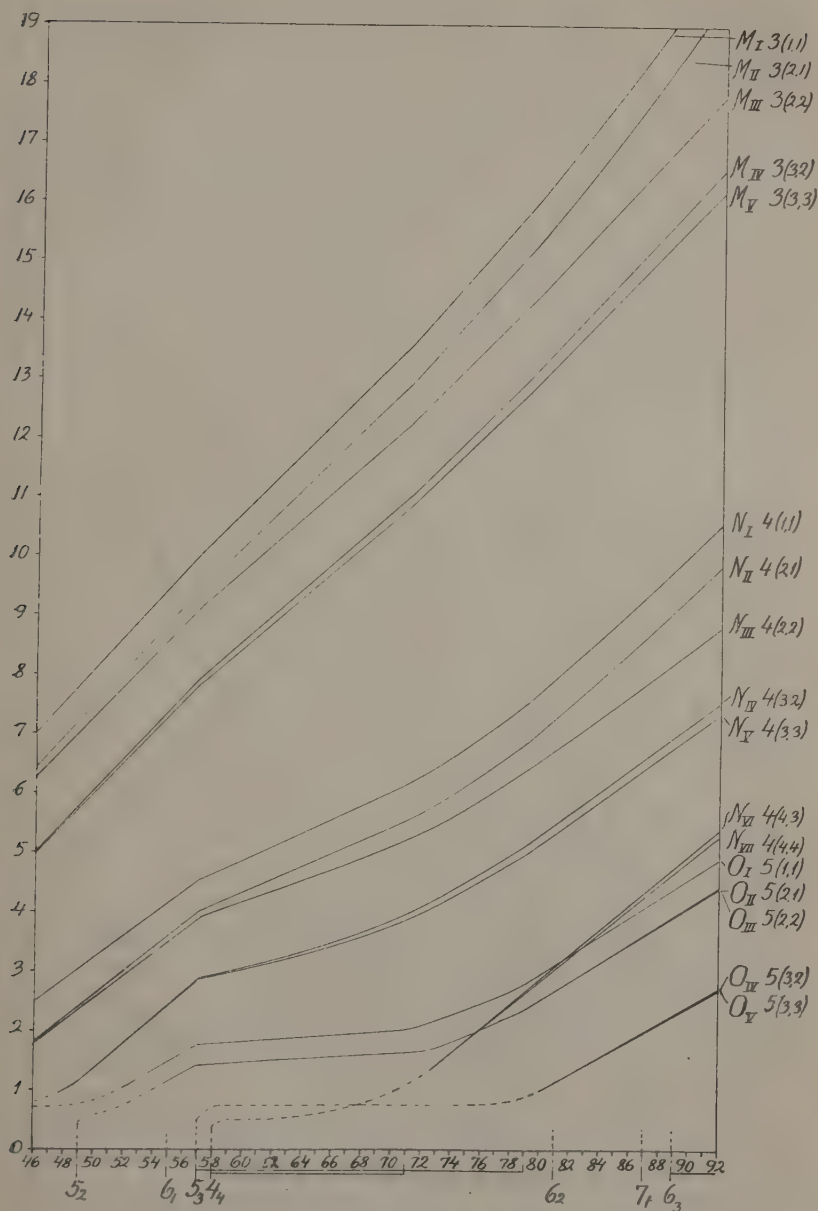


Fig. 4.

Abschluß gekommen ist, machen sich gänzlich andere Verhältnisse geltend, und wir müssen erwarten, daß die Bindungsenergie der 4_4 -Bahnen mit wachsender Atomnummer schnell und regelmäßig ansteigt. Dies entspricht ganz dem experimentellen Befund, daß nach dem Abschluß der Familie der seltenen Erden die Kurven der Niveaupaaire N_{VI} , N_{VII} schnell ansteigen, und, wie wir in der Fig. 4 sehen, zwischen W und Bi die Kurven der O_I , O_{II} - und O_{III} -Niveaus überkreuzen.

Obwohl, wie erwähnt, das vorhandene Versuchsmaterial nicht direkt den Beginn des Auftretens der 4_4 -Bahnen durch das Nachspüren nach dem ersten Erscheinen der Niveaupaaire (N_{VI} , N_{VII}) zu prüfen gestattet, tritt jedoch das Hinzukommen von Elektronenbahnen dieses Typus deutlich zutage im Verlauf der Kurven der anderen vierquantigen Niveaus sowie der Niveaus mit der Hauptquantenzahl 5. Diese Kurven zeigen alle, wie aus der Fig. 4 zu ersehen ist, einen ausgesprochenen Knick in der Nähe von Ce (58), wo nach der Theorie, wie in Tabelle 1 auf S. 344 angegeben, eine 4_4 -Bahn im normalen Atom zum erstenmal vorhanden ist. Diese Knicke müssen als herrührend von einem plötzlich beginnenden Anwachsen der inneren Abschirmungszahl in dem Ausdruck der diesen Niveaus entsprechenden Ablösungsarbeiten gedeutet werden. Dieses Anwachsen ist dadurch bedingt, daß, wie es theoretisch zu erwarten ist, die 4_4 -Bahnen schon bei ihrem ersten Auftreten im Normalzustand des Atoms in dem Gebiete der bereits vorhandenen Elektronengruppen mit vierquantigen Bahnen liegen und also innerhalb des Gebietes, in welchem die Elektronen mit fünfquantigen Bahnen sich während des größten Teiles ihres Umlaufes bewegen. In dieser Verbindung ist daran zu erinnern, daß es für die nähere Beurteilung des oben besprochenen Gleichgewichtes der Bindungsstärke der 4_4 -Elektronen und derjenigen der Valenzelektronen entscheidend ist, einerseits, daß die Stärke der Bindung der 4_4 -Elektronen durch den äußeren Abschirmungseffekt der fünfquantigen Elektronengruppe außerordentlich abgeschwächt ist, andererseits, daß zufolge des großen Unterschiedes zwischen Hauptquantenzahl und effektiver Quantenzahl die Bindung der Valenzelektronen vielmal stärker ist, als einer sechsquantigen Keplerellipse entsprechen würde, die sich ganz außerhalb der inneren Elektronengruppe befände.

Wegen der Unvollständigkeit der Messungen herrscht für die Elemente in der Umgebung von (72), die den Abschluß der Familie der seltenen Erden bilden, einige Unsicherheit über den Verlauf der Kurven der Niveaus N_I , N_{II} , N_{III} , N_{IV} , N_V . Das vorhandene Versuchsmaterial scheint jedoch deutlich zu zeigen, daß diese Kurven wie in

der Figur angedeutet eine mehr kontinuierliche Änderung ihrer Neigungen aufweisen als in der Umgebung von Ce (58). Dies dürfte zusammenhängen mit der in diesem Gebiet stattfindenden Entwicklungsstufe der fünfquantigen Elektronengruppe, die für das Auftreten der Platinmetalle verantwortlich ist, und die sich in der Bindung der vierquantigen Niveaus bemerkbar machen durch eine Beeinflussung der äußeren Abschirmungszahl.

Was zuletzt die *O*-Niveaus betrifft, begegnen wir neuen Zügen von großem theoretischen Interesse, indem wir es hier mit einer inneren Elektronengruppe zu tun haben, deren Bahnen teilweise außerhalb einer Gruppe verlaufen, die sich in einer Stufe gradweiser Ausbildung befindet. Obwohl noch eine beträchtliche Unsicherheit des Versuchsmaterials vorhanden ist, scheint es jedoch festzustehen, daß die *T/R*-Werte dieser Niveaus, wie es dem Verlauf der Kurven in der Figur entspricht, sich innerhalb der Familie der seltenen Erden außerordentlich wenig ändern. Dies ist gerade, was man nach der Theorie erwarten sollte, da die äußeren Schlingen der fünfquantigen Bahnen außerhalb des Gebietes der vierquantigen Elektronenbahnen liegen und daher die für die Ablösungsarbeit der *O*-Niveaus maßgebende effektive Kernladungszahl sowie die effektive Quantenzahl innerhalb der seltenen Erden nahezu konstant bleiben müssen.

Es wird von größtem Interesse sein zu versuchen, den Verlauf der Röntgenniveaus zwischen Xenon und Niton mit möglichst großer Meßgenauigkeit zu bestimmen, weil wir hoffen können, daß man daraus vieles über den näheren Verlauf der Ausbildung der vier- und fünfquantigen Elektronengruppen erfahren wird.

§ 7. Schlußbemerkungen. Bekanntlich war die Entdeckung der einfachen Verbindung zwischen dem Röntgenspektrum eines Elementes und der Atomnummer das typische Merkmal bei den grundlegenden Untersuchungen von Moseley und im besonderen war der scheinbar völlige Mangel von näheren Beziehungen dieser Spektren zu jenen Gesetzmäßigkeiten in den anderen Eigenschaften der Elemente, die im periodischen System zum Ausdruck kommen, auffallend. Durch die erhöhte Meßgenauigkeit, die wir besonders den Untersuchungen von Siegbahn verdanken, und das erweiterte Meßgebiet ist jedoch inzwischen eine Anzahl von Erscheinungen zutage getreten, die, wie wir gesehen haben, in engster Beziehung zu wesentlichen Zügen der Theorie gebracht werden können, die auch für die Deutung des periodischen Systems herangezogen sind.

Hierbei muß jedoch betont werden, daß bei den bisher besprochenen Gesetzmäßigkeiten der Röntgenspektren keine Rede war

von einer Periodizität in dem Sinne, wie sie in den optischen und chemischen Eigenschaften der Elemente zutage tritt. Bei näherer Überlegung müssen wir aber auch bei den Röntgenspektren Verhältnisse erwarten, die eben mit jenen Zügen des Atombaus zusammenhängen, die direkt für die Periodizität der genannten Eigenschaften maßgebend sind. Was in den gewöhnlichen Gesetzmäßigkeiten im periodischen System zum Ausdruck kommt, sind ja die Abschließungsprozesse, die sich fortgesetzt in den äußersten Elektronengruppen im Atom abspielen, und die mit sich bringen, daß bei wachsender Atomnummer im Normalzustand des Atoms immer wieder Elektronen in Quantenbahnen neuer Typen gebunden werden. Bei der Frage, in welcher Weise sich diese Verhältnisse in den Röntgenspektren äußern können, kommen wir auf einen Zug der Theorie, den wir bisher noch nicht besonders erwähnt haben. Für die Deutung der allgemeinen Gesetze der Emission und Absorption von Röntgenstrahlen ist es gerade wesentlich, daß die inneren Gruppen im allgemeinen einen abgeschlossenen Charakter besitzen. Dies hat nämlich zur Folge, daß weder ein von außen hinzukommendes Elektron unter Emission von Strahlung in einer Bahn vom selben Typus gebunden werden kann, wie die Elektronenbahnen bereits abgeschlossener Gruppen, noch ein Elektron aus einer inneren Gruppe unter Absorption von Strahlung in eine Bahn dieser Typen gelangen kann.

Eben diese Betrachtung, die eine unmittelbare Erklärung des charakteristischen Unterschiedes der Gesetze bietet, welche die Absorption einerseits im Röntgengebiet, andererseits bei den optischen Spektren regeln, gibt zugleich einen Fingerzeig, daß wir bei der Absorption von Röntgenspektren Sonderverhältnisse erwarten dürfen, wenn es sich um Elemente handelt, bei denen eine Gruppe sich in einer Stufe gradweiser Ausbildung befindet¹⁾. Wir müssen nämlich erwarten, daß ein Elektron aus einer inneren Gruppe durch Absorption von Strahlung direkt in eine solche unabgeschlossene Gruppe gelangen kann. Dies wird sich äußern in dem Auftreten von Röntgenlinien, die sowohl in Emission wie in Absorption erscheinen, und die sich nicht einordnen lassen in die besprochene Klassifikation der Röntgenspektren, die dem Diagramm in Fig. 2 entspricht, und die strenggenommen nur für Elemente mit abgeschlossenen Gruppen Gültigkeit besitzt²⁾. Solche Linien scheinen in der Tat bei den

¹⁾ Vgl. N. Bohr, ZS. f. Physik 6, 1, 1922.

²⁾ Diese Klassifikation bezieht sich außerdem nur auf die Spektren, die dadurch angeregt werden, daß nur ein einziges Elektron aus einer inneren Gruppe des Atoms entfernt wird. Wie kürzlich von Wentzel hervorgehoben wurde

Elementen der Eisenfamilie sowohl im Emissionsspektrum als langwellige Satelliten zu Diagrammlinien wie im Absorptionsspektrum als langwellige Komponenten der Kantenfeinstruktur aufzutreten¹⁾. Weiter sind auch im Gebiet der seltenen Erden mehrfach Linien beobachtet, die auf der langwelligen Seite von Diagrammlinien liegen und die einen ähnlichen Ursprung zu haben scheinen. Die nähere Untersuchung dieser Linien, besonders was ihre Absorptionsverhältnisse betrifft, ist in Angriff genommen und dürfte wichtige Auskunft liefern über die Weise, in welcher die allmähliche Komplettierung der vierquantigen Elektronengruppe im Gebiet der seltenen Erden vor sich geht.

Die letzten Betrachtungen führen uns unmittelbar dazu eine allgemeine nähere Verbindung von röntgenspektroskopischen Daten mit den periodischen Eigenschaften der optischen und chemischen Eigenschaften der Elemente zu erwarten. In der charakteristischen Änderung dieser Eigenschaften mit der Atomnummer spiegelt sich ja, wie erwähnt, eben der im allgemeinen unabgeschlossene Charakter der am losesten gebundenen Elektronengruppe im Atom ab. Wir dürfen daher annehmen, daß ein Elektron von einer inneren Gruppe durch einen Absorptionsprozeß nicht nur von dem Atom völlig entfernt werden oder in eine Quantenbahn eines anderen Typus als die im Atom schon vorhandenen Elektronenbahnen übergeführt werden kann, sondern daß es im allgemeinen auch direkt in die äußerste Elektronengruppe gelangen kann. Um die Bindungsenergie abzuschätzen, die einer solchen Elektronenbewegung entsprechen wird, müssen wir bedenken, daß die Verhältnisse, unter denen die Bewegung der Elektronen in den äußeren Gebieten des durch die Entfernung eines Elektrons aus einer inneren Gruppe angeregten Atoms stattfindet, sehr nahe mit

(Ann. d. Phys. **66**, 437, 1921), lassen sich einige Linien, die in dem Diagramm in Fig. 2 keinen Platz finden und die als kurzwellige Satelliten von Diagrammlinien auftreten, Atomen zuordnen, bei denen mehr als ein Elektron aus ihren normalen Bahnen in inneren Gruppen entfernt sind. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Röntgenspektren, die als Spektren erster Art bezeichnet werden können, mag es zweckmäßig sein, ein Spektrum, das durch die Entfernung von *p*-Elektronen aus inneren Gruppen angeregt wird, ein Spektrum *p*ter Art zu nennen. In Verbindung mit den im Text stehenden Betrachtungen muß jedoch hervorgehoben werden, daß bei den Erscheinungen der Absorption von Röntgenstrahlen die Spektren höherer Art kaum eine Rolle spielen können, weil bei den experimentellen Verhältnissen die Anzahl von Atomen, die durch Entfernung von inneren Elektronen angeregt sind, wohl immer als verschwindend betrachtet werden kann gegenüber der Anzahl von Atomen, deren inneres Gebäude sich in seinem Normalzustand befindet. (Vgl. D. Coster, Phil. Mag. **44**, 546, 1922 und S. Rosseland, Phil. Mag., erscheint demnächst.)

¹⁾ Vgl. D. Coster, Phil. Mag. **44**, 546, 1922.

denjenigen zusammenfallen, welche unter normalen Verhältnissen die Bewegung der äußersten Elektronen im Atom des nächstfolgenden Elementes beherrschen.

Außer den Gesetzmäßigkeiten allgemeiner Art in der Änderung der Niveauewerte mit der Atomnummer, deren Verbindung mit dem periodischen System in den vorigen Paragraphen besprochen wurde, müssen wir überhaupt erwarten, daß die fortgesetzten Untersuchungen eine Fülle von individuellen Einzelheiten in den röntgenspektroskopischen Daten enthüllen werden. Viele Andeutungen solcher Erscheinungen sind schon im Versuchsmaterial vorhanden; wir wollen jedoch darauf bei dieser Gelegenheit nicht näher eingehen, besonders weil wir, wie schon in § 3 betont, bei der Ermittlung der Niveauewerte der Tabellen 2 und 3 von ihrer Abhängigkeit vom physikalischen und chemischen Zustand, in dem das Element sich befindet und der hier von entscheidender Bedeutung ist, abgesehen haben.

Kopenhagen, Oktober 1922.

Universitetets Institut for teoretisk Fysik.

Über kurze Schallwellen.

Von **Konstantin Palaiologos**, zurzeit in Berlin.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 27. November 1922.)

1. Vorgeschichte. Lebedew hat zuerst den Gedanken gehabt, sehr kurze Schallwellen auf elektrischem Wege zu erzeugen und mit Hilfe eines Gitters zu messen. Auf seine Veranlassung hat Altberg¹⁾ Schallstrahlen, die von einer Funkenstrecke ausgehen und daher schnell abklingen, bis zur kleinsten Wellenlänge von etwa 1 mm untersucht. Ebenfalls auf Anregung Lebedews hat Neklepajew²⁾ die Absorption solcher kurzwelliger Schallwellen geprüft.

Auf Veranlassung von Martens hat Dieckmann³⁾ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von kurzen Schallwellen bis zu 0,5 mm Länge gemessen, indem er als Schallquelle einen Poulsenlichtbogen benutzte, so daß die abklingenden Schwingungen Lebedews durch Schwingungen von konstant bleibender Amplitude ersetzt werden.

Göldner hat angeregt, die Dieckmannschen Versuche unter Verwendung eines Röhrensenders zu wiederholen. Martens hat die Anregung gegeben, den vom Röhrensender erzeugten Wechselstrom nicht durch eine gewöhnliche Luftstrecke gehen zu lassen (wozu große Leistung nötig wäre), sondern einem Gleichstromlichtbogen zu überlagern.

Unter Benutzung dieser Anregungen hat Verfasser die [nächstehende Arbeit ausgeführt.

2. Prinzip der Methode. Wenn einem Gleichstrom ein Wechselstrom von kleinerer Intensität überlagert wird, so wird die Gesamtstromstärke niemals Null. Bei jedem Maximum des Gesamtstromes wird ein von diesem durchflossener Lichtbogen ein Druckmaximum erzeugen. Die Folge von Strommaxima bewirkt eine Folge von Druckmaxima: der Lichtbogen wird zur Schallquelle.

Die Frequenz n_a der Folge von Luftdruckmaxima wird gleich der Frequenz n_e des überlagerten Wechselstromes sein, d. h. es ist $n_a = n_e$. Wenn c die elektrische, a die akustische Fortpflanzungsgeschwindigkeit,

¹⁾ Altberg, Ann. d. Phys. **11**, 405, 1903; **23**, 287, 1907.

²⁾ Neklepajew, Ann. d. Phys. **35**, 175, 1911.

³⁾ Dieckmann, Ann. d. Phys. **27**, 1066, 1908.

λ_e die elektrische, λ_a die akustische Wellenlänge ist, so ergibt sich für die akustische Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$a = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} c. \quad (1)$$

Aus dieser Formel läßt sich die akustische Fortpflanzungsgeschwindigkeit a bestimmen, wenn λ_a und λ_e bekannt sind. Die elektrische Wellenlänge λ_e läßt sich hinreichend genau mit dem Wellenmesser bestimmen. Die Messung der akustischen Wellenlänge λ_a läßt sich mit großer Genauigkeit durch ein Beugungsgitter ausführen.

3. Der Röhrensender. Die Röhre AGK (Fig. 1) ist eine 10 Watt-

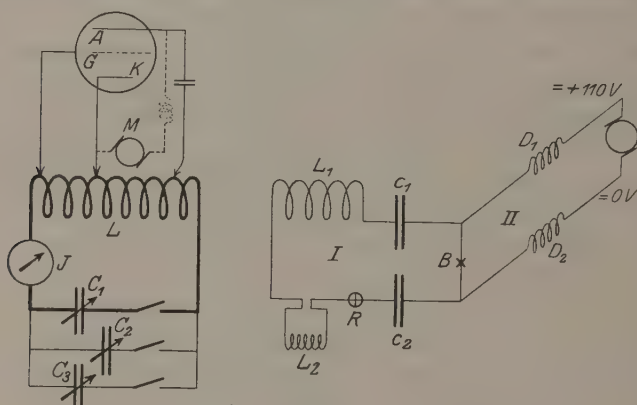


Fig. 1.

Telefunken-Elektronenröhre, Type R. S. 5 C II. Die Heizung der Kathode K erfordert 3,5 Amp. Die Spannung der Anode A beträgt 450 Volt. Sie wird von einem kleinen Gleichstromgenerator M erzeugt, der mit einem Gleichstrommotor direkt gekuppelt ist. Die Kapazität C des Schwingungskreises wird aus drei Kondensatoren C_1 , C_2 , C_3 , von je 2000 μF gebildet. Für die größeren Wellen werden alle drei Kondensatoren parallel geschaltet, für die mittleren Wellen zwei; für die kleineren Wellen wird ein Kondensator eingeschaltet. Die Selbstinduktionsspule L des Schwingungskreises ist in zwölf Stufen unterteilt. Außer C und L enthält der Schwingungskreis den Hitzdrahtstrommesser J . Der Röhrensender ist mit dem Wellenmesser geeicht und erzeugt Wellen zwischen 80 und 1500 m.

4. Lichtbogenschaltung. Der Betrieb des als Schallquelle dienenden Lichtbogens ist aus Fig. 1 ersichtlich. Der Bogen B ist beiden Stromkreisen I und II gemeinsam. Durch den im Kreise II fließenden Gleichstrom wird der Bogen gespeist. Die Blockkonden-

satoren c_1 und c_2 im Kreise I bewirken, daß der Gleichstrom wirklich den Lichtbogen B , nicht die Kopplungsspule L_1 durchfließt. Die beiden Drosselspulen D_1 und D_2 verhindern den Eintritt der hochfrequenten, durch die Kopplung von L_1 mit L erzeugten Wechselströme in die Gleichstromleitung. R (Glühlampe) dient als induktionsloser Widerstand, der den Kreis I aperiodisch macht. Mit L_2 wird der Wellenmesser gekoppelt.

5. Gitteranordnung. Die von dem Bogen B (Fig. 2) ausgehenden Strahlen werden durch den Hohlspiegel S_1 von etwa 12 cm Brennweite als paralleles Strahlenbündel auf das Reflexionsgitter G geworfen. Das vom Gitter G reflektierte bzw. gebeugte parallele Strahlenbündel wird durch einen zweiten Hohlspiegel S_2 von 12 cm Brennweite in dem Punkte S vereinigt. Im Punkte S befindet sich das System des Druckapparates, der zur Untersuchung der Schallwellen dient. Die Justierung der Anordnung geschieht durch optische Einstellung. Diese sehr zweckmäßige Gitteranordnung haben mit Kollimator und Fernrohr Kurlbaum, mit Spiegel, auf Veranlassung von Martens, Dieckmann angewendet.

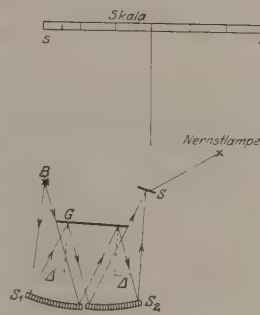


Fig. 2.

6. Das Gitter. Bei diesen Versuchen sind zwei Gitter verwendet mit den Perioden $p = 1,86$ mm und $p = 0,60$ mm. Beide Gitter sind auf der Teilmaschine geprüft.

7. Der Druckapparat. Für die Beobachtung der Schallwellen wird der Druck benutzt, welchen die Schallwellen (nach Lord Rayleigh) auf eine zur Schallrichtung senkrecht stehende Wand ausüben. An einem sehr dünnen Quarzfaden hängt ein sehr leichter Glimmerflügel (20.5 mm), auf welchem ein kleiner Ablesungsspiegel befestigt ist. Das Ganze ist in einem Holzkasten eingeschlossen. Die Schallwellen fallen durch ein kleines Fenster auf die eine Flügelseite.

8. Messung und Berechnung der Wellenlänge. Die akustische Wellenlänge λ_a läßt sich durch die folgende Formel berechnen:

$$\lambda_a = \pm \frac{2p \cos \Delta}{k} \sin \varphi. \quad (2)$$

Hierin ist p die Gitterperiode, k eine ganze Zahl, $\Delta = 25^\circ$ der Einfallswinkel bei der optischen Abbildung von B auf S , wobei $k = 0$ ist. Der Winkel φ ist der Winkel, um den das Gitter aus der Stellung der direkten Abbildung von B auf S heraus gedreht worden ist, kurz,

Tabelle 1. Gitter, Periode $p = 1,86$ mm, $t = 22^{\circ}$ C.

Elektrische Wellenlänge λ_e in m	Drehungswinkel des Gitters	Akustische Wellenlänge λ_a in mm	Schallgeschwindigkeit in m/sec	
			bei $t^0 = 22^{\circ}$ C	bei $t^0 = 0^{\circ}$ C
1450	30,5 ⁰	1,71	353	339
1300	26,5	1,502	346	332
1200	24,5	1,405	350	336
1100	22,5	1,285	350	336
1000	20,25	1,163	348	335
900	18	1,040	347	333
800	16,5	0,960	360	346
700	14,25	0,830	355	341
600	11,75	0,685	343	330
500	10	0,584	351	337
400	8	0,470	352	338

Tabelle 2. Gitter, Periode $p = 0,60$ mm, $t = 18^{\circ}$ C.

Elektrische Wellenlänge λ_e in m	Drehungswinkel des Gitters	Akustische Wellenlänge λ_a in mm	Schallgeschwindigkeit in m/sec	
			bei $t^0 = 18^{\circ}$ C	bei $t^0 = 0^{\circ}$ C
700	47 ⁰	0,795	341	330
600	39	0,685	343	332
500	33	0,595	357	345
400	25	0,461	346	335
300	18	0,338	338	328
250	15	0,282	339	328
200	12	0,227	340	329
150	9	0,170	340	329

der Drehungswinkel des Gitters. Praktisch gemessen wird der Drehungswinkel φ als halbe Differenz der beiden Gitterstellungen, bei welchen das erste Beugungsmaximum beobachtet wird. Bei den praktischen Messungen ist also $k = 1$ zu setzen.

9. Resultate. In den Tabellen I und II sind die Meßresultate zusammengestellt. Wie aus den gefundenen Werten hervorgeht, bleibt die akustische Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft bei kleinen Wellen konstant und im Mittel gleich 335 m/sec bei 0° C in einem Wellenbereich von 1,71 bis 0,170 mm. Die kleinsten von den durch diese Anordnung erzeugten Schallwellen, welche mit Sicherheit gemessen sind, haben eine Länge von 0,170 mm, während die bis jetzt gemessene kleinste Schallwelle, welche in der Dieckmannschen Arbeit angegeben ist, 0,5 mm beträgt.

Berlin, Physikal. Inst. der Handelshochschule, November 1922.

Autorenregister.

- Altenburger, Kamillo s. Blau.
- Blau, Marietta und Altenburger, Kamillo. Über einige Wirkungen von Strahlen. II. S. 315.
- Bohr, N. und Coster, D. Röntgenspektren und periodisches System der Elemente. S. 342.
- Bollert, Karl. Die Entstehung der Lorentzverkürzung und die strenge Behandlung des Uhrenparadoxons. S. 189.
- Bose, Debendra. Studien über den Durchgang von α - und β -Teilchen durch Gase. S. 207.
- Bothe, W. Untersuchungen an β -Strahlenbahnen. S. 117.
- Bratke, E. u. Waetzmann, E. Über eine weitere Interferenzanordnung zur Prüfung optischer Systeme. S. 253.
- Coster, D. s. Bohr.
- Dessauer, Fr. Über einige Wirkungen von Strahlen. I. S. 38.
- Emde, Fritz. Polare und axiale Vektoren in der Physik. S. 258.
- Fues, E. Die Berechnung wasserstoffunähnlicher Spektren aus Zentralbewegungen der Elektronen II. S. 1. Berichtigung. S. 314.
- Grottrian, Walter. Die Absorptionsspektren von Thallium- und Indiumdampf. S. 218.
- Heisen, Georg s. Schaefer.
- Henglein, F. A. Die chemischen Konstanten und ihre Halogene im ein- und zweiatomigen Zustand. S. 245.
- Mark, H., Polanyi, M. u. Schmid, E. Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen. I. Mitteilung: Allgemeine Beschreibung der Erscheinungen u. Untersuchungsmethoden. S. 58.
- — — II. Mitteilung: Quantitative Festlegung des Dehnungsmechanismus. S. 78.
- — — III. Mitteilung: Beziehungen zur Faserstruktur und Verfestigung. S. 111.
- Opitz, H. Zur geometrischen Optik der prismatischen Dispersion. II. S. 304.
- Palaiologos, Konstantin. Über kurze Schallwellen. S. 375.
- Polanyi, M. s. Mark.
- Riedinger, Franz. Die Stellung der Uhr in der Relativitätslehre. S. 265.
- Schaefer, Clemens und Heisen, Georg. Experimentelle Beiträge zur Strömung von Flüssigkeiten in Röhren. S. 165.
- und Thomas, Max. Oberschwingungen in ultraroten Absorptionsspektren. S. 330.
- Schanz, Fritz. Eine neue Theorie des Sehens. S. 28.
- Schmid, E. s. Mark.
- Schmidt, Harry. Molekulare Dimensionen, Molekülbau und innere Reibung der Halogene und ihrer Hydride. S. 24.
- Schrödinger, Erwin. Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons. S. 13.

- Sievert, Rolf M. Einige Bemerkungen zu der Abhandlung: W. Friedrich und O. Glasser, „Intensitätsverteilung der γ -Strahlen radioaktiver Substanzen im absorbierenden Medium.“ S. 243.
- Skaupy, Franz. Der durchsichtige Selektivstrahler als Leuchtkörper. S. 177.
- Zum Problem des Atoms und der Strahlung. S. 184.
- Thomas, Max s. Schaefer.
- Tornau, Bruno. Bestimmung des Verhältnisses $k = c_p/c_v$ der beiden spezifischen Wärmen von Kohlen-
dioxid nach der Quinckeschen Resonanzmethode sowie Untersuchungen über den Einfluß der dabei verwandten Tönhöhen. S. 48.
- Vegard, L. Die Lage der Atome in den optisch aktiven Kristallen NaClO_3 und NaBrO_3 . S. 289.
- Waetzmann, E. s. Bratke.
- Würschmidt, Joseph. Magnetische Anfangspermeabilität, scheinbare Remanenz und Verhalten bei Erschütterungen. S. 128.
- Zickendraht, Hans. Über den Luftwiderstand senkrecht getroffener Kreisplatten. S. 232.

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO



3 8198 318 725 742

